MALO TUTORIAL

A SzaMa által készített Malo-HowTo és Tolmi levlistára küldött levele, valamint saját ötleteim alapján állítottam össze az alábbi doksit, amely az infosite-ról letölthető mintazh feladataira próbál minél részletesebb, közérthető kidolgozást adni.

Az esetleges hibákért elnézést kérek; észrevételeket, javaslatokat és hibajelzéseket az alább látható címre várok. Mindenkinek jó tanulást és sikeres zh-t kíván:

kronik (chroniq@freemail.hu)

2005. február 05.

A legfrissebb verziót az alábbi címen érheted el:

http://kronik.r8.org/bme.php

1. feladat

Boole-algebrán minden a,b-re:		
(/a/b + a) + (/ab + b)	= ab + /a/b	(a)
	= a + ba	(b)
	= b + a/b + a	(c)
	= /ab + a + b	(d)

Két módszer van rá, egy bruteforce és egy logikai… :)

Bruteforce módszer

Készítsünk egy táblázatot, amelyben felírjuk *a* és *b* összes lehetséges kombinációját. A táblázatban feltüntetjük a negáltjaikat és kiszámoljuk a feladatbeli kifejezéseket alkotó „részegységeket" (amik össze vannak VAGY-olva; ezek itt: ab, a/b, /ab, /a/b). Ez utóbbi lépésre a számítások megkönnyítése érdekében van szükség.

Ha mindezekkel megvagyunk, felírjuk a baloldal és a jobboldalak igazságtábláját, majd összehasonlítjuk őket. Ha valamelyik jobboldal igazságtáblája megegyezik a baloldaléval, akkor a két kifejezés egyenlő, az állítás igaz.

a	b	/a	/b	ab	a/b	/ab	/a/b	baloldal	(a)	(b)	(c)	(d)
0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1

Mint látható, egyik jobboldal igazságtáblája sem egyezik meg a baloldaléval, így a helyes válasz a 7-es.

Logikai módszer

A kifejezéseket a legegyszerűbb alakra hozzuk. Ehhez az alábbi szabályokat használjuk fel:

de Morgan azonosságok:
/(a+b) = /a/b
/(ab) = /a + /b

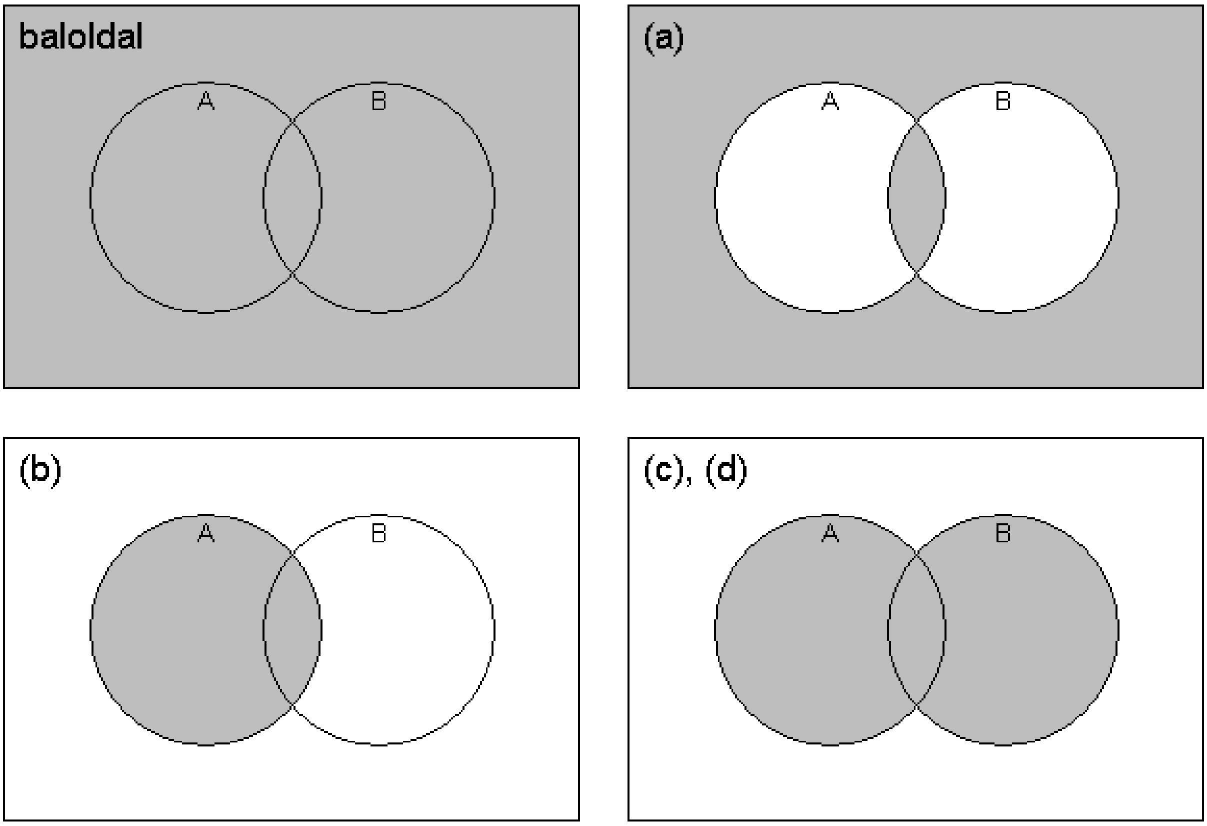
elnyelési szabály:
a + aX = a, ahol X tetszőleges Boole-algebrai kifejezés

