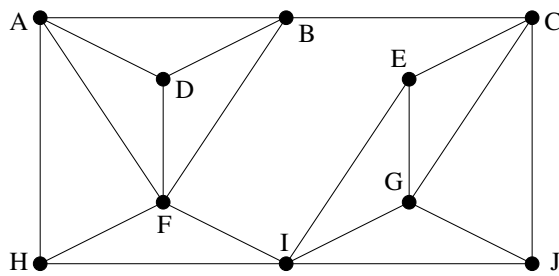


1. Maximálisan hány páronként éldiszjunkt, illetve pontdiszjunkt út adható meg az alábbi pontpárok között az ábrán látható gráfban?

- a) B és I b) A és J c) B és H

2. Milyen k értékekre igaz, hogy az ábrán látható gráf

- a) k -szorosán (pont)összefüggő;
b) k -szorosán élösszefüggő?

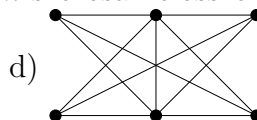


3. Oldjuk meg az 1. feladatot az alábbi pontpárookra is.

- a) B és G b) A és I c) I és C d) B és C

4. Milyen k értékek esetén k -szorosán összefüggőek, illetve k -szorosán élösszefüggőek az alábbi gráfok?

- a) egy 100 pontú út;
b) egy 100 pontú kör;
c) a $K_{10,20}$ teljes páros gráf;



5. Bizonyítsuk be, hogy minden háromszorosán összefüggő gráfban van páros hosszúságú kör.

6. A G egyszerű, n csúcsú gráfban bármely két, nemszomszédos csúcsra teljesül, hogy a fokszámaik összege legalább $n + k - 2$ (ahol $n > k \geq 1$ egész). Bizonyítsuk be, hogy G k -szorosán összefüggő. (ZH, 2011. április 21.)

7. Legyen G egy 100 csúcsú gráf és $x, y \in V(G)$ különböző csúcsok. Tudjuk, hogy bárhogyan választjuk G -ben az $u, v \in V(G)$ csúcsokat úgy, hogy azok x -től és y -től különbözzenek, G -ben van olyan út, amely x -ből y -ba vezet és nem tartalmazza sem u -t, sem v -t. Mutassuk meg, hogy ekkor x -ből y -ba vezet olyan út, amelynek hossza (éleinek száma) legfeljebb 33. (ZH, 2007. március 29.)

8. Húzzunk be 3 élet két diszjunkt 5 csúcsú teljes gráf csúcsai közé úgy, hogy a kapott G gráf egyszerű legyen. Igaz-e, hogy G minden esetben

- a) háromszorosán összefüggő; b) háromszorosán élösszefüggő? (ZH, 2014. április 24.)

9. A 15 pontú G gráf egy 4 pontú, egy 5 pontú és egy 6 pontú körből készült úgy, hogy az 5 pontú kör minden csúcsát összekötöttük (egyetlen éllel) a másik két kör minden csúcsával. Legyen s a 4 pontú kör egyik csúcsa, t pedig a 6 pontú kör egyik csúcsa.

- a) Maximálisan hány páronként csúcsdiszjunkt út adható meg s és t között G -ben?
b) Maximálisan hány páronként éldiszjunkt út adható meg s és t között G -ben? (ZH, 2012. április 19.)

10. Egy 10 csúcsú egyszerű gráfnak 40 éle van. Határozzuk meg a legnagyobb olyan k számot, melyre a gráf biztosan k -szorosán pontösszefüggő. (ZH, 2017. április 20.)

11. Legyenek A, B és C diszjunkt, r elemű halmazok (ahol $r \geq 1$ egész). Készítsünk egy G gráfot úgy, hogy a csúcsainak halmaza legyen $A \cup B \cup C$ és két csúcsot akkor kössünk össze éllel, ha A, B és C közül nem ugyanabba a halmazba esnek. (A G gráf tehát elképzelhető úgy is, mint ha három, „egymás mellé rajzolt” r csúcsú teljes gráfból álló gráf komplementerét vennénk.) Határozzuk meg azt a maximális k számot, amelyre a G gráf k -szorosán összefüggő. (ZH, 2003. április 30.)

12. Bizonyítsuk be, hogy egy 3-reguláris egyszerű gráf akkor és csak akkor k -szorosán élösszefüggő, ha k -szorosán pontösszefüggő.

13. A G gráfnak létezik olyan csúcsa, melyből bármely más csúcsba vezet három páronként éldiszjunkt út. Mutassuk meg, hogy G bármely két csúcsa között van három páronként éldiszjunkt út. (ZH, 2012. május 15.)

14. Legyen G egy hurokélmentes, irányítatlan gráf és $s \in V(G)$ egy rögzített csúcs. Jelölje minden $v \in V(G)$, $v \neq s$ esetén $\lambda(v)$ az s -ből a v -be vezető, páronként éldiszjunkt utak maximális számát. Tegyük fel, hogy valamely $t \in V(G)$ csúcsra $\lambda(t) = 10$, de minden $v \in V(G)$, $v \neq s, t$ esetén $\lambda(v) > 10$. Mutassuk meg, hogy ekkor t foka 10. (ZH, 2013. május 16.)

15. Legyen G egy k -szorosán összefüggő gráf és A és B a G csúcsainak k elemű, diszjunkt részhalmazai. Bizonyítsuk be, hogy létezik G -ben k darab páronként (teljes egészében, nem csak belsőleg) pontdiszjunkt út úgy, hogy mindegyik A és B -beli pontokat köt össze.