1. feladat (19 pont)

a) Mikor mondjuk, hogy egy numerikus sor feltételesen konvergens?
Mutasson rá példát!

b)

$$a_n = \frac{(n-2)^2}{n^2+4} \cdot \frac{1}{3^n}, \qquad b_n = \frac{2^n + 3^{2n}}{8 + 9^{n+1}}$$

$\lim_{n\to\infty} a_n = ?$, $\lim_{n\to\infty} b_n = ?$

Konvergens-e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, illetve a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor?

a) $\boxed{4}$ D $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ feltételesen konvergens, ha konvergens, de nem abszolút konvergens (tehát $\sum^{\infty} |a_n|$ div.) 2

Pl $\sum^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ feltételesen konvergens, mert konvergens (Leibniz sor), de $\sum^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens. 2

b.) $\boxed{15}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n^2}{n^2}}_{=1} \frac{\left(1-\frac{2}{n}\right)^2}{1+\frac{4}{n^2}} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{(1-0)^2}{1+0} \cdot 0 = 0$$ 4

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n+9^n}{8+9\cdot 9^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{9}\right)^n+1}{8\left(\frac{1}{9}\right)^n+9} = \frac{0+1}{0+9} = \frac{1}{9}$$ 3

$\sum^{\infty} a_n$:

$$0 < a_n = \frac{(n-2)^2}{n^2+4} \frac{1}{3^n} < \frac{n^2}{n^2}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$\sum^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ konv. geometriai sor $(0 < q = \frac{1}{3} < 1)$

$\underset{\text{majoráns kr.}}{\Longrightarrow}$ $\sum^{\infty} a_n$ konvergens 5

$\sum^{\infty} b_n$ divergens, mert $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{9} \neq 0$, tehát nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele. 3

an1v-110120/1.

2. feladat (13 pont)

a) Írja le a valós egyváltozós függvény x_0 pontbeli deriválhatóságára tanult szükséges és elégséges tételt!

b) A állítás: f differenciálható x_0-ban

B állítás: f folytonos x_0-ban

Melyik állítás igaz?

$b1)$ $A \Longrightarrow B$ $\qquad$ $b2)$ $B \Longrightarrow A$

Az igaz állítást bizonyítsa be, a hamisra adjon ellenpéldát!

a.) 5 (T) Szükséges és elégséges tétel deriválhatóságra:

f akkor és csak akkor differenciálható x_0-ban, ha $K_{x_0,\delta} \subset D_f$, $|h| < \delta$-ra:

$$\Delta f = f(x_0+h) - f(x_0) = A \cdot h + \varepsilon(h) \cdot h, \qquad 3$$

ahol A csak x_0-tól függhet, h-tól nem, és $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$. (Itt $A = f'(x_0)$.) 1 1

8 b.) b1) Igaz

(B) A szükséges és elégséges tétel alapján:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + A \cdot h + \varepsilon(h) \cdot h$$

Mindkét oldalon határértéket veszünk. $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$-ra jutunk, vagyis a határérték egyenlő a helyettesítési értékkel, tehát folytonos. ■ 6

b2) Hamis.

Pl. $f(x)=|x|$ folytonos $x_0=0$-ban, de nem differenciálható itt $(f'_+(0)=1 \neq f'_-(0)=-1)$ 2

3. feladat (11 pont)

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh}(2x^2)}{\operatorname{arctg}(3x^2)} = ?$

b) $f(x) = (1+6x^2)^{2x}$, $\qquad f'(x) = ?$

a.) 5

$$\lim_{x\to 0} \frac{sh(2x^2)}{arctg(3x^2)} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\overset{\to 1}{ch\, 2x^2} \cdot 4x}{\underset{\to 1}{\frac{1}{1+(3x^2)^2}} \cdot 6x} = \frac{2}{3}$$