egyéb szabályok:
a/a = 0
a + /a = 1
(a+b)c = ac + bc

<u>*A kapott legegyszerűbb alakok:*</u>

baloldal: (/a/b + a) + (/ab + b) = /a/b + a + /ab + b = /a(/b + b) + a + b = /a + a + b = 1 + b = 1
(a): ab + /a/b
(b): a + ba = a
(c): b + a/b + a = a + b
(d): /ab + a + b = a + b

Ezt követően Venn-diagramok segítségével ábrázoljuk a kifejezéseket és összehasonlítjuk a kapott halmazokat.



Mint látható, egyik jobboldal sem egyezik meg a baloldallal, így a helyes válasz a 7-es.

2. feladat

2-azonosság az alábbiak közül

$(p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$	$= 1$	(a)
$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$	$= 1$	(b)
$(p \Rightarrow 0) \Rightarrow \neg p$	$= 0$	(c)
$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow \neg p)) \Rightarrow \neg p$	$= 1$	(d)

Az $A \Rightarrow B$ kifejezés (implikáció) akkor hamis, ha A igaz és B hamis. Minden más esetben igaz.

Erre a feladattípusra is létezik egy bruteforce és egy gondolkodós megoldás.

Bruteforce módszer

A módszer lényege, hogy az első feladathoz hasonlóan felírjuk a kifejezésben szereplő változók összes lehetséges kombinációját és kiértékeljük a kifejezést. Lehet, hogy kicsit tovább tart, viszont biztos eredményt ad.

A (b) kifejezés vizsgálata lépésről lépésre:

1. lépés – Felírjuk a változók összes lehetséges kombinációját.

(p	⇒	q)	⇒	(¬p	⇒	¬q)
0		0				
0		1				
1		0				
1		1				

2. lépés – A változók összes többi előfordulása alá is felírjuk az értékeiket.

(p	⇒	q)	⇒	(¬p	⇒	¬q)
0		0		1		1
0		1		1		0
1		0		0		1
1		1		0		0

3. lépés – A zárójeleken belüli implikációk kiértékelése.

(p	⇒	q)	⇒	(¬p	⇒	¬q)
0	1	0		1	1	1
0	1	1		1	0	0
1	0	0		0	1	1
1	1	1		0	1	0

4. lépés – A fő implikáció kiértékelése.

(p	⇒	q)	⇒	(¬p	⇒	¬q)
0	1	0	**1**	1	1	1
0	1	1	**0**	1	0	0
1	0	0	**1**	0	1	1
1	1	1	**1**	0	1	0

Mint látható, a változóknak van olyan kombinációja, amelyre a kifejezés értéke 0 ($p = 0$, $q = 1$), így a kifejezés nem azonosan egyenlő 1-el.

