1. (12 pont)
Határozza meg a következő sorozatok határértékét!

6 p. a) $a_n = \sqrt{n^2+3n+2} - \sqrt{n^2+1}$,

6 p. b) $b_n = \left(\dfrac{2n+2}{5n+1}\right)^n$.

1, a,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\sqrt{n^2+3n+2}}_{\alpha_n} - \underbrace{\sqrt{n^2+1}}_{\beta_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n^2-\beta_n^2}{\alpha_n+\beta_n} = \quad (2)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{\sqrt{n^2+3n+2}+\sqrt{n^2+1}} \quad (1) \quad = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\overset{\nearrow 0}{1/n}}{\sqrt{1+\underset{\downarrow 0}{3/n}+\underset{\downarrow 0}{2/n^2}}+\sqrt{1+\underset{\downarrow 0}{1/n^2}}} \quad (2) =$$

$$= \frac{3}{1+1} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}} \quad (1)$$

b,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+2}{5n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\cancel{n}}{5\cancel{n}}\right)^n \cdot \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{5n}}\right)^n \quad (2) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underset{\substack{(1)\downarrow\\0}}{\left(\frac{2}{5}\right)^n} \cdot \underbrace{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \nearrow e}{\left(1+\frac{1/5}{n}\right)^n \searrow e^{1/5}}}_{\text{korlátos}} \quad (2) \quad = 0 \quad (1)$$

mert $\left|\frac{2}{5}\right| < 1$

Vagy:

$$0 < \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{2n}{5n+n}\right)^n < b_n < \left(\frac{2n+2n}{5n}\right)^n = \left(\frac{4}{5}\right)^n \to 0$$

$$\xRightarrow{\text{rendőrelv}} \quad b_n \to 0$$

2p. (a) Írja le a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ numerikus sor összegének definícióját!

6p. (b) Határozza meg a következő sor összegét!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{5^{2n}} = ?$$

2, a,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n, \quad \text{ahol } S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \,. \quad 2$$

b,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{5^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-3)\cdot\frac{(-3)^n}{25^n} \overset{3}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (-3)\cdot\left(\frac{-3}{25}\right)^n \overset{1}{=}$$

$$= -3\cdot\frac{-3}{25}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{3}{25}\right)} \overset{2}{=} -3\cdot\frac{-3}{\cancel{25}}\cdot\frac{\cancel{25}}{28} = \frac{9}{28}$$

3. (13 pont)

(a) Mit értünk a $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ kifejezésen?

2p. Írja le a függvény határértékének definícióját! ($x_0 \in D_f \subset \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$)

Határozza meg a következő határértékeket!

(b)

6p.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{x^2} = ?$$

(c)

5p

$$\lim_{x\to 2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{ch}(x-2)}{(x-2)^2}\right) = ?$$

3, a, $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, ha x_0 a D_f torlódási pontja,

és $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists\, \delta(\varepsilon)$, hogy

$|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, és $x \in D_f$.

3, b,

$\boxed{6}$ $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - (\cos^2 x - \sin^2 x)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{+2 \sin^2 x}{x^2} = \underline{\underline{+2}} \; ①$$

③ ② $\to 1$

Vagy: $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2 = 2$ $\quad \frac{0}{0}$, $\frac{\sin 2x}{2x} \to 1$

3, c,

$\boxed{5}$ $$\lim_{x\to 2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{ch}(x-2)}{(x-2)^2}\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}, \text{ mert}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\operatorname{ch}(x-2)}{(x-2)^2} = \lim_{x\to 2} \underbrace{\operatorname{ch}(x-2)}_{\downarrow\ \operatorname{ch} 0 = 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{(x-2)^2}}_{\downarrow\ +\infty} = \infty, \; ③$$

és $\lim_{u\to\infty} \operatorname{arctg}(u) = \frac{\pi}{2}$ ②

4. (11 pont)

3p. (a) Ismertesse Rolle tételét!

2+6p. (b) Mondja ki, és a Rolle-tétel felhasználásával bizonyítsa be a Lagrange-féle középértéktételt!

4, a, Ha f folytonos $[a,b]$-n $(a, b \in \mathbb{R})$, és

③p f differenciálható (a,b)-n, és $f(a) = f(b)$,

akkor $\exists\, \xi \in (a,b)$, melyre $f'(\xi) = 0$

b, Ha f folytonos $[a,b]$-n, és f differenciálható

(a,b)-n, akkor $\exists\, \xi \in (a,b)$, melyre

② $$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

4, b, (folytatás)

(6) Bizonyítás:

Legyen $g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$

g-re teljesülnek a Rolle tétel feltételei, hiszen g folyt. $[a, b]$-n, g diff.-ható (a, b)-n, és

$$g(b) = g(a) = f(a)$$

Tehát $\exists\, \xi \in (a, b)$:

$$g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

amit bizonyítani akartunk.

