



2019 tavasz

# Bevezetés a számításelméletbe 2

## Kidolgozott vizsgatételek

Összeállította: Csia Kitti



## Tartalomjegyzék

1. tétel: Kombinatorika, binomiális tétel .....	2
2. tétel: Gráfelmélet alapja .....	6
3. tétel: Rajzolhatóság, Euler-formula.....	11
4. tétel: Euler– és Hamilton-körök .....	16
5. tétel: Gráfok színezése, páros gráf .....	20
6. tétel: Gallai, Tutte tétele .....	24
7. tétel: Javítóutak, Kőnig.....	28
8. tétel: Vizing, Kőnig élkromatikus szám.....	31
9. tétel: Hálózati folyam, vágás .....	34
10. tétel: Menger pontpárok, élösszefüggés .....	41
11. tétel: BFS, Kruskal algoritmus.....	46
12. tétel: Dijkstra, Bellman-Ford algoritmus .....	50
13. tétel: Flyod legrövidebb út, aciklikus gráf .....	52
14. tétel: DFS algoritmus, erdő .....	55

*Felhasznált irodalom:*

**Fleiner Tamás - A számítástudomány alapjai**

**Hegy Zsolt - Bevezetés a számításméletbe 2. tételsor**

**Haraszin Péter – Bevezetés a számításméletbe 2013/14 őszi vizsgatételek**

Talált **HIBA** esetén jelzés: [nospatium@gmail.com](mailto:nospatium@gmail.com)



BACK

# 1. tétel:

## Kombinatorika, binomiális tétel

### Tételcím

Kombinatorika leszámolás alapfeladatok: ismétlés nélküli és ismétléses permutáció, variáció és kombináció; példák. Összefüggések a binomiális együtthatók között, Pascal-háromszög. Binomiális tétel.

### 1. Faktoriális

- Definíció
  - az  $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$  szorzatot  $n$  faktoriálisának nevezzük
  - definíció szerint:  $0! = 1$
- Jelölés
  - $n!$

### 2. Ismétlés nélküli permutáció

- Definíció
  - $n$  elem összes lehetséges sorrendjének a száma  $n!$
  - permutáció = hozzárendelés
    - $\{1 \dots N\} \rightarrow \{1 \dots N\}$
- Példa
  - 24 gyerek, hányféle sorrendben kaphatják meg a dolgozatukat?
    - $24 \cdot 23 \cdot \dots \cdot 1 = 24!$
  - Egy hídon 3 ór áll, mindegyik a hozzátartozó jelszót kéri, hányféleképpen adhatjuk meg?
    - $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$

**[N1] megjegyzést írt:** Egy elem nem szerepelhet többször.



### 3. Ismétléses permutáció

○ Definíció

- $k_1$  darab első típusú elem, ...,  $k_n$  darab  $n$ -edik típusú elem lehetséges sorba rendezésének a száma  $k_1 + \dots + k_n$

$$\frac{(k_1 + \dots + k_n)!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_n!} = \frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_n!}$$

○ Példa

- Van 3 Sopronim, 4 Dreherem, 5 Heinekenem, hányféleképpen tudom meginni?

$$\frac{12!}{3! \cdot 4! \cdot 5!} = 27720$$

### 4. Ismétlés nélküli variáció

○ Definíció

- $n$ -ből  $k$  elem összes lehetséges sorrendben való kiválasztása az  $n$  elem  $k$ -ad osztályú variációja
- ezek száma:

$$n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

- ha  $k = n$ , akkor ismétlés nélküli permutáció

○ Példa

- Versenyen 50 futó indult, hányféleképpen jöhet ki a 3 dobogós?

$$\frac{50!}{47!} = 50 \cdot 49 \cdot 48 = 117\,600$$

### 5. Ismétléses variáció

○ Definíció

- $n$  elemből  $k$  tagú sorozatok kiválasztása
- ezeknek a száma:  $n^k$

[N2] megjegyzést írt: Egy elem többször ismétlődhet.

[N3] megjegyzést írt: Tehát itt nem az összes elemet rakjuk sorba, hanem csak valahányat az  $n$ -ből.

[N4] megjegyzést írt:  $n$  elemből  $k$ -t rendezünk sorba.



- Példa
  - Hányféle 4-jegyű PIN-kód generálható?

$$n = 10$$

$$k = 4$$

$$n^k = 10^4 = 10\,000$$

## 6. Ismétlés nélküli kombináció

- Definíció
  - $n$  elemű halmaz  $k$  elemű részhalmazainak a száma
  - sorrend nem számít

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

- Példa
  - 24 gyerek van, ebből 5 mehet versenyre, hányféle lehetőség van?

$$n = 24$$

$$k = 5$$

$$\binom{n}{k} = \binom{24}{5} = \frac{24!}{19! \cdot 5!} = 42\,504$$

## 7. Ismétléses kombináció

- Definíció
  - $n$  elemből  $k$  kiválasztása
  - sorrend nem számít
  - számuk:

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{n+k-1}{(n-1)! \cdot k!}$$

- Példa
  - Van 10-féle fagyi, 4 gombócot eszem, hányféle lehetőség?

$$n = 10$$

$$k = 4$$

$$\frac{13!}{(9! \cdot 4!)} = 715$$

[N5] megjegyzést írt: Van  $n$  db elemünk, ki szeretnék választani belőle  $k$  db elemet.

[N6] megjegyzést írt: Binomiális együttható.

[N7] megjegyzést írt:  
ismétlés nélküli variáció  
ismétléses permutáció  $k$ -ra



### 8. Binomiális tétel

o **Tétel**

- tetszőleges valós  $x, y$ -ra és nemnegatív egész  $n$ -re:

$$(x + y)^n = \binom{n}{0} \cdot x^n + \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} \cdot y + \dots + \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k + \dots + \binom{n}{n} \cdot y^n$$

o **Következmény:**

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots \pm \binom{n}{n} = 0$$

[N8] megjegyzést írt: Oszcillál. Ez olyan eset, amikor  $a = 1, b = -1$ .

### 9. Pascal háromszög

o **Definíció**

- binomiális együtthatók háromszögben
- $\forall$  sorának a sorösszege  $2^{i-1}$
- $\forall$  sor összege  $2x$  az előzőnek

[N9] megjegyzést írt: Minden...

$$\begin{array}{cccc}
 & & \binom{0}{0} & & \\
 & & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & \\
 & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
 & & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
 & & & \vdots & & \\
 & & & & & \vdots
 \end{array}$$

### 10. Binomiális összeg

o **Tétel**

- $\forall n$  nemnegatív egész számra:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$



BACK

## 2. tétel: Gráfelmélet alapja

### Tételcím

Gráfelméleti alapfogalmak: gráf, egyszerű gráf, komplementer gráf, izomorfia, részgráf, feszített részgráf, élsorozat, út, kör, összefüggő gráf, (összefüggő) komponens. Fa fogalma, fák egyszerű tulajdonságai. Feszítőfa fogalma, annak létezése.

### 1. Gráf

- Definíció
  - egy gráf rendezett pár,  $G = (V, E)$ 
    - $V$ : nem üres halmaz
      - ♦ elemei: pontok/csúcsok
      - ♦ csúcsok száma:  $v(G)$
      - ♦ csúcshalmaz jelölése:  $V(G)$
    - $E$ :  $V$ -ből képezhető párok egy halmaza
      - ♦ elemei: élek
      - ♦ élek száma:  $e(G)$
      - ♦ élhalmaz jelölése:  $E(G)$

### 2. Hurok él, többszörös/párhuzamos él

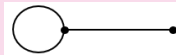
- Definíció
  - **hurokél**: ha  $e \in E$  a  $v_1, v_2$  párnak felel meg, melynek két végpontja ugyanaz a pont (tehát  $v_1 = v_2$ )
  - **párhuzamos él**: ha két különböző hurokél végpontjai azonosak

### 3. Egyszerű gráf

- Definíció
  - azokat a gráfokat, melyek **nem** tartalmaznak hurok és párhuzamos éleket

#### [N10] megjegyzést írt:

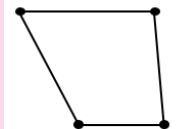
A lilával szedett, dőlt szövegek általában egy addig elő nem fordult fontos szó, definíció vagy tétel neve, melynek ismerete fontos.



#### [N11] megjegyzést írt:



#### [N12] megjegyzést írt:



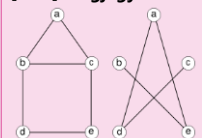


#### 4. Komplementer gráf

o Definíció

- egy  $G$  gráf **komplementerén** azt a  $\bar{G}$  gráfot értjük, melyet akkor kapunk, ha a  $G$ -t a  $K_{v(G)}$  részgráfjának tekintjük
  - $\bar{G}$ -ben azok az élek vannak behúzva, amelyek  $G$ -ben nincsenek

[N13] megjegyzést írt:

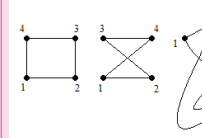


#### 5. Izomorfia

o Definíció

- $G = (V, E)$  és  $G' = (V', E')$  gráfok izomorfak, ha van olyan egyértelmű megfeleltetés (**bijekció**), hogy  $G$ -ben pontosan akkor szomszédos két pont, ha  $G'$ -ben a nekik megfelelő pontok szomszédosak és a szomszédos pontpárok esetén ugyanannyi él fut közöttük

[N14] megjegyzést írt:

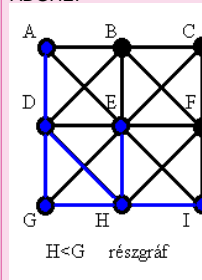


#### 6. Részgráf

o Definíció

- a  $G' = (V', E')$  gráf a  $G = (V, E)$  részgráfja, ha a  $V' \subseteq V, E' \subseteq E$
- egy pont és egy él pontosan akkor illeszkedik egymásra  $G'$ -ben, ha a  $G$ -ben is illeszkednek

[N15] megjegyzést írt: ABCDEFGHI részgráfja az ADGHEI

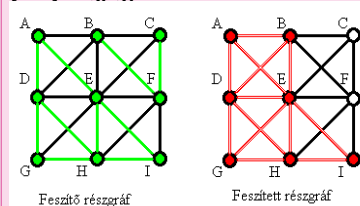


#### 7. Feszítő részgráf

o Definíció

- a  $G' = (V', E')$  gráf a  $G = (V, E)$  feszítő részgráfja, ha a  $G'$  részgráfja  $G$ -nek és  $V' = V$ 
  - tehát  $G'$ -ben szerepel  $G$  összes csúcsa, de nem az összes éle

[N16] megjegyzést írt:



#### 8. Feszített részgráf

o Definíció

- ha  $E'$  pontosan azokból az  $E$ -beli élekből áll, amelyeknek két végpontja  $V'$ -ben van, és az  $E'$  az összes ilyen élet tartalmazza, akkor  $G'$  a  $G$  gráf  $V'$  által feszített részgráfja
  - tehát  $G$ -ből kedvünkre kiválasztunk néhány csúcsot, viszont ezek között az eredeti  $G$ -hez hasonlóan behúzzuk az összes élet, amely az eredeti  $G$ -ben is benne volt





## 9. Élsorozat, út, kör

- Definíció
  - egy  $(v_0, e_1, v_1, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k)$  sorozat **élsorozat/út**, ha  $e_i$  a  $v_{i-1}$ -et és  $v_i$ -t összekötő él
    - akkor lesz ebből **kör**, ha visszatér a kiindulópontba
  - **kör**: ha  $v_0 = v_k$ , akkor az élsorozat zárt
    - egy kör páros, ha a hossza páros, és nincs benne páratlan kör