<u>*A (c) kifejezés vizsgálata a fenti módszerrel:*</u>

$(p$	$\Rightarrow$	$0)$	$\Rightarrow$	$\neg p$
0	1	0	**1**	1
1	0	0	**1**	0

A kifejezés tehát mindig igaz.

Az (a) és (d) kifejezések hasonlóan kiértékelhetőek.

Gondolkodós módszer

Az $A \Rightarrow B$ kifejezés akkor hamis, ha A igaz és B hamis, minden más esetben igaz. Ebből kiindulva megpróbálunk olyan változókombinációt találni, amelynél a kifejezés baloldala igaz, míg a jobboldala hamis. Ha nem találunk ilyen kombinációt, akkor a kifejezés mindig igaz értéket ad.

<u>*Az (a) kifejezés:*</u> $(p \wedge q \Rightarrow r) \;\Rightarrow\; (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \;=\; 1$

Olyan változókombinációt kell találnunk, melynél $(p \wedge q \Rightarrow r) = 1$ és $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) = 0$.

$((p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ csak akkor 0, ha $p = 1$ és $(q \Rightarrow r) = 0$. Innen pedig $(q \Rightarrow r)$ csak akkor lehet 0, ha $q = 1$ és $r = 0$.

A jobboldal tehát csak akkor 0, ha $p = 1$, $q = 1$ és $r = 0$. Ezeket a baloldalba behelyettesítve az alábbi kifejezést kapjuk: $(1 \wedge 1 \Rightarrow 0)$. Ez hamis, tehát nem sikerült olyan változókombinációt találnunk, melynél a baloldal igaz, míg a jobboldal hamis. Így a kifejezés mindig igaz lesz.

<u>*A (b) kifejezés:*</u> $(p \Rightarrow q) \;\Rightarrow\; (\neg p \Rightarrow \neg q) \;=\; 1$

A jobboldal csak $p = 0$ és $q = 1$ esetén lehet hamis. Ha ezeket behelyettesítjük a baloldalba, a $(0 \Rightarrow 1)$ kifejezést kapjuk, amely igaz. Ezzel találtunk egy olyan változókombinációt, melyre a kifejezés 0, vagyis a fenti egyenlőség hamis.

<u>*A (c) kifejezés:*</u> $((p \Rightarrow 0) \;\Rightarrow\; \neg p \;=\; 0$

Ennél a feladatnál az egyenlőségjel jobboldalán 0 szerepel, így az ellenkező logikát kell alkalmaznunk. Azt kell belátnunk, hogy van olyan változókombináció, melynél a kifejezés igaz. Ez $p = 0$ és $p = 1$ esetén is teljesül, tehát az egyenlőség hamis.

<u>*A (d) kifejezés:*</u> $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow \neg p)) \;\Rightarrow\; \neg p \;=\; 1$

A jobboldal csak $p = 1$ esetén lehet 0. Ezt a baloldalba behelyettesítve a $((1 \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow 0))$ kifejezést kapjuk, melyből látható, hogy q bármely értékére hamis lesz.

A helyes válasz tehát a 4-es.

3. feladat

Z_2 műveleteivel **2**-n:

$$\begin{aligned}(p \vee q) \wedge (q \Rightarrow \neg p) &= pq + (1 + q)(1 + p) && \text{(a)}\\ &= p + q + (1 + pq)pq && \text{(b)}\\ &= pq + pq && \text{(c)}\\ &= (1 + q) + (1 + p) && \text{(d)}\end{aligned}$$

Elmélet

Z_2 egy kételemű ciklikus csoport, melyen értelemezzük a szorzás és a mod2 összeadás műveleteket. A mod2 összeadás miatt $1 + 1 = 0$.

Kapcsolat a Boole-algebrával:

$$\begin{aligned}\neg p &= 1 + p\\ p \vee q &= p + q + pq\\ p \wedge q &= pq\\ p \Rightarrow q &= 1 + p + pq\end{aligned}$$

Z_2 azonosságok:

$$\begin{aligned}p + p &= 0\\ pp &= p\\ 1p &= p\\ p + 0 &= p\end{aligned}$$

A megoldás menete

A fenti szabályok segítségével a baloldalt és a jobboldolakat is legegyszerűbb alakra hozzuk. Ahol egyezést látunk, igaz az egyenlőség.

