1. Zárthelyi megoldásokkal

1999 tavasz I. évf. 13.-18.tk.

1. Konvergensek–e az alábbi improprius integrálok? Válaszát indokolja!

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}\,dx$ b) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}\,dx$

MO. a) $y = 1-x$ helyettesítéssel $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}\,dx = -\int_1^0 \frac{1}{\sqrt[3]{y}}\,dy = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{y}}\,dy$, ami létezik mert $\frac{1}{3} < 1$.

b) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{x^3-1}} \sim \frac{1}{\sqrt{x^3}}$, tehát $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}\,dx$ létezik, mert $\frac{3}{2} > 1$.

---

2. Konvergensek-e az alábbi numerikus sorok ? Válaszát indokolja !

a) $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{n!}{n^2}$ b) $\displaystyle\sum_0^\infty \frac{2^n}{n!}$

MO. a) Nem: $\displaystyle\frac{n!}{n^2} \longrightarrow \infty \neq 0$. b) Igen: e^x Taylor–sora alapján $\displaystyle\sum_0^\infty \frac{2^n}{n!} = e^2$

VAGY hányadoskritériummal: $\displaystyle\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \longrightarrow 0 < 1.$

---

3. Hol konvergens és hol egyenletesen konvergens az $f_n(x) = e^{-nx}$ függvénysorozat ?

MO. A határfüggvény: $f(x) = 0$ ha $x \in (0,\infty), f(0) = 1$. $f_n(x)$ egyetlen negatív x–re sem konvergens. Egyenletesen konvergens minden $\delta > 0$ esetén a $[\delta,\infty)$ intervallumon mert e^{-nx} monoton csökkenő, így $|r_n(x)| = |f_n(x)| = e^{-nx} \leq e^{-n\delta} \longrightarrow 0$ ha $x > \delta > 0$. Nem egyenletesen konvergens már a $(0,\infty)$ intervallumon sem, mert $r_n(\frac{1}{n}) = f_n(\frac{1}{n}) = e^{-n\cdot\frac{1}{n}} = e^{-1} \not\longrightarrow 0$.

---

4. Számítsa ki az $f(x) = \sin x^2$ függvény századik deriváltját az origóban, amennyiben az létezik!

MO. $\sin x$ Taylor-sorából: $\displaystyle\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} \mp \ldots - \frac{x^{100}}{50!} \pm \ldots$, vagyis $\displaystyle\frac{f^{(100)}(0)}{100!}x^{100} = -\frac{x^{100}}{50!}$,

tehát $\displaystyle f^{(100)}(0) = -\frac{100!}{50!}$.

---

5. Hol folytonosak az alábbi függvények ? Válaszát indokolja !

a) $\displaystyle f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ az origón kívül, $f(0,0) = 0$. b) $\displaystyle f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$ az origón kívül, $f(0,0) = 0$.

MO. Mindkettő az origó kivételével mindenütt, mert a koordináta–függvények folytonosak és ezekből alapműveletekkel vannak összerakva, melyek megőrzik a folytonosságot. Továbbá

a) nem folytonos az origóban, mert $f(0,y) = -1 \xrightarrow[y\to 0]{} -1 \neq 1$ pedig $f(x,0) = 1 \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.

b) folytonos az origóban is, mert $|f(x,y)| \leq y^2 \longrightarrow 0$ ha $(x,y) \longrightarrow (0,0)$.

---

6. Határozzuk meg az alábbi függvény parciális deriváltjait az origóban, amennyiben léteznek!

$\displaystyle f(x,y) = \frac{xe^{2x}}{x+y}$ ha $x \neq y$, $f(0,0) = 1$.

MO. a) $f(x,0) = e^{2x}$ *tetszőleges* x–re, így $f_x(x,0) = 2e^{2x}$, azaz $f_x(0,0) = 2e^0 = 2$.

b) $f(0,y) = 0$ tetsz. $y \neq 0$–ra, de $f(0,0) = 1$, így $f(0,y)$ nem folytonos az $y = 0$–ban, következésképpen nem is deriválható itt, azaz nem létezik az $f_y(0,y)$.