## 10. Összefüggőség

- Definíció
  - $G$  gráf összefüggő, ha bármely két csúcson között  $\exists$  élsorozat vagy út
  - egy gráf összefüggő, ha  $e \geq n - 1$ 
    - ugye a fának  $e = n - 1$  élük van, így, ha annál kevesebb éle van egy gráfnak, akkor az már nem összefüggő

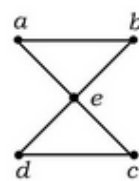
## 11. Komponens

- Definíció
  - $G$  gráf komponense olyan  $H$  feszített részgráfja  $G$ -nek, hogy teljesül rá az, hogy  $H$  összefüggő, és bárhogya egy további csúcsot hozzáteszünk, már nem lesz összefüggő

## 12. Fa, erdő

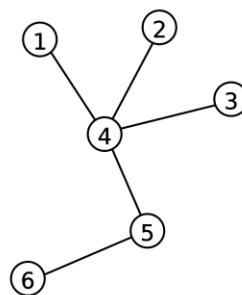
- Definíció
  - ,  $\forall$  **fa gráf**:
    - összefüggő
    - körmentes
    - páros gráf, mert nem tartalmaz páratlan kört, és megadható jó 2 színnel való színezés
    - síkbarjázolhatóak, mert nem tartalmaznak  $K_5$ -tel vagy  $K_{3,3}$ -mal topologikusan izomorf részgráfot
  - **erdő**: ha a gráf nem összefüggő (több fából áll)

[N17] megjegyzést írt:  
Két páratlan (hármás) kört tartalmaz

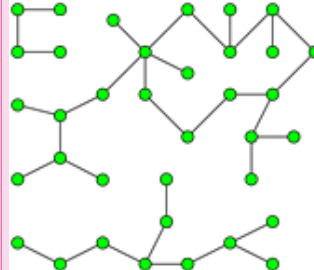


[N18] megjegyzést írt: Létezik...

[N19] megjegyzést írt:



[N20] megjegyzést írt:





### 13. Fa fokszáma

- **Tétel**
  - $\forall$  legalább 2 pontú fában van legalább 2 egy foksámú pont
- **Bizonyítás**
  - $!(v_1, \dots, v_k)$  a leghosszabb út a fában
  - ekkor beláthatjuk, hogy  $v_1, v_k$  végpontok egyfokúak lesznek
  - TFH.  $v_k$  nem egy foksámú
  - az út többi pontjába nem vezethet, mivel a fa körmentes
  - új pontba se vezethet  $\rightarrow$  hosszabb utat kapnánk, így ellentmondás lenne

[N21] megjegyzést írt: Legyen...

[N22] megjegyzést írt: Tegyük fel, hogy...

### 14. Fa éleinek száma

- **Tétel**
  - $n$  pontú fa éleinek száma  $n - 1$
- **Bizonyítás**
  - (Teljes indukcióval bizonyítjuk)
  - $n = 2$ -re triviálisan teljesül
  - TFH. állítás igaz  $\forall n < n_0$ -ra
  - Fa foksáma tétel szerint  $\forall n_0$  fában van egy foksámú pont, ezt hagyjuk el
  - ha elhagyjuk ezt a pontot és a hozzá tartozó élet, akkor mivel a maradék  $n_0 - 1$  fára már igaz, így  $n_0$  pontú fának  $n_0 - 1$  éle van

### 15. Feszítőfa

- **Definíció**
  - $F$  gráf a  $G$  gráf feszítőfája, ha  $F$  fa, és részgráfja  $G$ -nek
    - tehát egy gráf feszítőfája a gráf  $\forall$  csúcsát tartalmazó fa részgráf
    - $\forall$  gráfnak van feszítő erdője
      - ♦ **feszítő erdő**: feszítőfa komponensekből álló részgráf



## 16. Feszítőfa létezése

- **Tétel**
  - $\forall$  összefüggő  $G$  gráf tartalmaz feszítőfát
- **Bizonyítás**
  - ha  $G$ -ben van kör, akkor hagyjuk el a kör egy tetszőleges élét
  - ha még mindig van, akkor megint hagyjunk el, amíg körmentes nem lesz
  - az összefüggőség nem sérül, mivel a körök  $1 - 1$  élét hagyjuk el
  - pontot/csúcsot nem hagyunk el, tehát megkaptuk  $G$  gráf tartalmaz feszítőfáját



BACK

## 3. tétel: Rajzolhatóság, Euler-formula

### Tételcím

Síkbarajzolt és síkbarajzolható gráf fogalma. A síkbarajzolhatóság kapcsolata a gömbre rajzolhatósággal, Euler-tétel, becslés az élek számára egyszerű és egyszerű háromszögmentes gráfban. Kuratowski tétele (bizonyítás csak a könnyebbik irányban). Síkgráf duálisának fogalma.

### 1. Síkbarajzolhatóság

#### o Definíció

- $G$  síkbarajzolható gráf, ha lerajzolható úgy (a síkban), hogy az élei a csúcsokon kívül sehol máshol ne keresszezzék egymást

- Síkbarajzolhatóság vizsgálat lépései:

- ♦ Van-e benne 5 db legalább 4 fokú csúcs? ( $K_5$  lehet)
- ♦ Van-e benne 6 db legalább 3 fokú csúcs? ( $K_{3,3}$  lehet)
- ♦ Ha mind a kettőre nem a válasz, akkor nagy valószínűséggel síkba lehet rajzolni, és ezt be is kell bizonyítani azzal, hogy megpróbáljuk síkba rajzolni
- ♦ Ha volt igen válasz próbáld meg síkba rajzolni
  - » ha sikerült, akkor megvagy, mert síkba tudtad rajzolni
  - » ha nem, akkor keresd meg, hogy lehet-e benne  $K_{3,3}$ , ha nem, akkor  $K_5$  lehet benne
  - » ( $K_5$  nehezebb találni, érdemes mindig  $K_{3,3}$  kezdeni)

### 2. Tartomány

#### o Definíció

- $G$  síkbarajzolt gráf területei, melyeket közrefognak az élek
- csak síkbarajzolt gráfoknál



### 3. Gömbre rajzolhatóság

#### o Tétel

- $G$  gráf pontosan akkor síkbarajzolható, ha gömbre rajzolható

#### o Bizonyítás.

- síkban levő gráf leképezhető gömbfelületre
- gömbfelület valamelyik pontjával a síkra helyezzük → *déli pólus*
- ezzel szemben: *északi pólus*
  - ebből egyeneseket húzunk a gráf pontjaiba
  - az itteni vonalak metszéspontja a kívánt vetítés → *sztereografikus projekció*
- visszafele is lehet

### 4. Euler-formula (Euler-féle poliéder tétel)

#### o Tétel

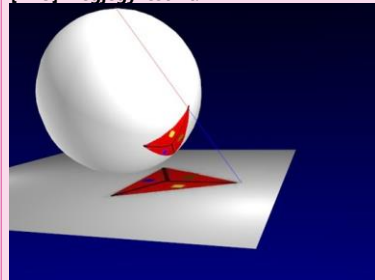
- ha egy összefüggő síkbeli gráfnak
  - csúcsa:  $n$
  - éle:  $e$
  - tartománya:  $t$  (*külső tartomány is*)
- eleget tesz az Euler-formulának:

$$n + t = e + 2$$

#### o Bizonyítás.

- $C$ : egy gráf köre
- $a$ : egy gráf éle
- a  $C$  kör a síkot 2 részre osztja
  - egyéb élek további tartományokra oszthatja
  - de mindkét részben van olyan tartomány, amelynek  $a$  a határa
- $a$ -t elhagyva a tartományok egyesülnek, számuk eggyel csökken, csúcsok száma nem változik
- addig folytatjuk, amíg nem marad kör → csak feszítőfa marad

[N23] megjegyzést írt:





- állítás belátása erre triviális
  - $t = 1$
  - $e = n - 1$

### 5. Becslés az élek számára (1)

#### ○ Tétel

- ha  $G$  egyszerű, síkbarajzolható gráf és pontjainak száma legalább 3, akkor:

$$e \leq 3n - 6$$

#### ○ Bizonyítás

- vegyük  $G$  tetszőleges síkbarajzolását
- $c_1, \dots, c_t$  egyes tartományokat határoló élek
- mivel egyszerű, így  $\forall$  tartomány legalább 3 él határolja,  $c_i \geq 3$
- egy élhez legfeljebb 2 tartomány tartozik  $\rightarrow \leq 2e$

$$3t \leq c_1 + \dots + c_t = \sum_{i=1}^t c_i \leq 2e$$

- Euler – formulát felhasználva:

$$(e - n + 2) \leq 2e$$

### 6. Becslés az élek számára (2)

#### ○ Tétel

- ha  $G$  egyszerű, síkbarajzolható gráf és  $\forall$  köre legalább 4 hosszú, valamit legalább 4 pontja van, akkor:

$$e \leq 2n - 4$$

#### ○ Bizonyítás

- $\forall$  tartományt legalább 4 él határol
- előző bizonyítás gondolatmenete alapján:  $4t \leq 2e$

[N24] megjegyzést írt: Átrendezve megkapjuk az eredményt.



## 7. Becslés minimális fokszámra

### o Tétel

- ha  $G$  egyszerű, síkbarajzolható gráf, akkor a minimális fokszám legfeljebb 5:

$$\delta = \min d(v) \leq 5$$

### o Bizonyítás

- TFH. gráf pontjainak a száma legalább 3
- TFH.  $\delta \geq 6$
- a fokszámok összege = az élszámok  $2x, 6n < 2e$
- élszám-becslés alapján azonban  $2e \leq 6n - 12 \rightarrow$  ellentmondás

## 8. Kuratowski-gráfok

### o Tétel

- ha a gráf  $K_{3,3}$  vagy  $K_5$ , akkor NEM síkbarajzolható

## 9. Topologikus izomorfia (homeomorfia)

### o Definíció

- $G, H$  gráfok topologikusan izomorfak, ha az alábbi transzformációk izomorf gráfokba transzformálhatóak
  - ha egy él helyett 2-fokú csúcsot helyettesítünk
  - 2-fokú csúcsot egy éllel

## 10. Kuratowski-tétel

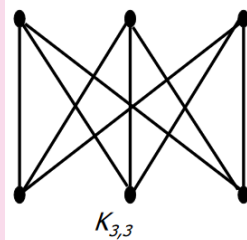
### o Tétel

- egy gráf akkor és csak akkor síkbarajzolható, ha nem tartalmaz  $K_{3,3}$ -mal vagy  $K_5$ -tel topologikusan izomorf részgráfot

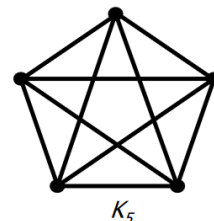
### o Bizonyítás

- ha  $K_5$  síkbarajzolható volna, akkor teljesülne rá az élbecslés tétel
- $K_5$  pontjainak száma 5, éleinek száma 10
  - $10 \text{ nem } \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9 \rightarrow K_5 \text{ nem síkbarajzolható}$
- $K_{3,3} \forall$  körének hossza legalább 4
- ha volna 3 hosszú kör, legalább 2 „kút” vagy „ház” között kellene annak mennie, ami nem lehetséges

[N25] megjegyzést írt:

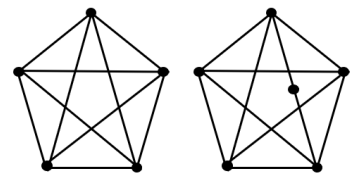


[N26] megjegyzést írt:



[N27] megjegyzést írt:

A jobb oldali gráf tartalmaz  $K_5$ -tel topologikusan izomorf részgráfot, ezért a Kuratowski-tétel (és annak „könnyű iránya”) szerint NEM síkbarajzolható.