A baloldal:

$$(p \vee q) \wedge (q \Rightarrow \neg p) = (p + q + pq)(1 + q + q(1+p)) = (p + q + pq)(1 + q + q + qp) =$$
$$(p + q + pq)(1 + qp) = p + q + pq + pq + pq + pq = p + q$$

/Magyarázat: Az utolsó átalakításnál a *pq*-k párosan szerepelnek, így a $p + p = 0$ szabály miatt kiejtik egymást./

Az (a) kifejezés:

$$pq + (1 + q)(1 + p) = pq + 1 + q + p + pq = 1 + p + q$$

Ez épp a baloldal ellentettje.

A (b) kifejezés:

$$p + q + (1 + pq)pq = p + q + pq + pq = p + q$$

A kapott alak megegyezik a baloldallal.

A (c) kifejezés:

pq + pq = 0

A kifejezés azonosan 0, tehát nem egyezik meg a baloldallal.

A (d) kifejezés:

(1 + q) + (1 + p) = 1 + q + 1 + p = p + q

Megegyezik a baloldallal.

Tehát a helyes válasz a 3-as.

/Megj.: A feladat az 1. feladatban bemutatott bruteforce módszerrel is megoldható, ami ugyan kicsit tovább tart, viszont nem kell megjegyezni a Z_2 szabályokat./

4. feladat

$\mu = (\eta \Rightarrow (\varphi \vee \psi)) \Rightarrow ((\eta \Rightarrow \varphi) \wedge (\eta \Rightarrow \psi))$		
$\upsilon = (\eta \Rightarrow (\varphi \wedge \psi)) \Rightarrow ((\eta \Rightarrow \varphi) \vee (\eta \Rightarrow \psi))$		
$\neg\mu$ és υ kielégíthető	(a)	
$\neg\mu$ tautológia és υ kielégíthető	(b)	
μ és υ tautológia	(c)	
μ és $\neg\upsilon$ kielégíthető	(d)	

Elmélet

Egy állítás kielégíthető, ha van olyan modell (változókombináció), ahol igaz.
Egy állítás tautológia, ha minden modellben igaz. Az ilyen állítás kielégíthető, tagadása viszont nem. Léteznek olyan állítások is, melyek kielégíthetőek és a tagadásuk is az.

Egy állítás tautológia voltát úgy szoktuk bebizonyítani, hogy a tagadásáról belátjuk, hogy nem kielégíthető. A 2. feladatnál látott módszerhez hasonlóan megpróbálunk olyan változókombinációt találni, ahol a fő implikáció baloldala igaz, míg a jobboldal hamis.

A megoldás menete

A 2. feladatnál látott bruteforce módszer itt is működik (ahol végig 1 jön ki, az lesz tautológia), de próbáljuk meg inkább logikai úton megoldani a feladatot.

A μ megoldása:

$$\mu = (\eta \Rightarrow (\varphi \vee \psi)) \Rightarrow ((\eta \Rightarrow \varphi) \wedge (\eta \Rightarrow \psi))$$

A jobboldal csak úgy lehet 0, ha $\eta = 1$ és φ és ψ közül az egyik vagy mindkettő 0. Ha csak az egyikük 0, akkor a baloldal igaz lesz, ha viszont mindkettő, akkor hamis.

Mint látható, a kifejezés nem tautológia, de kielégíthető. /Így a tagadása is az./

A υ megoldása:

$$\upsilon = (\eta \Rightarrow (\varphi \wedge \psi)) \Rightarrow ((\eta \Rightarrow \varphi) \vee (\eta \Rightarrow \psi))$$

A jobboldal csak úgy lehet 0, ha $\eta = 1$, $\varphi = 0$ és $\psi = 0$. Az értékeket a baloldalba behelyettesítve az $(1 \Rightarrow (0 \wedge 0))$ kifejezést kapjuk, mely hamis.

A kifejezés tehát minden modellen igaz, vagyis tautológia.

A (a)-(d) válaszok közül csak az (a) igaz, így a helyes válasz az 1-es.