$\frac{0}{0}$ $\qquad$ $= \frac{2}{3}$

b.) 6

$$f(x) = e^{\ln(1+6x^2)^{2x}} = e^{2x\ln(1+6x^2)}$$

$$f'(x) = e^{2x\ln(1+6x^2)} \cdot (2x \cdot \ln(1+6x^2))' =$$

$$= (1+6x^2)^{2x} \cdot \left(2\ln(1+6x^2) + 2x\frac{1}{1+6x^2} \cdot 12x\right)$$

4. feladat (12 pont)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2x-2)}{x^3-x^2}, & \text{ha } x > 1 \\[2ex] \operatorname{arctg} \dfrac{1}{1-x}, & \text{ha } x < 1 \end{cases}$$

a) A jobb és bal oldali határértékek kiszámítása után döntsön, hogy hol és milyen szakadása van a függvénynek!

b) Írja fel $f'(x)$-et, ahol az létezik!

a.) Csak $x=1$-ben van szakadása.

$\boxed{6}$

$$f(1+0) = \lim_{x\to 1+0} \underbrace{\frac{\sin 2(x-1)}{2(x-1)}}_{\to 1} \frac{2}{x^2} = 2 \quad (3)$$

$$f(1-0) = \lim_{x\to 1-0} \operatorname{arctg} \underbrace{\frac{1}{\underbrace{1-x}_{\to +0}}}_{+\infty} = \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

Elsőfajú szakadása van (véges ugrás). (1)

b.)

$\boxed{6}$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2(\cos(2x-2))\cdot(x^3-x^2) - (\sin(2x-2))\cdot(3x^2-2x)}{(x^3-x^2)^2}, & x>1 \quad (3) \\[2ex] \dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{1-x}\right)^2} \dfrac{-1}{(1-x)^2}(-1), & \text{ha } x<1 \quad (3) \end{cases}$$

5. feladat (17 pont)*

a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x^2+4}\,dx = ?$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4}\,dx = ?$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+4}\,dx = ?$

a.)

$\boxed{5}$

$$\frac{1}{4}\int_0^2 \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx = \frac{1}{4} \left.\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}}\right|_0^2 \quad (3) =$$

$$= \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) \; (1) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} \quad (1)$$

b.)

$\boxed{8}$

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} \quad (2)$$

$$1 = A(x+2) + B(x-2)$$

an1o110120/3.

$x=2: \quad 1=4A \Rightarrow A=\frac{1}{4}$

$x=-2: \quad 1=-4B \Rightarrow B=-\frac{1}{4}$ (3)

$I_b = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)dx = \frac{1}{4}\left(\ln|x-2|-\ln|x+2|\right)+C$ (3)

c.) $\boxed{4}$ $\int \frac{1}{x^2+4x+4}\,dx = \int \underbrace{\frac{1}{(x+2)^2}}_{(x+2)^{-2}}\,dx = \frac{(x+2)^{-1}}{-1}+C$

6. feladat (6+4+9=19 pont)*

a) $\int 3x^2 \ln x \; dx = ?$

b) $\int \frac{1}{x} \ln^2 x \; dx = ?$

c) $t=\sqrt[4]{x}$ helyettesítéssel oldja meg az alábbi integrált!

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\; dx \;, \qquad x>0$$

a.) $\boxed{6}$ $I_a = \int 3x^2 \cdot \ln x\, dx = x^3 \ln x - \int \underbrace{x^3 \frac{1}{x}}_{=x^2} dx$ (2)

$u' = 3x^2 \quad v = \ln x$

$u = x^3 \quad v' = \frac{1}{x}$ (2)

$I_a = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3} + C$ (1) (1)

b.) $\boxed{4}$ $\int \frac{1}{x} \ln^2 x \, dx = \frac{\ln^3 x}{3} + C$

$f' \quad f^2$

c.) $t=\sqrt[4]{x} \Rightarrow x=t^4 \Rightarrow dx = 4t^3\,dt$ (2)

$I_c: \int \frac{1}{t^2+t}\, 4t^3\, dt = 4\int \underbrace{\frac{t^2}{t+1}}_{\frac{(t^2-1)+1}{t+1}}\, dt = 4\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt =$ (2)

$= 4\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1|\right) + C$ (4)

$I_c = 4\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \sqrt[4]{x} + \ln\left(\sqrt[4]{x}+1\right)\right) + C$ (1)

an1v110120/4.