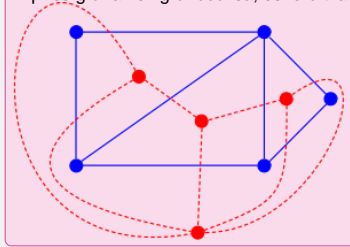


- 2. élbecslés alkalmazható
- $K_{3,3}$  pontjainak a száma 6, éleinek száma 9
  - $9 \text{ nem } \leq 2 \cdot 6 - 4 = 8 \rightarrow K_{3,3}$  nem síkbarajzolható

## 11. Síkgráf duálisa

- Definíció
  - $G$  tartományaihoz rendelünk pontokat ( $G^*$  pontjai)
  - $G^*$ -ban akkor kötünk össze két pontot, ha a megfelelő  $G$ -beli tartományoknak van közös határvonala
  - duális gráfban tehát  $n^* = t$ ,  $t^* = n$  és  $e^* = e$
  - párhuzamos élekből  $\rightarrow$  *soros él*
  - hurokél  $\rightarrow$  *elvágó él*

[N28] megjegyzést írt:  
A piros gráf a kék gráf duálisa, és fordítva.







BACK

## 4. tétel: Euler- és Hamilton-körök

### Tételcím

Hamilton-körök és -utak. Szükséges feltétel Hamilton-kör/út létezésére. Elégséges feltételek: Dirac és Ore tétele. Euler-körök és -utak, ezek létezésének szükséges és elégséges feltétele.

### 1. Euler-kör/körséta és -út/séta

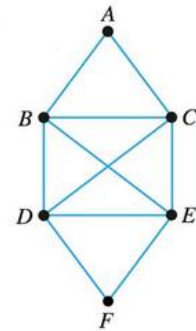
- Definíció
  - **Euler-kör/körséta:**  $G$  gráfban egy zárt élsorozat, ha az élsorozat pontosan egyszer tartalmazza  $G$  összes élét
  - **Euler-út/séta:** ha az élsorozat nem zárt

### 2. Euler-kör/körséta létezése

- Tétel
  - $G$  összefüggő gráfban akkor és csak akkor  $\exists$  Euler-kör, ha  $G$   $\forall$  pontjának fokszáma páros
- Bizonyítás
  - (szükségesség bizonyítása)
  - lássuk be, hogy van a gráfban Euler-kör, akkor  $\forall$  pont foka páros
  - elindulunk a gráf tetszőleges pontjából és körbejárjuk Euler-kör mentén
  - $\forall$  pontba ugyanannyiszor mentünk be, mint ahányszor ki
  - ki-bemenések száma a pont fokszáma  $\rightarrow$  biztosan páros
  - (elégségesség bizonyítása)
  - $\forall v \in V$  a gráf egy tetszőleges pontja
  - $P$  egy  $v$ -ből induló élisémélés nélküli séta, addig megy, ameddig el nem akad
  - mivel  $\forall$  pont foka páros ezért:
    - $P$   $v$ -ben akad el
    - $v$ -nek  $\forall$  élét használja

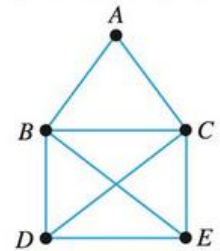
[N29] megjegyzést írt:

D, E, B, C, A, B, D, C, E, F, D

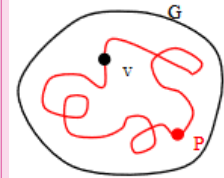


[N30] megjegyzést írt:

D, E, B, C, A, B, D, C, E



[N31] megjegyzést írt:





- $\forall$  csúcsból páros sok éllet használt

### Euler-út/séta létezése

- **Tétel**
  - $G$  összefüggő gráfban akkor és csak akkor  $\exists$  Euler-út, ha  $G$  páratlan fokszámú pontok száma 0 vagy 2
- **Bizonyítás**
  - (szükségesség bizonyítása)
  - az előbbihez hasonlóan belátható, hogyha  $G$ -ben  $\exists$  Euler-út, akkor az Euler-út két végpontjának a kivételével  $\forall$  pont foka páros
  - (elégesség bizonyítása)
  - ha  $\forall$  pont foka páros  $\rightarrow$  Euler-kör ✓
  - ha van két páratlan fokú pont:  $u, v$
  - húzunk élet közéjük
  - így  $\forall$  pont foka páros lesz  $\rightarrow$  lesz Euler-kör
  - ha elhagyjuk  $u, v$ -t, akkor Euler-út lesz

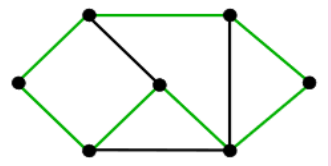
### 3. Hamilton-kör/körséta és -út/séta

- **Definíció**
  - **Hamilton-kör/körséta:**  $G$  gráfban egy  $H$  kör, ha  $G \forall$  pontját pontosan egyszer tartalmazza, és ugyanoda tér vissza
  - **Hamilton-út/séta:** egy út, ha  $G \forall$  pontját pontosan egyszer tartalmazza

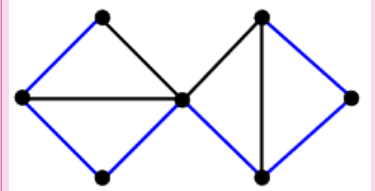
### 4. Szükséges feltétel a H-kör/körséta létezéséhez

- **Tétel**
  - ha  $G$  gráfban  $\exists k$  olyan pont, melyeket elhagyva a gráf több mint  $k$  komponensre esik  $\rightarrow$  ekkor nem  $\exists$  a gráfban H-kör
  - ha több mint  $k + 1$  komponensre esik, akkor nem  $\exists$  a gráfban H-út se
- **Bizonyítás**
  - TFI van a gráfban H-kör
  - $!(v_1, \dots, v_n)$  és  $!(v_{i_1}, \dots, v_{i_k})$  az a  $k$  pont, amelyet elhagyva a gráf több mint  $k$  komponensre esik

[N32] megjegyzést írt:



[N33] megjegyzést írt:



[N34] megjegyzést írt:

Mikor van egy gráfban Hamilton-kör vagy -út?  
Erre nincs egyszerű válasz. Valószínűleg nincs gyorsan ellenőrizhető feltétel, amely eldöntené, hogy egy gráfban van-e H-kör vagy -út. Ha mégis lenne ilyen eljárás, akkor a ma elterjed titkosítási eljárások mind haszontalanná válnának. Gyors Hamilton-körkereséssel gyorsan fel lehetne őket törni.

[N35] megjegyzést írt: Hamilton-kör.

[N36] megjegyzést írt: Tegyük fel indirekten, hogy...



- az elhagyott pontok közötti „ívek” biztosan összefüggő komponenseket alkotnak
- pl.  $(v_{i_1+1}, v_{i_2+2}, \dots, v_{i_k-1})$  is összefüggő lesz, hiszen két szomszédos pontja között az eredeti H-kör éle fut
- épp  $k$  ilyen ívet kapunk, ezért **nem lehet több** komponens  $k$ -nál
- ugyanezt bizonyítjuk újra is
  - ha egy H-útból elhagyunk  $k$  pontot, legfeljebb  $k + 1$  komponens keletkezhet

**[N37] megjegyzést írt:** Kevesebb lehet, mivel különböző ívek közt futhatnak élek.

## 5. Elégséges feltétel – Ore tétel

### o **Tétel**

- ha az  $n$  pontú  $G$  gráfban  $\forall$  olyan  $x, y \in V(G)$  pontpárra, amelyre  $x, y \notin E(G)$  (nem szomszédosak), teljesül az, hogy  $d(x) + d(y) \geq n$ , akkor a gráfban van H-kör
  - *tehát úgy kérdezzük rá erre egy feladatban, hogy bármely két összeköthetetlen csúcs fokszámösszege nagyobb vagy egyenlő, mint a csúcsok száma?*

### o **Bizonyítás**

- TFI. a gráf kielégíti a feltételt, de nincs benne H-kör
- vegyük hozzá éleket úgy, hogy ne legyen kör
- addig csináljuk, amíg már nem tudunk úgy hozzávenni, hogy ne lenne H-kör benne
- így kapott  $G'$  gráfra továbbra is teljesül a feltétel, hiszen az új élek behúzásával „rossz pontpárt” nem lehet létrehozni
- biztosan van két olyan pont, hogy  $x, y \notin E(G')$
- ennek a behúzásával már lesz  $G' + x, y$ -ban H-kör  $\rightarrow G$ -ben van H-út
- ! ez az út  $P = z_1, \dots, z_n$ , ahol  $z_1 = x$  és  $z_n = y$
- ha  $x$  szomszédos a  $P$  út valamely  $z_k$  pontjával, akkor  $y$  nem lehet összekötve  $z_{k-1}$ -gyel, mert akkor az egy H-kört adna
- így  $y$  nem lehet összekötve legalább  $d(x)$  ponttal, ezért

$$d(y) \leq n - 1 - d(x)$$

- ez viszont ellentmondás, mert  $x, y \notin E(G)$



## 6. Elégséges feltétel – Dirac tétel

### o Tétel

- ha egy  $n$  pontú  $G$  egyszerű gráfban  $\forall$  pont foka legalább  $\frac{n}{2}$ , akkor a gráfban  $\exists$  H-kör

### o Bizonyítás

- az előző tételből következik, hiszen, ha  $\forall$  pont foka legalább  $\frac{n}{2}$ , akkor teljesül az Ore-tétel feltétele, mivel bármely pontpárra:

$$d(x) + d(y) \geq n$$



BACK

## 5. tétel: Gráfok színezése, páros gráf

### Tételcím

Gráfok színezése,  $\chi(G)$  fogalma és viszonya  $\omega(G)$ -hez. Mycielski konstrukciója. Mohó színezés.  $\chi(G)$  viszonya  $\Delta(G)$ -hez. Intervallumgráfok, algoritmus ezek optimális színezésére. Páros gráf fogalma, kapcsolata a páratlan körökkel.

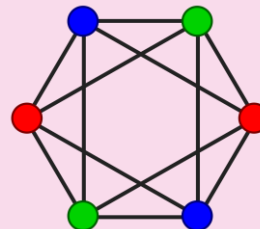
### 1. Gráfok színezése

- Definíció
  - egy  $G$  hurokmentes gráf  $k$  színnel színezhető
  - ha  $\forall$  csúcsot ki lehet színezni  $k$  szín felhasználásával úgy, hogy bármely két szomszédos csúcs színe különböző legyen
  - $G$  **kromatikus száma**  $\chi(G) = k$ , ha  $k$  színnel meg lehet színezni  $G$ -t, de  $k - 1$ -gyel már nem
  - egy ilyen **színezés**nél az azonos színű pontok halmazát színosztálynak nevezünk

### 2. Mohó színezés

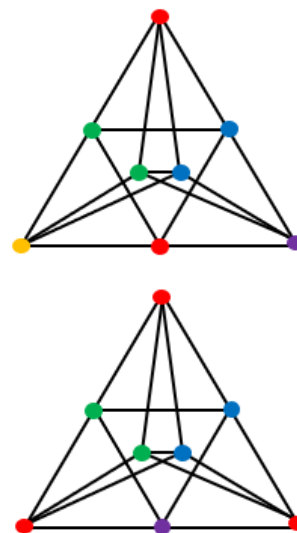
- algoritmus
  - sorba rendezi a csúcsokat  $(v_1, \dots, v_n)$
  - a  $v_i$ -hoz azon legkisebb színt rendeli, amit a  $(v_1, \dots, v_{i-1})$  szomszédokhoz még nem rendelt
  - a mohó színezése nem feltétlenül a legoptimálisabb színezést adja
    - ha ki tudtuk színezni a gráfot, arról is meg kell bizonyosodni, hogy  $-1$  színnel már NEM lehet kiszínezni azt
    - ezt be is kell bizonyítani, pl. ismételten lerajzoljuk a gráfot, és elkezdjük kiszínezni  $k - 1$  színnel
    - ezt először egy tetszőlegesen kiválasztott ponttal kezdjük, lehetőleg egy kis fokszámúval, és a másik színekkel a szomszédait megszínezzük

[N38] megjegyzést írt:



[N39] megjegyzést írt:

Itt ugyanaz a két gráf szerepel egy rossz és egy jó színezéssel. Elsőt 5, másodikat 4 színnel is ki tudtuk színezni.