5. feladat

X: Ketten közülünk igazat mondanak. **Y**: Ketten közülünk hazudnak. **Z**: A többiek hazudnak. **X** és **Z** hazudik (a) **X** és **Y** hazudik (b) **Y** hazudik és **Z** igazat mond (c) Pontosan ketten mondanak igazat. (d)

A megoldás menete

Felírunk egy táblázatot **X**, **Y**, **Z** összes kombinációjára, majd megvizsgáljuk, hogy ezek közül melyek lehetnek helyesek.

X akkor igaz, ha pontosan 2 ember mond igazat. /0, 1 vagy 3 ember hazudik./
Y akkor igaz, ha pontosan 2 ember hazudik. /0, 1 vagy 3 ember mond igazat./
Z akkor igaz, ha **X** és **Y** egyszerre hazudik. /**X** = 0 és **Y** = 0/

Az **X**, **Y**, **Z** oszlopokban a 0 azt jelenti, hogy az illető hazudik, 1 pedig azt, hogy igazat mond. Pk. **X** esetében az értelmezés a következő: ha **X** = 1, akkor **Y** és **Z** közül pontosan az egyiknek kell igaznak lennie (2 ember mond igazat). Ha **X** = 0, akkor **Y** és **Z** nem lehet egyszerre 1 (0, 1 vagy 3 ember mond igazat).

A jobboldali oszlopokat balról jobbra haladva töltjük ki. Ha egy változónál ellentmondást találunk, az adott sor kiértékelését nem kell folytatnunk.

X	Y	Z	*x*	*y*	*z*
0	0	0	ok	ok	hiba
0	0	1	ok	hiba	
0	1	0	ok	ok	ok
0	1	1	hiba		
1	0	0	hiba		
1	0	1	ok	ok	hiba
1	1	0	ok	hiba	
1	1	1	hiba		

Mint látható, a változók egyetlen kombinációja ad helyes eredményt (**X** = 0, **Y** = 1, **Z** = 0). Ennek értelmében a három ember közül csak **Y** mond igazat, így az előre megadott válaszok közül csak az (a) igaz. Tehát a helyes válasz az 5-ös.

6. feladat

$Prop_X$-en: $\Sigma = \{ \varphi \wedge \psi, \neg\eta \vee \neg\varphi \}$. $\Sigma \vdash \varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$ (a) $\Sigma \vdash \varphi \vee \psi$ (b) $\Sigma \vdash \eta \Rightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$ (c) $\Sigma \vdash \varphi \wedge \neg\psi$ (d)

Elmélet

Propozícionális logikában az atomokat *x*, *y*, *z* vagy η, φ, ψ betűkkel jelöljük, ezek logikai változók. Az atomok halmazát *X*-szel jelöljük. Az *u* modell minden atomhoz rendel egy (igaz/hamis) értéket.

Az atomokból logikai műveletekkel összerakott képletet formulának nevezzük (egy atom is alkothat formulát).

Az elméleteket görög nagybetűkkel jelöljük (Δ, Γ, Σ). Az elmélet formulák halmaza; ezek a formulák az elméletben igaz állítások.

Természetesen nem minden modell egyeztethető össze minden elmélettel. *u* modellje a Σ elméletnek, ha az elmélet formuláiba behelyettesítve az *u* által megadott értékeket minden formula igaz lesz.

Pl. $\Sigma = \{ x \Rightarrow y, y \wedge z \}$ esetén $u_1 = \{ x = 1; y = 1; z = 1 \}$ modellje, $u_2 = \{ x = 0; y = 0; z = 1 \}$ nem modellje a Σ elméletnek.

Egy elmélet konzisztens, ha van modellje. Inkonzisztens elmélet alapformuláiban ellentmondás van, így belőle hamis állítások is levezethetőek.

Egy elmélet teljes, ha legfeljebb egy modellje van. Teljes elmélet esetén minden állításról egyértelműen be tudjuk bizonyítani, hogy igaz vagy hamis, míg több modell esetén ez nem lehetséges. Inkonzisztens elméletnél minden állítás igaz és hamis voltát is be tudjuk bizonyítani, így az ilyen elmélet is teljes.

Propozícionális logikában a *levezethető* és az *igaz* egymásból következő állítások. Az alkalmazott jelölések:

levezethető:	$\Sigma \vdash \varphi$	(szintaktikai következménye)
nem vezethető le:	Σ |-/- φ	*/$\vdash$ áthúzva/*
igaz:	$\Sigma \models \varphi$	(szemantikai következménye)

Egy formula igaz egy elméletben, ha az elmélet minden modelljén igaz. Egy formula független az elmélettől, ha az elméletnek van olyan modellje, amiben igaz, és van olyan is, amelyben nem.