5. (16 pont) = 5+5+6 pont

$$f(x) = x^2\, e^{2x-5}$$

Pontozás: f': 2p. f'': 2p. a: +3 b: +5 c: +4

a) Írja fel az $x_0 = 2$ pontbeli érintő egyenes egyenletét!

b) Határozza meg azokat a legbővebb intervallumokat, ahol f monoton növő, illetve csökkenő! Hol vannak f-nek lokális szélsőértékei?

(c) Határozza meg azokat a legbővebb intervallumokat, ahol f konvex, illetve konkáv! Hol vannak f-nek inflexiós pontjai?

5, a, $f(x) = x^2 \cdot e^{2x-5}$; $f(2) = 4 \cdot e^{-1}$ (1)

$$f'(x) = 2x e^{2x-5} + 2x^2 e^{2x-5} = 2x e^{2x-5}(x+1) \quad (2)$$

$$f'(2) = 4 \cdot e^{-1} \cdot 3 = 12 \cdot e^{-1} \quad (1)$$

Érintő egyenlete:

általában: $y_e(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

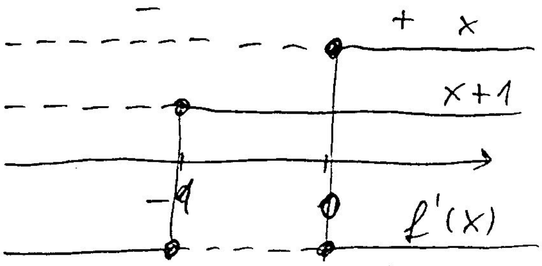
most: $y_e = \frac{12}{e} \cdot (x - 2) + \frac{4}{e}$ (1)

$\boxed{4}$

5, b, $f(x) = x^2 e^{2x-5}$

$$f'(x) = 2x\underbrace{e^{2x-5}}_{\vee \atop 0}(x+1)$$

Zérushelyek: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ ②



x	$x<-1$	-1	$-1<x<0$	0	$0<x$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	lok. max.	↘	lok. min.	↗

③

Monoton nő: $(-\infty, -1]$; $[0, +\infty)$
Monoton csökken: $[-1, 0]$
Lok. max. hely: $x_2 = -1$; lok. min hely: $x_1 = 0$

5, c,

$$f''(x) = 2e^{2x-5}(x+1) + 4xe^{2x-5}(x+1) + 2xe^{2x-5} =$$

$$= 2\underbrace{e^{2x-5}}_{\geq 0}(2x^2 + 4x + 1)$$ ②

Zérushelyek: $x_{3,4} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-8}}{4} = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ ②

x	$x < -1-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-1-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < -1+\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-1+\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-1+\frac{1}{\sqrt{2}} < x$
$f''(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	∪ konvex	infl. pont.	∩ konkáv	infl. pont.	∪ konvex

②

Konvex: $x \in (-\infty, -1-\frac{1}{\sqrt{2}}]$; $x \in [-1+\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$
Konkáv: $x \in [-1-\frac{1}{\sqrt{2}}, -1+\frac{1}{\sqrt{2}}]$
Inflexiós pontok: $-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$; $-1+\frac{1}{\sqrt{2}}$

6. * (16 pont) Számolja ki a következo határozott integrálok értékét!

8p. a) $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{9-(2x+1)^2}}\,dx = ?$$

8p. b) $$\int_0^2 x\,e^{2x}\,dx = ?$$

6, a, $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{9-(2x+1)^2}}\,dx = \lim_{\delta\to 0+0} \int_0^{1-\delta} \frac{1}{\sqrt{9-(2x+1)^2}}\,dx = \quad (1)$$

$$= \lim_{\delta\to 0+0} \frac{1}{3}\int_0^{1-\delta} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x+1}{3}\right)^2}}\,dx \quad (2) \quad = \lim_{\delta\to 0+0} \frac{1}{3}\left[\frac{3}{2}\arcsin\left(\frac{2x+1}{3}\right)\right]_0^{1-\delta} \quad (2) \quad =$$

$$= \lim_{\delta\to 0+0} \frac{1}{2}\left(\arcsin\left(1-\frac{2\delta}{3}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right) \quad (1) \quad = \underline{\underline{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3}}} \quad (1)$$

$$\downarrow \delta \to 0$$

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

6, b, $$\int_0^2 x\,e^{2x}\,dx = \underbrace{\left[x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^2}_{2\cdot\frac{1}{2}e^4 - 0 \quad (1)} - \underbrace{\int_0^2 1\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\,dx}_{\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^2 \quad (2)} = \quad (4)$$