- a szomszédok után mindig úgy haladunk, hogy egyértelmű legyen, hogy melyik egy szintet tudjuk használni
- ebből a végén ki fog jönni, hogy még kellene +1 szín, hogy be tudjuk fejezni helyesen a színezést

### 3. $\chi(G)$ és $\Delta(G)$ viszonya

#### o Tétel

- $\forall G$  gráfra teljesül, hogy

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

#### o Bizonyítás

- a mohó színezés segítségével bizonyítunk
- színezzük ki  $G$  pontjait  $(v_1, \dots, v_n)$  úgy, hogy az  $i$ -edik lépésben  $v_i$ -t olyan színre színezzük, ami nem szerepel  $v_i$  kiszínezett szomszédságában
- mivel  $v_i$ -nek legfeljebb  $\Delta(G)$  kiszínezett szomszédja lehet, és  $\forall$  szomszéd legfeljebb egy szintet zár ki
- $\rightarrow$  ezért  $v_i$  színezése elvégezhető a rendelkezésre álló színek valamelyikével (a kimaradó  $\Delta(G) + 1$ -edik)
- $v_n$  kiszínezése után  $G$  egy  $\Delta(G) + 1$  színezését kapjuk
- $\chi(G) = \Delta(G) + 1$  esetben a teljes gráfról vagy húr nélküli páratlan körről beszélünk

### 4. Brooks-tétel

#### o Tétel

- ha  $G$  egyszerű, összefüggő, nem teljes gráf, nem páratlan kör, akkor  $\chi(G) \leq \Delta(G)$
- tehát a **kromatikus szám** nem nagyobb, mint a legnagyobb fokszám

### 5. Intervallumgráf

#### o Definíció

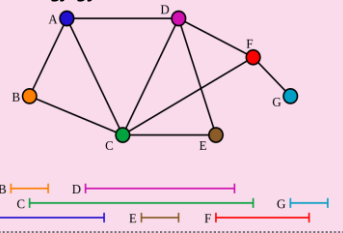
- $I_1 = [a_1, b_1], I_2 = [a_2, b_2], \dots$  korlátos zárt intervallumok
- $\forall a_i, b_i$  legyen pozitív egész
- $p_1, p_2, \dots$  egy  $G$  gráf pontjai, és  $p_i, p_j$  akkor és csak akkor legyen él  $G$ -ben, ha  $I_i \cap I_j \neq \emptyset \rightarrow$  ezek az intervallumgráfok

[N40] megjegyzést írt: Ejtsd: khi

[N41] megjegyzést írt: Legnagyobb fokszám.

[N42] megjegyzést írt:  
Legkisebb szám, ahány színnel ki lehet színezni a gráfot, hogy két érintkező csúcs ne legyen azonos.

[N43] megjegyzést írt:



BTW:

Az operációkutatásban az intervallumgráfokat erőforráskiosztási problémák modellezésére használják. Az intervallumok jelzik az egyes kérelmek időtartamát; a legnagyobb súlyú független pontthalmaz felel meg az optimális kiosztásnak.



## 6. Intervallumgráf színezése

### o Tétel

- $G$  intervallumgráf, emiatt:

$$\omega(G) = \chi(G)$$

### o Bizonyítás

- a mohó színezés segítségével bizonyítunk
- az intervallumokat bal végpontja szerint sorba rendezzük
- növekvő sorrend szerint színezzük  $\rightarrow$  optimális lesz a színezés
- TFH. színnel színez a mohó algoritmus
- cél belátni:  $k \leq \omega(G) \leq \chi(G) \leq k$
- ....

## 7. Páros gráf

### o Definíció

- egy  $G$  **páros gráf**, ha  $G$  pontjainak  $V(G)$  halmazát két részre, egy  $A$  és  $B$  halmazra tudjuk osztani úgy, hogy  $G \forall$  élének egyik végpontja  $A$ -ban, másik  $B$ -ben legyen
- jelölése:  $G = (A, B)$
- a  $K_{a,b}$ -vel jelölt teljes **páros gráf** olyan  $G = (A, B)$  gráf, ahol  $|A| = a$  és  $|B| = b$
- és  $\forall A$ -beli pont össze van kötve  $\forall B$ -beli ponttal
  - egy halmazon belül a pontok nincsenek összekötve csak a másik halmaz pontjaival

## 8. Párosítás létezése

### o Tétel

- egy  $G$  gráf akkor és csak akkor páros, ha  $\forall G$ -ben lévő kör páros

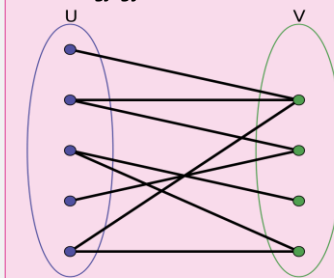
### o Bizonyítás

- ha  $G$  páros gráf, és  $C$  egy kör  $G$ -ben, akkor  $C$  pontjai felváltva vannak  $A$ -ban és  $B$ -ben, így  $|V(C)|$  nyilván páros
- ha  $G \forall$  köre páros hosszú, akkor megadhatjuk az  $A$  és  $B$  halmazt
- kiválasztunk egy tetszőleges  $v$  pontot, legyen ez  $A$  első pontja

**[N44] megjegyzést írt:** Egy teljes gráf részgráfja a klikk, és a jele:  $\omega(G)$ . A maximális klikkszám, amikor a klikkben bármely két csúcs szomszédos, de, ha hozzáveszünk még egyet az már nem.

**[N45] megjegyzést írt:** Nem intervallumgráfoknál:  $\omega(G) \leq \chi(G)$

**[N46] megjegyzést írt:**





- $v \forall$  szomszédját tegyük bele  $B$ -be, majd ezeknek a szomszédjait rakjuk bele  $A$ -ba
- addig folytatjuk, amíg ki nem fogyunk a pontokból
- biztosan jó elosztás lesz, mert, ha  $A$ -ban két szomszédos pont, akkor léteznie kéne a gráfban páratlan körnek  $\rightarrow$  ellentmondás lenne
- nem összefüggő gráfok esetén komponenseként hajtsuk végre

### 9. Kromatikus szám és párosítás kapcsolata

#### ○ Tétel

- egy legalább egy élt tartalmazó  $G$  gráf akkor és csak akkor páros gráf, ha  $x(G) = 2$

#### ○ Bizonyítás

- ha a gráf páros, akkor az egyik oldalon lévő pontokat pirossal, másikat kézzel megszínezzük
- ha a gráfnak van egy éle, akkor ennek a két végpontját már nem színezzük egy színűre
- színek megfelelnek a két halmaznak, amire fel tudjuk bontani a páros gráfokat





BACK

## 6. tétel: Gallai, Tutte tétele

### Tételcím

Párosítás fogalma. Független élhalmaz, lefógó élhalmaz, független ponthalmaz, lefógó ponthalmaz, valamint  $\nu(G)$ ,  $\delta(G)$ ,  $\alpha(G)$ ,  $\tau(G)$  fogalma, valamint ezek egymáshoz való viszonya. Gallai tételei. Tutte tétele (csak szükségesség bizonyításával).

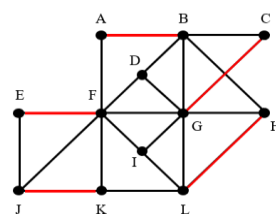
### 1. Párosítás/részleges párosítás

- Definíció
  - **éllek lefedése:** végpontok részleges párosítás
  - **teljes párosítás:** ha gráf  $\forall$  pontját lefedi a párosítás

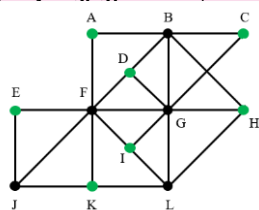
### 2. Független/lefógó élék/pontok

- Definíció
  - **független élhalmaz:** olyan élhalmaz, hogy semelyik két élnek nincs közös pontja (diszjunkt)
    - **független élék maximális száma:**  $\nu(G)$ 
      - ♦ a tanultak szerint,  $100 <$  független élhalmaz nem létezik
  - **független ponthalmaz:** ha nincs benne két él által szomszédos pont
    - **független pontok maximális száma:**  $\alpha(G)$
  - **lefógó élhalmaz:**  $Y \subseteq E(G)$ , ha  $\forall$  pontot lefog
    - **lefógó élék minimális száma:**  $\rho(G)$ 
      - ♦ ugyanazokat az élket kell bejelölni, mint a független éléknél, és meg kell nézni, hogy találunk-e még azokon kívül
  - **lefógó ponthalmaz:**  $X \subseteq V(G)$ , ha  $G \forall$  élének legalább egyik végpontját tartalmazza
    - **lefógó pontok minimális száma:**  $\tau(G)$ 
      - ♦ technikailag a  $\alpha(G)$  pontok ellentétei

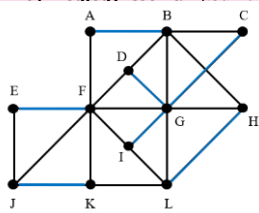
[N47] megjegyzést írt: Eítsd: nú



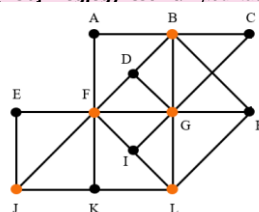
[N48] megjegyzést írt: Eítsd: alfa



[N49] megjegyzést írt: Eítsd: ró



[N50] megjegyzést írt: Eítsd: tau





- ha a feladat mind a négy megkeresését írja, érdemes akkor a núvel és az alfával kezdeni, utána már pofon egyszerű a dolog...
- figyeljünk arra is oda, hogyha megtaláltuk ezeket a pontokat, nem elég leírni, hogy na megtaláltam 5 db ilyen, akkor ez ennyi is, hanem be kell bizonyítani pl. egy Gallaival vagy megnézed egymáshoz való viszonyait
- ha egy feladatban találtál 5 lefogó pontot, akkor felírod, hogy  $\tau(G) \leq 5$
- ezt követően megnézed, hogy mennyi a  $v(G)$ , ha az is 5, akkor felírod, hogy  $5 \leq v(G) \leq \tau(G) \leq 5$ , és ezzel bizonyítod, hogy igen, így mind a két szám 5-tel egyenlő

### 3. Viszonytétel

#### ○ Tétel

- $\forall G$  gráfra:

$$v(G) \leq \tau(G)$$

$$\alpha(G) \leq \rho(G)$$

#### ○ Bizonyítás

- legyen  $M$  maximális méretű független élhalmaz
- $M$  lefogásához legalább  $v(G) = |M|$  pontra van szükség, ezért
$$\tau(G) \geq |M|$$
  - pl.  $v(K_3) = 1 < \tau(K_3) = 2$
- második állítást is hasonlóan bizonyítjuk