Inkonzisztens elméletből mindig levezethető a hamis állítás (jele: duplaszárú F).

A megoldás menete

Először meghatározzuk az elmélet modelljeit. Ehhez olyan változókombinációkat kell keresnünk, melyeknél az elmélet összes formulája igaz.

A $\varphi \wedge \psi$ formula csak akkor igaz, ha $\varphi = 1$ és $\psi = 1$. A φ változó értékét a második formulába behelyettesítve a $\neg\eta \vee 0$ kifejezést kapjuk, mely csak $\eta = 0$ esetén igaz.

Az elméletnek tehát pontosan egy modellje van ($\eta = 0$, $\varphi = 1$, $\psi = 1$), tehát konzisztens és teljes.

Ezt követően az (a)-(d) formulákba behelyettesítjük a kapott értékeket. Ha a $\vdash$ jobboldalán lévő kifejezés igaz, akkor levezethető az elméletből.

<u>Az (a) formula:</u> $\Sigma \vdash \varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$

$1 \Rightarrow (1 \Rightarrow 1) = 1 \Rightarrow 1$, tehát igaz.

<u>A (b) formula:</u> $\Sigma \vdash \varphi \vee \psi$

$1 \vee 1 = 1$, tehát igaz.

<u>A (c) formula:</u> $\Sigma \vdash \eta \Rightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$

$0 \Rightarrow (\neg 1 \vee \neg 1) = 0 \Rightarrow (0 \vee 0) = 0 \Rightarrow 0$, tehát igaz.

<u>A (d) formula:</u> $\Sigma \vdash \varphi \wedge \neg\psi$

$1 \wedge \neg 1 = 1 \wedge 0$, tehát nem igaz.

Tehát a helyes megoldás a 7-es.

7. feladat

$X = \{ x, y, z \}$,	$\Sigma = \{ \neg x \wedge \neg y, z \Rightarrow x \vee y \}$,	$\Gamma = \{ x \vee \neg y, x \Rightarrow y \}$,	$\Delta = \{ x \wedge \neg y, x \Rightarrow y \}$
$Prop_X$-en:			
Σ konzisztens és Γ teljes	(a)		
Σ-nak pontosan egy modellje van	(b)		
Δ-nak pontosan egy modellje van	(c)		
Γ teljes és Γ |-/- F	(d)		

Elmélet

Lásd a 6. feladatot.

A megoldás menete

Megkeressük az elméletekhez tartozó modelleket, melyek ismeretében már válaszolni tudunk a kérdésekre.

Σ vizsgálata: $\Sigma = \{ \neg x \wedge \neg y, z \Rightarrow x \vee y \}$

A $\neg x \wedge \neg y$ formula csak akkor igaz, ha $x = 0$ és $y = 0$. Ezeket az értékeket a második formulába behelyettesítve a $z \Rightarrow 1 \vee 1$ kifejezést kapjuk, mely csak $z = 0$ esetén igaz.

Tehát a Σ elméletnek pontosan egy modellje van ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$), azaz konzisztens és teljes.

Γ vizsgálata: $\Gamma = \{ x \vee \neg y, x \Rightarrow y \}$

A $x \vee \neg y$ formula akkor igaz, ha

a.) $x = 0$ és $y = 0$. Ekkor a második formula is igaz ($0 \Rightarrow 0$).

b.) $x = 1$ és $y = 0$. Ekkor a második formula hamis ($1 \Rightarrow 0$).

c.) $x = 1$ és $y = 1$. Ekkor a második formula is igaz ($1 \Rightarrow 1$).

A fentiekből látható, hogy Γ-nak két modellje van, így konzisztens, de nem teljes elmélet.

Δ vizsgálata: $\Delta = \{ x \wedge \neg y, x \Rightarrow y \}$

Az $x \wedge \neg y$ formula akkor igaz, ha $x = 1$ és $y = 0$. Ekkor azonban a második formula hamis lesz ($1 \Rightarrow 0$).