7. feladat (9 pont)*

Írja fel a $[3,6]$ intervallumon az

$$f(x) = \begin{cases} 4, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ -2, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

függvény alsó és felső közelítő összegét egyenlő részekre osztás esetén!

Létezik-e $\int_3^6 f(x)\,dx$? Indokoljon!

$$s_{F_n} = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (-2) \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{=\frac{6-3}{n}=\frac{3}{n}} \quad 3$$

F_n: $[a,b]$-t n egyenlő részre osztja (m.h.t. f.f.s)

$$S_{F_n} = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 4 \cdot \frac{b-a}{n} \quad 3$$

$$h = \lim_{n\to\infty} s_{F_n} = \lim_{n\to\infty} (-2) \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n}}_{=b-a=3} = -6$$

$$H = \lim_{n\to\infty} S_{F_n} = \lim_{n\to\infty} 4 \cdot \overbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n}} = 12$$

$$h \neq H \implies \lim_{n\to\infty} \int_3^6 f(x)dx \nexists \quad 3$$

Pótfeladatok (csak az elégséges és közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki):

8. feladat (10 pont)

Adja meg azokat a legbővebb nyílt intervallumokat, melyeken az

$$f(x) = \frac{x-2}{(x+4)^3}$$

szigorúan monoton nő, illetve szigorúan monoton csökken!

Van-e lokális szélsőértéke a függvénynek? Ha igen, milyen jellegű?

$x \neq -4$

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x+4)^3 - (x-2)\cdot 3(x+4)^2}{(x+4)^6} \quad 3 \quad = \frac{x+4-3(x-2)}{(x+4)^4} = \frac{-2(x-5)}{\underbrace{(x+4)^4}_{>0\ (x\neq -4)}} \quad 2$$

	$(-\infty,-4)$	-4	$(-4,5)$	5	$(5,\infty)$
f'	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	szak. hely	$\nearrow$	lok. max	$\searrow$

5

f szig. mon. nő: $(-\infty,-4)$ és $(-4,5)$ intervallumokon

f szig. mon. csökken: $(5,\infty)$-en

f-nek lok. maximuma van $x=5$-ben.

anlv110120/5.

9. feladat (10 pont)*

a) $\int (5x+2)\,e^{-2x}\,dx = ?$ b) $\int_0^\infty (5x+2)\,e^{-2x}\,dx = ?$

a.) $\int (5x+2)\,e^{-2x}\,dx = (5x+2)\frac{e^{-2x}}{-2} + \frac{5}{2}\int e^{-2x}\,dx =$ 2

$\boxed{6}$

$u = 5x+2 \quad v' = e^{-2x}$ 2

$u' = 5 \quad v = \frac{e^{-2x}}{-2}$

$= -\frac{1}{2}(5x+2)e^{-2x} - \frac{5}{4}e^{-2x} + C$ 1 1

b.) $\int_0^\infty (5x+2)\,e^{-2x}\,dx = \lim_{\omega\to\infty} \int_0^\omega (5x+2)\,e^{-2x}\,dx =$ 1

$\boxed{4}$

$= \lim_{\omega\to\infty} \left(-\frac{1}{2}(5x+2)e^{-2x} - \frac{5}{4}e^{-2x}\right)\Big|_0^\omega =$

$= \lim_{\omega\to\infty} \left(\underbrace{-\frac{1}{2}(5\omega+2)e^{-2\omega}} - \frac{5}{4}\underbrace{e^{-2\omega}}_{\to 0} - \left(-1-\frac{5}{4}\right)\right) = \frac{9}{4}$ 3

$\to 0$, mert $\lim_{\omega\to\infty} -\frac{1}{2}\frac{5\omega+2}{e^{2\omega}} \overset{L'H}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{\omega\to\infty} -\frac{1}{2}\frac{5}{2e^{2\omega}} = 0$

an1v-110120/6.