$u = x \qquad v' = e^{2x}$

$u' = 1 \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$= \underline{\underline{e^4 - \frac{1}{4}\left(e^4 - 1\right)}} \quad (1)$$

7. * (12 pont)

Határozza meg a $t = \sqrt{x}$ helyettesítéssel a következő határozatlan integrált! $(x \geq 0)$

$$\int \frac{1}{x + 5\sqrt{x} + 6}\,dx = ?$$

7, $$\int \frac{1}{x+5\sqrt{x}+6} = ? \qquad t = \sqrt{x}\,; \quad \left(dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2t}\,dx\right)$$

$$x = t^2\,; \quad dx = 2t\,dt \quad (2)$$

$$\int \frac{2t\,dt}{t^2+5t+6} \quad (2) \quad = \int \frac{2t\,dt}{(t+2)(t+3)} = \int\left(\frac{A}{t+2} + \frac{B}{t+3}\right)dt \quad (1)$$

$$t^2+5t+6 = (t+2)(t+3) \quad (1)$$

7/

$$\frac{A}{t+2} + \frac{B}{t+3} = \frac{2t}{(t+2)(t+3)}$$

$A(t+3) + B(t+2) = 2t$; $t=-3$: $-B=-6$

$\underline{B=6}$

$t=-2$: $\underline{A=-4}$ } ③

$$\int \frac{-4}{t+2}\,dt + \int \frac{6}{t+3}\,dt = -4\ln(t+2) + 6\ln(t+3) + C \quad (t>0)$$ ②

Visszahelyettesítve:

$$\int \frac{1}{x+5\sqrt{x}+6}\,dx = \underline{\underline{-4\ln(\sqrt{x}+2) + 6\ln(\sqrt{x}+3) + C}}$$ ①

8. * (12 pont)

3p. (a) Írja le az integrálszámítás II. alaptételét!
(A tétel az integrálfüggvény tulajdonságairól szól.)

9p. (b) Határozza meg a következő határértéket!

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sh} t \cdot \operatorname{tg} t \; dt}{x^2} = ?$$

8, a, Ha $f \in R[a,b]$, és $F(x) = \int_{t=a}^{x} f(x)\,dx$ $(x\in[a,b])$

③ akkor

i, $F(x)$ folytonos $[a,b]$-n

ii, Ha még f ~~differenciálható~~ folytonos $x_0 \in (a,b)$-ben,

akkor F diff.-ható x_0-ban, és

$F'(x_0) = f(x_0)$

8, b,

integrandus folyt. ①

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sh} t \cdot \operatorname{tg} t \; dt}{x^2} \overset{L'H.①}{\underset{\frac{0}{0}①}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{tg} x}{2x} ② =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\underset{\downarrow \atop 0 ①}{\operatorname{sh} x} \cdot \frac{1}{2} \cdot \underset{\downarrow \atop 1 ①}{\frac{\sin x}{x}} \cdot \underset{\downarrow \atop 1 ①}{\frac{1}{\cos x}} \right) = \underline{\underline{0}} \quad ①$$

$\boxed{-7+}$

/

Pótfeladat (csak az elégséges vizsgához javítjuk ki):

9. (10 pont)

5 p. (a)

$$\frac{d}{dx}\left((1+x^2)^{\sin x}\right) = ?$$

5 p. (b) Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n}{2n^5+7}$ numerikus sor?

9, a,

$$\frac{d}{dx}\left((1+x^2)^{\sin x}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{\sin x \cdot \ln(1+x^2)}\right) = \text{②}$$

$$= e^{\sin x \cdot \ln(x^2+1)} \cdot \left(\sin x \cdot \ln(1+x^2)\right)' = \text{①}$$

$$= \underline{\underline{(1+x^2)^{\sin x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln(1+x^2) + \frac{2x \sin x}{1+x^2}\right)}} \text{②}$$

9, b,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n^2+3n}{2n^5+7}}_{a_n > 0} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n^2}{2n^5} \text{②} = \frac{4}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^5} \text{①} =$$

$$= \frac{4}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty \quad \text{Konvergens,}$$

3 > 1 ①

a majoráns krit. ① alapján!

[- 8 -]