A Δ elméletben ellentmondás van, nincs modellje, így inkonzisztens és teljes.

Az (a)-(d) válaszok közül csak a (b) igaz, így a helyes válasz a 7-es.

8. feladat

$\mu = (\forall x)(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\forall x)\varphi \Rightarrow (\forall x)\psi)$		$\upsilon = (\exists x)(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\exists x)\varphi \Rightarrow (\exists x)\psi)$
$\neg\mu$ és υ kielégíthető	(a)	
μ nem kielégíthető és υ nem érvényes	(b)	
μ és υ érvényes	(c)	
μ és $\neg\upsilon$ kielégíthető	(d)	

Elmélet

A predikátum logika formuláiban szerepelhet a $\forall$ (minden) és a $\exists$ (létezik) jel. A negálás kivihető a jel elé, de ekkor a $\forall$ és $\exists$ jelek felcserélődnek, azaz $\forall(\neg x)$ helyett $\neg(\exists x)$, $\exists(\neg x)$ helyett pedig $\neg(\forall x)$ írható („Minden nő nem csúnya” ekvivalens azzal, hogy „Nem létezik csúnya nő”).

Egy formula kielégíthető, ha van olyan modell, amelyen igaz. Egy formula érvényes, ha minden modellen igaz. Egy érvényes formula kielégíthető, tagadása viszont nem az.

A megoldás menete

Egy formula vizsgálatakor a latin betűket érdemes valamilyen tárgynak, a jobboldalon szereplő görög betűket pedig valamilyen tulajdonságnak elnevezni.

Pl. x: alma
φ: piros
ψ: asztalon van

A μ állítás vizsgálata

Az állítást a következő módon fogalmazhatjuk át:

„Minden alma, ha piros, akkor az asztalon van.”

ebből következik, hogy:

„Ha minden alma piros, akkor minden alma az asztalon van.”

Ez mindig igaz, μ tehát érvényes.

A υ állítás vizsgálata

Az állítás hétköznapi nyelven megfogalmazva:

„Van olyan alma, ami ha piros, akkor az asztalon van.”

ebből következik, hogy:

„Ha létezik piros alma, akkor van alma az asztalon..”

Ez már nem mindig igaz. Lehet, hogy pont az az alma létezik, amire az első állítás nem volt igaz. A υ állítás tehát nem érvényes, de kielégíthető.

Az (a)-(d) válaszok közül csak a (d) igaz, így a helyes válasz a 4-es.

9. feladat

$\alpha = \langle < \rangle$. *Pred*$_\alpha$*-en:* $\Sigma = \{ (\forall x)(\neg x < x),\ (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z) \}$
$\mu = (\exists x)(\forall y)(x \neq y \Rightarrow x < y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)(\neg y < x)$ $\eta = (\exists x)(\forall y)(\neg y < x) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)(x \neq y \Rightarrow x < y)$
$\neg\mu$ nem független és η független Σ-tól (a) Sem μ, sem η nem független Σ-tól (b) μ független és $\neg\eta$ nem független Σ-tól (c) Mind μ, mind η független Σ-tól (d)

Elmélet

A predikátum logikában az atomok között értelmezhetünk műveleteket. Atomokból műveletekkel term-eket állítunk elő (egy atom is alkothat term-et).

A formulákban a term-ek között egyenlőségjel és relációk szerepelhetnek. Egy reláció term párokhoz rendel igaz vagy hamis értéket.

A feladatok között ismétlődő példa a < reláció. A megszokott, egész számokon értelmezett < relációt a következő elmélet határozza meg:

$\Sigma = \{$ $(\forall x)(\neg x < x)$, (irreflexivitás)
$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z)$, (tranzitivitás)
$(\forall x)(\forall y)(x < y \vee x = y \vee y < x)$, (teljes rendezés)
$\neg(\exists x)(\forall y)(\neg(x=y) \Rightarrow x < y)$, (nem létezik legkisebb elem)
$\neg(\exists x)(\forall y)(\neg(x=y) \Rightarrow y < x)$, (nem létezik legnagyobb elem)
$(\forall x)(\exists y)(y < x \wedge \neg(\exists z)(y < z < x))$, (minden számhoz van közvetlen előtte lévő)
$(\forall x)(\exists y)(x < y \wedge \neg(\exists z)(x < z < y))$ (minden számhoz van közvetlen utána lévő)
$\}$

Érdemes megnézni, hogy a példában ezek ott vannak-e, mert átejthetjük magunkat, ha mégis odaképzeljük valamelyiket. Pl. a legkisebb elem nem azonos azzal az elemmel, aminél nincs kisebb, mert ha nem teljes a rendezés, sok olyan elem lehet, aminél nincs kisebb, mégsem kisebb mindenki másnál.

