

1. feladat (15 pont)

Oldja meg a következő differenciálegyenletet az adott kezdeti feltétellel! (A megoldást explicit alakban adja meg!)

$$y' = \frac{\sqrt{y^2 + 1}}{x^2 - 1}, \quad y(2) = 0$$

2. feladat (14 pont)

Oldja meg az $y' + 2(x + 1)y = e^{-x^2}$ differenciálegyenletet!

3. feladat (15 pont)

Alkalmos helyettesítéssel oldja meg a következő differenciálegyenletet az adott kezdeti feltétellel! (Elég az implicit alak.)

$$y' = (x + 2y)^2, \quad y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

4. feladat (15 pont = 7p + 8p)

$$y' = (y - \operatorname{sh}(x))^3 - 1$$

a) Írja fel az izoklinák egyenletét! Rajzolja fel a fenti differenciálegyenlet $K = 0$, -1 és $+7$ meredekséghez tartozó izoklináját, és ábrázoljon az izoklinákon néhány helyen egy-egy vonalelemet!

b) Van-e a fenti differenciálegyenlet $(x_0, y_0) = (0, 1)$ ponton átmenő megoldásának lokális szélsőértéke ebben a pontban? Ha igen, milyen jellegű?

5. feladat (15 pont)

Határozza meg az $y'''(x) - y''(x) - 2y'(x) = 3x + 5e^x$ differenciálegyenlet általános megoldását!

6. feladat (16 pont = 6p + 6p + 4p)

Konvergensek-e a következő sorok?

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \quad b) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2+3n}{5+3n}\right)^{n^2}, \quad c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^3+7}}$$

7. feladat (10 pont)

Határozza meg a következő rekurzióval definiált sorozat általános elemét!

$$f(n+2) = -f(n+1) + 6f(n), \quad f(0) = -2, \quad f(1) = 21$$