### 4. Gallai tétel I.

#### ○ Tétel

- $\forall$  olyan  $G$  gráfra, amely hurokélmentes:

$$\tau(G) + \alpha(G) = n$$

#### ○ Bizonyítás

- egy  $X$  halmaz pontjai akkor és csak akkor függetlenek, ha  $\frac{V(G)}{X}$  halmaz lefogó ponthalmaz
- ha  $X$  nem független, akkor van két összekötött pont
  - így  $\frac{V(G)}{X}$  nem fogja le ezt az élt



- fordítva: ha  $\frac{v(G)}{x}$  nem fog le egy huroktól különböző élt, akkor  $X$ -ben ennek az élnek mindkét végpontja szerepel
- tehát:  $\tau(G) \leq \left\lfloor \frac{v(G)}{x} \right\rfloor$  teljesül  $\forall X$  független ponthalmazra  
 $\rightarrow \tau(G) + \alpha(G) \leq v(G)$
- hasonlóan:  $\alpha(G) \geq \left\lfloor \frac{v(G)}{y} \right\rfloor \forall Y$  lefógó ponthalmazra  
 $\rightarrow \tau(G) + \alpha(G) \geq v(G)$

## 5. Gallai tétel II.

### o Tétel

- $\forall$  olyan  $G$  gráfra, melyben nincs izolált pont:

$$v(G) + \rho(G) = n$$

### o Bizonyítás

- $G$ -nek  $\exists v(G)$  diszjunkt éle
- ezek két  $v(G)$  pontot fognak le
- maradék  $n - 2$  db  $v(G)$  lefogható  $1 - 1$  új éllel
- $\rightarrow v(G) + n - 2 \cdot v(G) = n - v(G)$  éllel  $\forall$  pont lefogható
  - $\rho(G) \leq n - v(G) \rightarrow v(G) + \rho(G) \leq n$
- ha  $F$  egy lefógó élhalmaz minimális száma, akkor  $F$ :
  - körmentes
  - nincs 3 hosszú útja
  - $\rightarrow F$  diszjunkt csillagok uniója
- ha  $F$ -ben  $k$  csillag van, akkor a halmaz  $n - k$  élet tartalmaz, hiszen  $k$  komponensű erdőről van szó
  - $\rho(G) = n - k$
- a halmaz tartalmaz  $k$  diszjunkt élt:  $k \leq v(G) \rightarrow$  hozzáadjuk az előző egyenlőséget:
  - $n - k + k \leq v(G) + \rho(G)$
  - tehát:  $n \leq v(G) + \rho(G) \leq n$

[N51] megjegyzést írt: Mert nincs izolált pont.

[N52] megjegyzést írt: Összefüggő gráf, legfeljebb 1 híján minden pont foka 1.



## 6. Tutte-tétel

[N53] megjegyzést írt: Ejtsd: Tát

### o Tétel

- egy  $G$  gráfban akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha  $\forall X \subseteq V(G)$ -re  $c_p(G - X) \leq |X|$ 
  - *akárhogy hagyunk el a gráfból pontot, a maradékban a páratlan komponensek száma ennél nem több*

### o Bizonyítás

- (csak szükségesség bizonyítás)
- ha  $G$ -ben van teljes párosítás, akkor nyilvánvalóan teljesül a feltétel
- mert, ha elhagyunk a gráfból  $X$ -et, akkor a páratlan komponensek mindegyikéből az eredeti gráfban indul ki legalább egy párosításbeli él
- ezek az élek csak 1-1 különböző  $X$ -beli pontba mehetnek
- $\rightarrow c_p(G - X) \leq |X|$



BACK

## 7. tétel: Javítóutak, König

### Tétalcím

Párosítások páros gráfban, a javítóutak módszere, König, Hall, és Frobenius tétele.

### 1. Párosítás

- Definíció
  - **párosítás/részleges párosítás:** ha semelyik két élnek nincs közös pontja → *független élek*
  - részleges párosítás lefedi éleinek végpontjait
  - **teljes párosítás:** párosítás lefedi a gráf összes pontját

### 2. Alternáló út

- Definíció
  - létrehozunk egy részleges párosítást
  - a párosítás során bevett élék élhalmaza legyen  $X$
  - alternáló út → élsorozat, amely felváltva tartalmaz  $X$  és nem- $X$ -beli elemeket

### 3. Javító út

- Definíció
  - $G(A, B, E)$  páros gráfban van nem teljes párosítás
  - $P$  javító út, ha párosítatlan  $A$ -ból indul, párosítatlan  $B$ -be érkezik és  $P$  alternáló út
  - úgy tudjuk bevenni, hogy a nem- $X$ -beli éleket bevesszük és a régebben  $X$ -beli éleket nem



#### 4. Javító utas algoritmus (módosított BFS)

- **algoritmus**
  - bemenet:  $G(A, B, E)$  gráf,  $M$  párosítás
- **1. lépés:**
  - ha van ebben javító út, bevesszük
  - addig folytatjuk, amíg létre nem hozunk újabb utakat
- **2. lépés:**
  - ha már nem tudunk többet bevenni, akkor STOP
  - itt eléri a maximális párosítást
- az algoritmus mohó módon működik

#### 5. König tétel

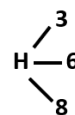
- **Tétel**
  - ha  $G$  páros gráf, akkor  $\nu(G) = \tau(G)$
  - ha  $G$ -ben nincs izolált pont, akkor  $\alpha(G) = \rho(G)$
- **Bizonyítás**
  - (első állítás bizonyítása)
  - $M$  párosítás, amely a javító utak módszerével már nem bővíthető
  - $! U = A - X$ ,  $T'$  azon  $B$ -beli pontok halmaza, amely elérhetőek  $U$ -ból alternáló úton,  $T$  ezek párjainak halmaza
  - $! Y = T' \cup (X - T)$
  - ennek a halmaznak éppen  $|M|$  pontja van
  - ezek  $\forall$  élt lefognak, hiszen  $N(T \cup U) = T' \rightarrow$  (8. tétel, Hall-tétel bizonyításnál)
  - így  $\tau(G) \leq |M| \leq \nu(G) \rightarrow$  (7. tétel, Viszonytétel alapján)
  - (második állítás bizonyítása)
  - (7. tétel, Gallai két tétele miatt)  $\nu(G) + \rho(G) = \tau(G) + \alpha(G)$  imént beláttuk, hogy  $\nu(G) = \tau(G)$

#### [N54] megjegyzést írt:

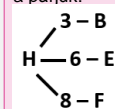
Bejelöljük minden oszlopba a legelső párt, akit találunk, amíg el nem fogynak a lehetőségek. H-nál nincs semmi, így jön a javítóút a H-ra.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	1	0	0	1	0	0	1	0	1
2	1	0	1	0	1	1	1	0	1
3	1	1	0	1	1	0	0	1	1
4	1	0	0	1	0	0	1	0	1
5	1	0	0	0	0	0	1	0	1
6	0	1	1	0	1	0	0	1	0
7	0	0	0	1	0	0	1	0	1
8	0	1	0	0	1	1	0	1	0
9	1	0	0	1	0	0	1	0	0

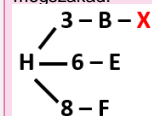
Ugye a H-ból 3 helyre mehetünk: 3-as, 6-os, és 8-as sorba. Írjuk fel ezeket.



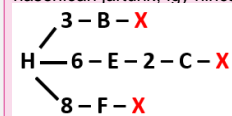
Írjuk a számokhoz, hogy a bekarikázottak közül melyik a párjuk:



Majd hasonlóan, ahogy H-nál, írjuk fel, hogy pl. B-ből hova lehetne menni. Sajnos B-ből csak a 3-asba, és a 8-asba lehet, de mivel azokat már felírtuk, így ez az út megszakad.



Majd azt tapasztaljuk, hogy a másik kettőnél is hasonlóan jártunk, így nincs javítóút a H-ra.



Tehát a talált párosítás maximális, azaz  $\nu(G) = 8$ , és mivel az ilyen gráfok párosak, így tudjuk, hogy a lefogó pontok számával lesz ez azonos a Gallai-tétel miatt:  $\nu(G) = \tau(G) = 8$



## 6. Hall-tétel/Hall-feltétel

### ○ Tétel

- egy  $G$  gráfban akkor és csak akkor van  $A$ -t lefedő párosítás, ha  $\forall X \subseteq A$  részalmazra  $|N(X)| \geq |X|$

### ○ Bizonyítás

- ha  $\exists A$ -t lefedő párosítás, akkor  $\forall A$ -beli pontnak különböző párja van, tehát tetszőleges  $X \subseteq A$ -ra
- igazolnunk kell  $v(G) \geq |A|$
- $U$  minimális ( $\tau(G)$  méretű) lefoglaló ponthalmaz
- $U_A := U \cap A$ ,  $U_B := U \cap B$
- mivel  $U$  lefoglalja az  $X := \frac{A}{U_A}$ -ból induló éleket, ezért

$$v(G) = \tau(G) = |U| = |U_A| + |U_B| \geq |U_A| + |N(X)| \geq |U_A| + |X| = |A|$$

## 7. Frobenius-tétel

### ○ Tétel

- egy  $G = (A, B)$  páros gráfban akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha  $|A| = |B|$  és  $|N(X)| \geq |X| \forall X \subseteq A$ -ra

### ○ Bizonyítás

- a két feltétel szükségessége nyilvánvaló
- ha teljesül a második feltétel, akkor a Hall-tétel miatt van  $A$ -t fedő párosítás
- mivel  $|A| = |B|$ , ezért ez lefedi  $B$ -t is



BACK

## 8. tétel: Vizing, Kőnig élkromatikus szám

### Tételcím

Teljes párosítás létezése reguláris páros gráfban. Gráfok élszínézése,  $\chi_e(G)$  fogalma és viszonya  $\Delta(G)$ -hez. Vizing-tétel (bizonyítás nélkül), Kőnig tétele a páros számok élkromatikus számáról.

### 1. Reguláris gráf

- Definíció
  - **reguláris**: ha  $\forall$  csúcsának ugyanannyi szomszédja van, tehát  $\forall$  csúcs fokszáma azonos
  - **$k$ -regulárisnak**: a közös fokszámot  $k$ -val jelölve beszélhetünk  $k$ -reguláris gráfról is
  - **osztályok**
    - **0-reguláris**: nem tartalmaznak éleket, üres gráfok
    - **1-reguláris**: 1-1 éllel összekötött csúcspárok
    - **2-reguláris**: izolált körök
    - **3-reguláris**: *cubic graph*

### 2. Reguláris gráfban teljes párosítás

- Definíció
  - $\forall$  reguláris gráfban  $\exists$  teljes párosítás
- **Bizonyítás**
  - vegyünk egy páros gráfot
  - $A, B$  pontosztállyal, amely  $k$ -reguláris
  - lássuk be, hogy  $A$  és  $B$ -nek ugyanaz az elemszáma
  - $A$ -ból  $k \cdot n$ ,  $B$ -ből  $k \cdot m$  él megy ki
 
$$k \cdot n = k \cdot m \quad /:k$$

$$n = m$$
  - Hall-feltétel:  $|N(A)| \geq |A|$

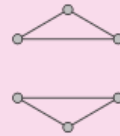
[N55] megjegyzést írt:



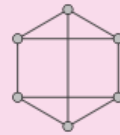
[N56] megjegyzést írt:



[N57] megjegyzést írt:



[N58] megjegyzést írt:







- $A$ -ból  $k \cdot |A|$  él megy ki
- ezek  $N(A)$  csúcsba mennek
- $N(A)$ -beli csúcsban átlagosan  $(k \cdot |A|) \setminus |N(A)|$  él megy tehát

$$\frac{(k \cdot |A|) \setminus |N(A)|}{|A|} \leq \frac{|N(A)|}{|A|} \cdot k$$

- Hall és Frobenius-tétel is teljesül  $\rightarrow \exists$  teljes párosítás

### 3. Élszínezés

- Definíció
  - $G$  gráf élei  $k$  színnel színezhetők, ha  $\forall$  élt ki lehet színezni  $k$  színnel úgy, hogy bármely két szomszédos él színe különböző legyen
  - $G$  élkromatikus száma  $x_e(G) = k$ , ha  $G$  élei  $k$  színnel színezhetők, de  $k - 1$ -gyel már **nem**
    - hasonlóan a kromatikus számnál, bizonyítás a Vizing-tétel esetében  $\rightarrow$  ki lehet-e színezni  $k - 1$ -gyel
    - az alsó becslés esetében ez magától érthető, és ezt a lépést kihagyhatjuk

### 4. Vizing-tétel

- Tétel
  - ha egy  $G$  egyszerű gráf, akkor  $x_e(G) \leq \Delta(G) + 1$

### 5. Él kromatikus szám

- Tétel
  - tetszőleges  $G$  gráfra  $x_e(G) \geq \Delta(G)$
- Bizonyítás
  - egy csúcsból induló élek egymástól különböző színt kapnak
  - ez speciálisan maximális fokszámú csúcsokból induló élekre igaz

### 6. König-tétel

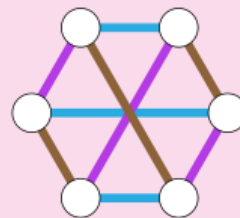
- Tétel
  - ha  $G$  páros gráf, akkor  $x_e(G) = \Delta(G)$
- Bizonyítás
  - előző állítás miatt elég igazolni, hogy  $x_e(G) \leq \Delta(G)$
  - $\exists$  olyan  $H$  páros gráf, melynek  $G$  részgráfja

[N59] megjegyzést írt: Mivel egy csúcsba maximum  $k$  él megy.

[N60] megjegyzést írt: Legnagyobb fokszám száma.

[N61] megjegyzést írt: Vizing-tétellel együtt alkalmazható.

[N62] megjegyzést írt: Mivel a gráf páros gráf, így nem kell bizonyítani a fokszámokra, hanem König tételét alkalmazni rá  $x_e(G) = \Delta(G) = 3$ .





- $H \forall$  csúcának fokszáma  $\Delta(G)$
- ha  $\Delta(G)$ -reguláris  $H$  gráf éleit  $\Delta(G)$  színnel kiszínezzük
- $\rightarrow$  megkapjuk  $G$  részgráf ugyanennyi színnel való színezését
- $H$  gráf élszínezéséhez elég megmutatni, hogy tetszőleges reguláris páros gráfban  $\exists$  teljes párosítás (*felt már bizonyítottuk*)



BACK

## 9. tétel: Hálózati folyam, vágás

### Tételcím

Hálózat, hálózati folyam és  $s - t$  vágás fogalma, folyam értéke, vágás kapacitása. Algoritmus maximális folyam és minimális vágás megkeresésére, Ford-Fulkerson tétel, Edmonds-Karp tétel (bizonyítás nélkül). Egészértékűségi lemma. A folyamprobléma általánosítása.

### 1. Hálózat

- Definíció
  - **él kapacitása:**  $G$  egy irányított gráf, rendeljünk  $\forall$  éléhez egy  $c(e)$  nemnegatív számot
  - **termelő/forrás (source):** ez  $G$ -ben az  $s$  pont
  - **fogyasztó/cél (sink):** ez  $G$ -ben a  $t$  pont
  - **hálózat:**  $(G, s, t, c)$  négyes a hálózat
    - tehát:  $s, t \in V(\vec{G}), c: E(\vec{G}) \rightarrow \mathbb{R}^+$

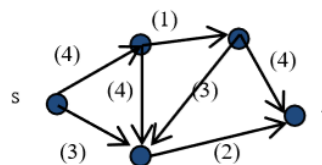
### 2. Hálózati folyam

- Definíció
  - a  $(G, s, t, c)$  hálózatban folyam egy olyan  $f$  függvény, amely  $G \forall$  éléhez egy számot rendel, amire teljesül:
    - **kapacitás feltétel**
      - $0 \leq f(e) \leq c(e)$  teljesül  $\forall e \in E(\vec{G})$  élre  $G$ -ben
      - tehát: a folyam  $\forall$  élén csak az adott maximális kapacitásnyi lehet
    - **Kirchoff-szabály**

$$\sum \{f(uv): uv \in E(G)\} = \sum \{f(vu): vu \in E(G)\}$$

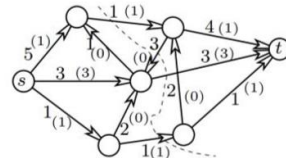
$$(\sum \{f(uv): uv \in E(G)\} - \sum \{f(vu): vu \in E(G)\} = 0)$$
      - áll  $\forall v \in V(\vec{G}), v \neq s, t$  csúcsára  $(\sum_{ve \rightarrow} f(e) = \sum_{ve \leftarrow} f(e))$

[N63] megjegyzést írt:



[N64] megjegyzést írt: Csomóponti törvény. Elektromos hálózatoknál is használatos.

[N65] megjegyzést írt:



Hálózati folyam. A zárójelokban az  $f$  folyam által felvett értékek állnak. A folyamérték  $m_f = 1 + 3 + 1 = 5$ . A szaggatott vonal 5 értékű  $st$ -vágást jelöl. (A Ford-Fulkerson algoritmus másikat talál.)



- tehát  $\forall s$ -től és  $t$ -től különböző  $v$  csúcsra a befolyó folyam összemennyisége azonos a kifolyó összfolyammal
- így egyetlen csúcsban sem keletkezik vagy tűnik el folyadék

### 3. Folyam értéke

o Definíció

- $f$  folyam értéke az a nettó folyam mennyiség, ami  $s$ -ből kifolyik:

$$m_f = \sum \{f(sv) : sv \in E(G)\} - \sum \{f(vs) : vs \in E(G)\}$$

$$= \sum_{s \rightarrow se} f(e) - \sum_{e \rightarrow es} f(e) = \sum_{s \rightarrow et} f(e) - \sum_{e \rightarrow te} f(e)$$

- $m_f = \sum_{s \rightarrow xe} f(e) - \sum_{e \rightarrow ex} f(e)$
- $m_f := \sum \{f(sv)\} - \sum \{f(vs)\}, v \in V(G)$
- **telített él:** ha a folyamban  $f(e) = c(e)$ 
  - tehát már nem lehet többet átvinni rajta
- **telítetlen él:** ha a folyamban  $f(e) < c(e)$ 
  - ha még lehet átvinni rajta

[N66] megjegyzést írt:  $f$  a folyam,  $m_f$  a nagysága

[N67] megjegyzést írt: Le kell vonni, ami  $s$ -be érkezik, mert nem kizárható, hogy fog ide befolyjni (bár általában nem ez a helyet, hiszen onnan minél többet akarunk kijuttatni), de nem zárhatjuk ki ezt a lehetőséget sem, ezért az  $s$ -t elhagyó összfolyammennyiség kiszámításához le kell vonni azt, ami  $s$ -be érkezik.

[N68] megjegyzést írt: Legyen egyenlő.

### 4. Vágás

o Definíció

- $G$  csúcsainak  $s$ -et tartalmazó, de  $t$ -től diszjunkt részhalmaza ( $X \subseteq V(\vec{G}), s \in X \not\ni t$ )
- az  $X$  és a  $V(\vec{G}) \setminus X$  között futó élek  $C$  halmazát a hálózat egy  $s - t$ -vágásnak nevezzük

o Jelölés

- $C$

### 5. Vágás kapacitása

o Definíció

- $c(C) = \sum_{s \rightarrow xe} c(e)$
- az  $X$  által meghatározott  $s - t$ -vágás kapacitása az  $X$ -ből a  $V \setminus X$ -be futó (előremutató) élek kapacitásösszege



- $\sum\{c(xv): x \in X \nexists v \in V(G)\}$
- az  $X$  által meghatározott  $s - t$ -vágás kapacitása felső korlát a lehetséges folyam nagyságára
- tetszőleges  $f$  folyam  $m_f$  folyam nagysága meghatározható úgy, hogy az  $X$ -ből  $V(\vec{G}) \setminus X$ -be futó éleken haladó összfolyammennyiségéből levonjuk a  $V(\vec{G}) \setminus X$ -ből  $X$ -be továbbított folyammennyiséget
  - $m_f = \sum\{f(xv): x \in X \nexists v \in V(G)\} - \sum\{f(xv): x \in X \exists v \in V(G)\}$
  - $m_f \leq \sum\{c(xv): x \in X \nexists v \in V(G)\}$

## 6. Javító út hálózatra algoritmus

- **0. lépés:**
  - kiindulunk egy tetszőleges folyamból (pl.  $f \equiv 0$ )
- **1. lépés:**
  - javítunk, amíg tudunk  $\rightarrow m_f \uparrow$
- **2. lépés:**
  - ha nincs több javítás  $\rightarrow$  STOP
    - *kiegészítés*
    - ha van olyan irányított út  $s$ -ből  $t$ -be, amelynek  $\forall$  éle telítetlen, akkor ezen az út mentén a folyam értékét  $\forall$  élen megnövelhetjük, hogy az egyik él telített legyen
    - ha ez nem lehetséges  $\rightarrow$  segédgráfos módszer
    - ha nincs további javítóút, megtaláltuk  $s$ -ből  $t$ -be futó maximális folyamot
    - a minimális vágás azon pontok halmaza, melyeket  $s$ -ből indítjuk, és ameddig jutunk, addig a pontig tart a halmaz
    - ebből a kis halmazból kiinduló élek eredeti kapacitásai összeadva lesz a minimális vágás értéke

## 7. Maximális folyam

- **Tétel**
  - egy folyam értéke akkor és csak akkor maximális, ha már nincs javító út  $s$ -ből  $t$ -be



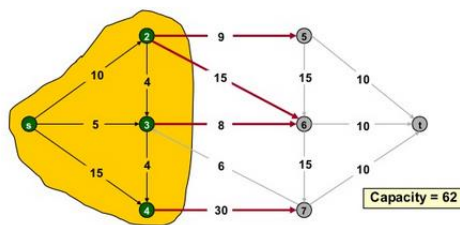
o **Bizonyítás**

- !  $P$  egy javító út
- ekkor  $P \forall$ 
  - első típusú élére:  $c(e) - f(e)$
  - második típusú élére:  $f(e)$  szigorúan pozitív
  - ezek minimuma:  $d$
- első típusúaknál növeljük  $\uparrow f(e)$ -t  $d$ -vel, második típusúaknál csökkentsük  $\downarrow f(e)$ -t  $d$ -vel
- módosított folyam megengedett marad, értéke  $d$ -vel nő  $\uparrow$
- TFH. nincs javító út  $s$ -ből  $t$ -be
- lehetnek olyan pontok a gráfban, amelyek elérhetőek  $s$ -ből javító úton, ezek pontthalmaza legyen  $X \subset V(G)$
- ekkor  $X, V(G) - X$  sem üres, mert  $s \in X, t \in V(G) - X$
- vegyünk egy  $e$  élt, ez egy  $X$ -beli  $x$  pontból egy nem  $X$ -beli  $y$ -ba mutat
- ekkor  $f(e) = c(e)$ , mert ellenkező esetben  $s$ -ből  $x$ -be vezető javító út  $e$ -vel meghosszabbítva egy  $s$ -ből  $y$ -ba vezető utat adna
- ugyanígy egy olyan élre, amely egy  $X$ -beliből egy nem  $X$ -belibe mutat, igaz, hogy  $f(e) = 0$
- tehát  $X, V(G) - X$  között futó élek mind telítettek
- visszafele mutató éleket nem használjuk, de a vágásba amúgy beleszámítanak  $\rightarrow$  ezen a vágáson több „víz nem folyhat”