Fontos továbbá, hogy a formulákban a legmagasabb precedenciájú operátor a relációjel, azaz a $(\forall x)(\neg x < x)$ kifejezés jelentése: $(\forall x)(\neg(x < x))$.

A megoldás menete

A Σ elmélet szavakkal megfogalmazva: Σ = { irreflexív, tranzitív }.

A μ és η formulák annyiban különböznek egymástól, hogy oldalaik fel vannak cserélve. Jelöljük a $(\exists x)(\forall y)(x \neq y \Rightarrow x < y)$ kifejezést *A*-val, a $(\exists x)(\forall y)(\neg y < x)$ kifejezést pedig *B*-vel.

Ekkor a formulák alakja:

$\mu = A \Rightarrow B$
$\eta = B \Rightarrow A$

A jelentése: létezik olyan elem, ami önmagán kívül mindennél kisebb.
B jelentése: létezik olyan elem, aminél nincs kisebb.

A Σ elmélet megengedi a részleges rendezést is (nem szerepel benne a teljes rendezést kikötő alapformula). Részleges rendezéskor *A* nem feltétlenül teljesül, hiszen létezhet olyan elem, ami mindennél kisebb, kivétel egy, amivel nincs semmilyen relációban. *B* viszont mindig igaz, részleges rendezésnél több ilyen elem is lehet.

A fentiek miatt μ minden modellen igaz ($0/1 \Rightarrow 1$), η-hoz viszont találhatunk olyan modell is, amin igaz ($1 \Rightarrow 1$), és olyat is, amin nem ($1 \Rightarrow 0$). Így μ (és vele $\neg\mu$) függ a modelltől, η és $\neg\eta$ azonban független. Az (a)-(d) válaszok közül csak az (a) igaz, így a helyes válasz az 1-es.

10. feladat

Pred$_\alpha$-en: $\Sigma = \{ (\exists x)(\varphi \Rightarrow \psi), (\forall x)\varphi \}$.
$\Sigma \vdash (\exists x)\psi$ (a)
$\Sigma \vdash \neg(\forall x)\neg\varphi$ (b)
$\Sigma \vdash \neg(\exists x)\neg\psi$ (c)
$\Sigma \vdash (\exists x)\neg\psi$ (d)

A megoldás menete

A feladat logikája nagyban hasonlít a 8. feladatéra.

A Σ elmélet az alábbi két szabályt tartalmazza:

$(\exists x)(\varphi \Rightarrow \psi)$ *Létezik olyan alma, ami ha piros, az asztalon van.*

$(\forall x)\varphi$ *Minden alma piros.*

<u>Az (a) állítás:</u> $\Sigma \vdash (\exists x)\psi$

Az állítás szerint *„létezik olyan alma, ami az asztalon van”*. Ez igaz, mivel minden alma piros.

<u>A (b) állítás:</u> $\Sigma \vdash \neg(\forall x)\neg\varphi$

Az állítás szerint *„nem minden alma nem piros”*, vagyis *„létezik olyan alma, ami piros”*. Ez igaz, mivel minden alma piros.

<u>A (c) állítás:</u> $\Sigma \vdash \neg(\exists x)\neg\psi$

Az állítás szerint *„nem létezik olyan alma, ami nem az asztalon van”*, vagyis *„minden alma az asztalon van*”. Ezt nem tudjuk biztosan. Lehetséges, de nem következik a Σ elméletből, tehát hamis.

<u>A (d) állítás:</u> $\Sigma \vdash (\exists x)\neg\psi$

Az állítás szerint *„létezik olyan alma, ami nem az asztalon van”*. Ezt szintén nem tudjuk biztosan. Lehetséges, de nem következik az elméletből, tehát hamis.

Tehát a helyes válasz a 3-as.