**8. Ford-Fulkerson (Maxflow-mincut) tétel**

o **Tétel**

- maximális folyam értéke egyenlő a minimális vágás értékével, tehát:  
 $\max\{m_f | f \text{ egy folyam } s\text{-ből } t\text{-be}\} = \min(c(C) | C \text{ vágás})$



[N69] megjegyzést írt: Sárga rész jelzi a vágást.

o **Bizonyítás**

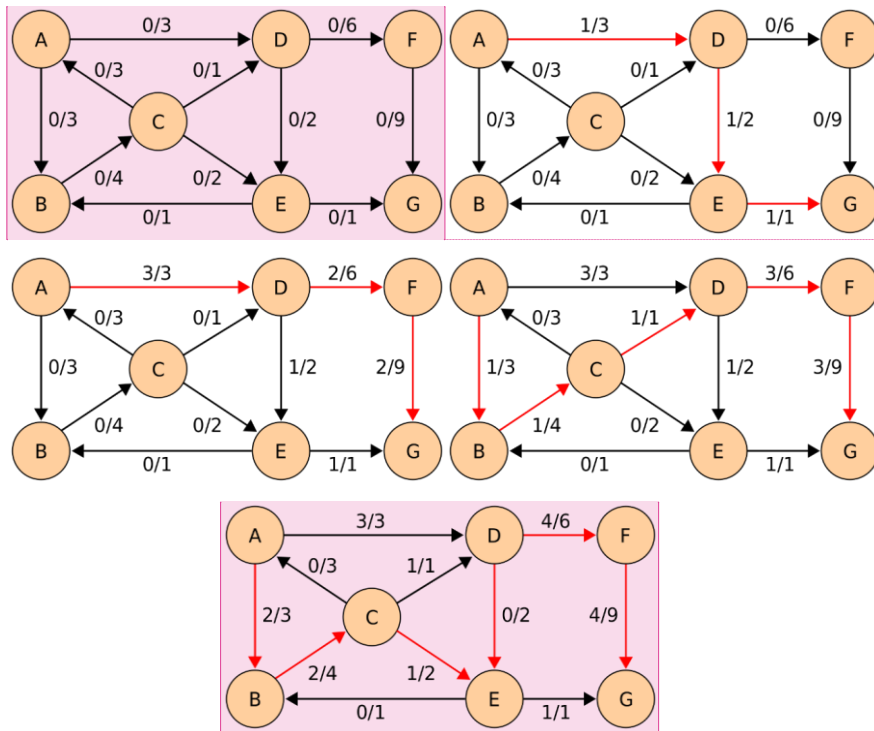
- maximális folyam nem lehet nagyobb a maximális vágásnál, mert  $\forall$  előremutató él telített, visszafele mutató éleken pedig 0 a folyam értéke  $\rightarrow$  ezen a folyamon nem folyhat át több víz
- előző tételben beláttuk, hogy ha  $\exists$  egy  $f$  maximális folyam, akkor  $\exists$  ilyen értékű vágás
- *következő tételben: maximális értékű folyam mindig  $\exists$*

**9. Edmonds-Carp tétel/algorithmus**

o **Tétel**

- ha mindig a legrövidebb javító utat vesszük, akkor a maximális folyam meghatározásához szükséges lépések száma felülről becsülhető a pontok számának polinomjával

o *példa Edmonds-Carp algoritmusra*



**[N70] megjegyzést írt:** Hasonlít a Ford-Fulkerson algoritmushoz, annyi különbséggel, hogy a keresési sorrend az útvonal megtalálásakor meg van határozva. A megtalált útvonalnak a legrövidebbnek kell lennie. Ezt a BFS teszi lehetővé nekünk (később), ahol minden egyes élhez 1-es súlyt alkalmazunk. Minden alkalommal, amikor legalább egy él telített, tehát a telített szétől a forrásig terjedő távolság a bővítési útvonal mentén hosszabb legyen, mint utolsó alkalommal, amikor telített volt, és hossza max  $V$ . Legrövidebb bővítési útvonal hossza monoton növekszik.

**[N71] megjegyzést írt:** A-t most tekintjük S-nek, G-t T-nek.

**[N72] megjegyzést írt:** Figyeljük meg, hogy az algoritmus által talált (piros utak) útvonal hossza soha nem csökken. A talált útvonalak a lehető legrövidebbek. A talált folyam egyenlő a minimális vágásnál a forrást és a célt elválasztó gráf. Ebben a gráfban csak egy minimális vágás van, a csomópontok  $\{A, B, C, E\}$  és  $\{D, F, G\}$

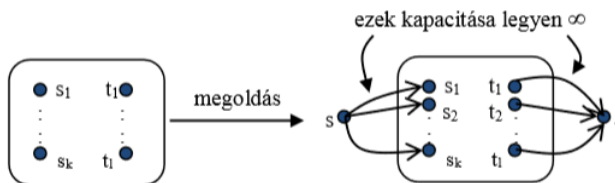


### Egészértékűségi lemma

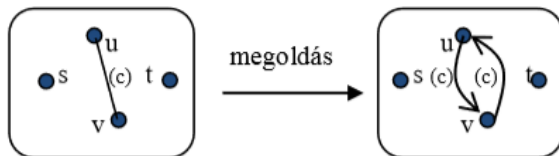
- **Tétel**
  - ha  $\forall e$  élre  $c(e)$  egész  $\rightarrow \exists$  olyan  $m_f$  max folyam, amelyre  $\forall e$  élre  $f(e)$  egész
- **Bizonyítás**
  - az algoritmus nem lép ki a  $\mathbb{N}$ -ből (csupa 0-ból indítva)

### 10. A folyamprobléma általánosítása

- **1) Több termelő/fogyasztó**
  - **megoldás:**
  - felvesszünk egy „szupertermelőt” ( $S$ ) / „szuperfogyasztót” ( $T$ )
  - összekötjük termelőkkel/fogyasztókkal végtelen kapacitású éleken
  - a kapott gráfban: maximális folyam keresés
  - ha találtunk, letöröljük a két pontot



- **2) Irányítatlan élek**
  - **megoldás:**
  - az irányítatlan él helyett felvesszünk két irányított, azonos kapacitású élet
  - két különböző irányba mutatnak
  - ha a folyam meghatározásakor mindkét helyettesítő élen 0-nál nagyobb a folyamérték, a két él folyamértékét kivonjuk egymásból
  - az *irányítatlan él értéke* a kivonás eredménye, az *iránya* a nagyobbik folyamértékével azonos irányú lesz



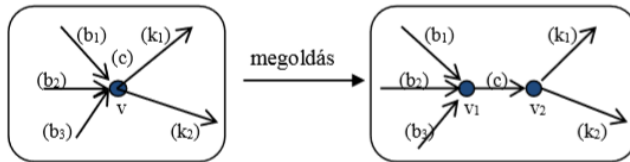




○ 3) Kapacitással rendelkező csúcsok

▪ **megoldás:**

- probléma: az adott pontban belépő élek kapacitásának összege nem lehet nagyobb a pont kapacitásánál
- hagyományos hálózatra való visszavezetés
  - $k$  kapacitással rendelkező  $v$  pontot két másik ponttal helyettesítjük
  - ezeket  $k$  kapacitású él köt össze
  - két új pontból az egyikbe futnak a  $v$ -be bejövő élek, a másiból futnak a  $v$ -ből kimenő élek





BACK

## 10. tétel: Menger pontpárok, élösszefüggés

### Tétalcím

Menger pontpárok közötti diszjunkt utakra vonatkozó tételei. Többszörös összefüggőség és élösszefüggőség fogalma, Menger ezekre vonatkozó tételei.

### 1. Élidegen, pontidegen, lefogó út

- Definíció
  - **éldiszjunkt/élidegen:**  $G$  irányított/irányítatlan gráf  $u$  pontjából  $v$  pontjába futó  $P$  és  $Q$  útjai, ha  $E(P) \cap E(Q) = \emptyset$ 
    - tehát nincs közös élük
  - **pontdiszjunkt/pontidegen:**  $G$  irányított/irányítatlan gráf  $u$  pontjából  $v$  pontjába futó  $P$  és  $Q$  útjai, ha  $V(P) \cap V(Q) = \{u, v\}$ 
    - vagyis, ha nincs közös csúcsuk, a kezdő és végpontot leszámítva
  - **$\forall$  utat lefogó pont/élhalmaz:**  $G$  irányított/irányítatlan gráf  $U$  ponthalmaz (vagy  $F$  élhalmaz) lefog  $\forall$  utat, ha a  $G - U$  gráfban  $\nexists$   $u$ -ből  $v$ -be irányított út

### 2. Menger I. tétel – $G$ -irányított, élidegen utak

- Tétel
  - ha  $G$  egy irányított gráf,  $s, t \in V(G)$
  - $s$ -ből  $t$ -be vezető páronként élidegen irányítatlan utak maximális száma egyenlő az  $s - t$  utakat lefogó élek minimális számával
- Bizonyítás
  - ha  $\exists$   $G$ -ben  $k$  db irányított  $s - t$  út, akkor az  $s - t$  utakat lefogó élek száma legalább  $k$
  - TFH.  $s - t$  utakat lefogó élek minimális száma  $k$
  - $\forall$  él kapacitása 1
  - a kapott hálózatban maximális folyam értéke legalább  $k$

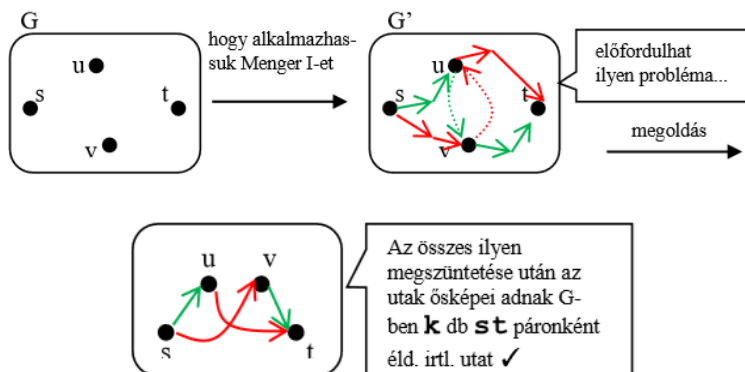


- (10. tétel, Ford-Fulkerson tétele miatt) a minimális vágás értéke is legalább  $k$
- már beláttuk, hogy van olyan max. folyam, ahol  $\forall$  élen folyamérték  $0$  v.  $1 \rightarrow$  lássuk be, hogy  $G$ -ben van  $k$  élidegen irányított  $s - t$  út
- legalább 1 biztos van, mert folyam értéke  $k$
- az útban szereplő élek kapacitását csökkentjük  $0$ -ra  $\rightarrow$  folyam értéke legalább  $k - 1$  lesz
- $k$ -szor végrehajtva  $k$  élidegen irányított  $s - t$  utat kapunk

### 3. Menger II. tétel- $G$ -irányítatlan, élidegen utak

#### o Tétel

- ha  $G$  egy irányítatlan gráf,  $s, t \in V(G)$
- $s$ -ből  $t$ -be vezető páronként élidegen irányítatlan utak maximális száma egyenlő az  $s - t$  utakat lefogó élek minimális számával



#### o Bizonyítás

- készítsük el a  $G'$ -t  $G$ -ből úgy, hogy  $G \forall$  élét irányítjuk oda és vissza
- ha  $G'$ -ben van  $k$  db él
- ezek lefognak  $k$  db  $s - t$  irányított éldisjunkt utat
- $\rightarrow$  ezek ősei lefognak az  $s - t$  utakat  $G$ -ben

#### 4. Menger III. tétel – $G$ -irányított, pontidegen utak

o **Tétel**

- ha  $G$  egy irányított gráf,  $s, t \in V(G)$  két nem szomszédos pont
- $s$ -ből  $t$ -be vezető, végpontoktól eltekintve pontidegen irányított utak maximális száma egyenlő az irányított  $s - t$  utak  $s$  és  $t$  felhasználása nélkül lefogó pontok minimális számával

o **Bizonyítás**

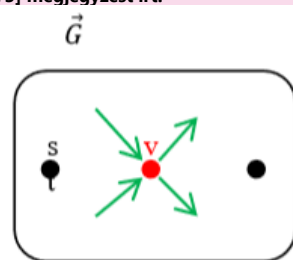
- $G'$ -ben  $\forall$  pontot húzzunk szét két ponttá
- ha a  $G$  egy minimális ponthalmaz lefogja az irányított  $s - t$  utakat, akkor a lefogó pontoknak megfelelő  $(v', v'')$  pontok is lefogó ponthalmazt alkotnak
- kevesebb él nem elég a lefogáshoz  $\rightarrow$  ha a lefogó élek közt lennének  $(a'', b')$  típusú élek, akkor ezeket helyettesítjük:
  - $(a', a'')$ -vel, ha  $b' = t$
  - $(b', b'')$ -vel, ha  $b' \neq t$
  - $\rightarrow G$ -ben kisebb lefogó ponthalmazt nyernénk
- $G$ -beli lefogó pontok száma =  $G'$ -beli lefogó élek száma
- $G$ -beli pontdiszjunkt utak =  $G'$ -beli éldiszjunkt utak és fordítva
- $G$ -beli pontidegen utak =  $G'$ -beli élidegen utak és fordítva
  - innentől előző tétel bizonyítását alkalmazzuk
- tehát, ha  $G'$ -ben van  $k$  éldiszjunkt  $s - t$  út  $\rightarrow G$ -ben van  $k$  db pontdiszjunkt út
- probléma: ha  $G'$ -ben van  $k$  db él, melyek lefogják az  $s - t$  utakat, akkor ezek  $G'$ -ben **pontok** vagy **élek**?
- megoldás: válasszunk  $k$  db piros lefogó élt
- ezek képei  $G$ -ben  $k$  db lefogó pont

#### 5. Menger IV. tétel – $G$ -irányítatlan, pontidegen utak

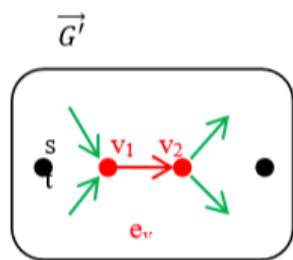
o **Tétel**

- ha  $G$  egy irányított gráf,  $s, t \in V(G)$  két nem szomszédos pont
- $s$ -ből  $t$ -be vezető, végpontoktól eltekintve pontidegen irányítatlan utak maximális száma egyenlő az irányítatlan  $s - t$  utak  $s$  és  $t$  felhasználása nélkül lefogó pontok minimális számával

[N73] megjegyzést írt:

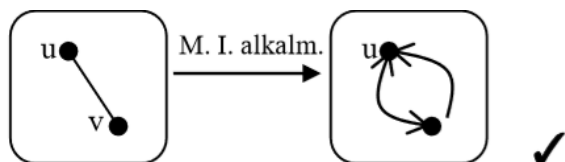


[N74] megjegyzést írt: Alkalmaztuk Menger I. tételét





o **Bizonyítás**



**6.  $k$ -szoros összefüggőség**

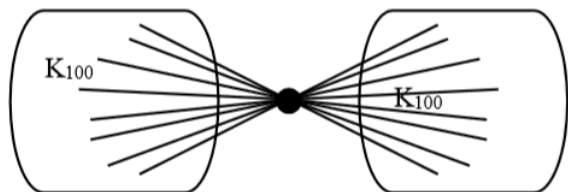
o **Definíció**

- $G$   **$k$ -szorosan élösszefüggő** ( $k$ -élösszefüggő): ha bárhogyan legfeljebb  $k - 1$  élét elhagyva összefüggő marad
- $G$   **$k$ -szorosan pontösszefüggő** ( $k$ -pontösszefüggő): ha bárhogyan legfeljebb  $k - 1$  pontját elhagyva összefüggő marad, és legalább  $k + 1$  pontja van

[N75] megjegyzést írt: Ha külön nincs említve, hogy milyen összefüggőség, akkor az alapértelmezett a pontösszefüggőség.

o **Állítás**

- nem két összefüggő, de 100-élösszefüggő



**7. Menger IV. – V.tétel –  $k$ -szoros összefüggőség**

o **Tétel**

- ha legalább  $k + 1$  pontja van, bármely két pontja között  $\exists k$  pontidegen út
- $G$  akkor és csak akkor  $k$ -szorosan élösszefüggő, ha bármely két pontja között  $\exists k$  élidegen út

o **Bizonyítás**

- (először második részt bizonyítjuk)
- $G$   $k$ -szorosan élösszefüggő, akkor az  $u - v$  utak maximális száma legalább  $k$
- Menger tétele szerint:
  - élidegen utak maximális száma legalább  $k$
- megfordítása is Menger tételből jön:



- $G$   $k$ -szorosan összefüggő, akkor bármely két  $u, v \in V(G)$  pontot választva legalább  $k$  darab,  $u$ -tól és  $v$ -től különböző pontra van szükség
- ezzel lefoghathjuk az összes  $u, v$  közötti utat
- Menger –  $G$ -irányítatlan, pontidegen utak tétel alapján  $\exists u, v$  között  $k$  pontidegen út
- ha  $G$  bármely két pontja között  $\exists k$  pontidegen út, akkor nem lehet ezeket  $k$ -nál kevesebb ponttal lefogni  $\rightarrow k$ -szoros összefüggés

[N76] megjegyzést írt:  $u - v$  éltől eltekintve.

### 8. Dirac tétel – $2x$ -esen összefüggő, átvezetett kör

- **Tétel**
  - legalább 3 pontú  $G$  gráf akkor és csak akkor  $2x$  összefüggő, ha tetszőleges 2 pontján át vezet kör
  - akkor és csak akkor  $2x$  összefüggő, ha bármely két élén át vezet kör
- **Bizonyítás**
  - első állítás triviális  $\rightarrow$  2 pontidegen  $u - v$  út együtt kört ad
  - ez átmegy  $v - n$
  - második állítás elsőből következik
  - ha  $G$   $2x$  összefüggő, akkor  $e, f$  éleken keresztül van kör
  - vegyünk fel 2 pontot  $\rightarrow$  osszuk két részre  $e, f$  élt
  - az így kapott gráf  $2x$  összefüggő
  - első állítás szerint ezen a 2 ponton át is megy kör
  - ez a kör az eredeti gráfban  $e - n, f - e$
  - megfordítás nyilvánvaló



BACK

## 11. tétel: BFS, Kruskal algoritmus

[N77] megjegyzést írt: Breadth First Search – Szélességi keresés

### Tétalcím

Szélességi bejárás (BFS). Minimális összsúlyú feszítőfák, Kruskal algoritmus.

### 1. BFS-algoritmus futása során nyilvántartottak

- $b(i)$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ): az  $i$ -ediként bejárt csúcs
- $t(v)$  ( $v \in V$ ):  $v$  távolsága  $s$ -től
- $m(v)$  ( $v \in V, v \neq s$ ):  $v$ -t megelőző csúcs az algoritmus által megtalált,  $s$ -ből  $v$ -be vezető legrövidebb úton
- $j$ : eddig bejárt csúcsok száma
- $k$ : jelenleg aktív csúcs sorszáma a  $b(1), b(2), \dots$  sorozatban

### 2. BFS-algoritmus

- $G$  gráf és  $s \in V$  csúcs
- **0. lépés:**
  - $j = 1, k = 1, b(1) = s, t(s) = 0, \forall v \neq s \text{-re } t(v) = *$
- **1. lépés:**
  - ha a  $b(k)$  csúcsnak van olyan  $v$  szomszédja, amelyre  $t(v) = *$ , akkor
    - $j = j + 1$
    - $b(j) = v$
    - $t(v) = t(b(k)) + 1$
    - $m(v) = b(k)$
    - vissza **1. lépéshez**
- **2. lépés:**
  - ha a  $k = j$ , akkor STOP
  - $k = k + 1$
  - vissza **1. lépéshez**



- az algoritmus *lineáris futásidejű*, tehát  $c \cdot e$  lépésszámú

### 3. BFS-algoritmus definíció

- Definíció
  - **fa**: algoritmus futtatása után kapott  $F$  feszítőfa
  - **összefüggő  $F$** : ha az eredeti bemeneti gráf is összefüggő volt, nem tartalmaz kört
  - bármely  $v \in V$  csúcsra az  $s$ -et  $v$ -vel összekötő  $F$ -beli út a legrövidebbek egyike az  $s$ -ből a  $v$ -be vezető  $G$ -beli utak közül

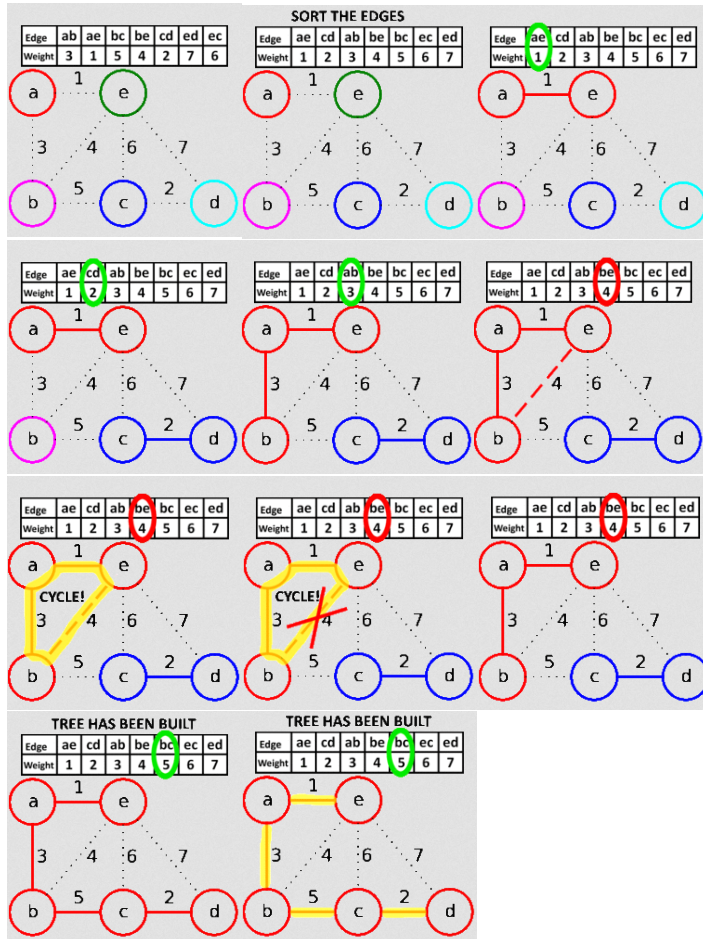
### 4. Kruskal algoritmus definíció

- *bemenet*
  - $G$  gráf
  - élekhez tartozó  $w$  súlyfüggvény
- *mohó algoritmus*:
  - éleket rendezzük sorba úgy, hogy a legalacsonyabb költségűek legyenek először a sorban
  - sorban előre haladunk
  - él bevétele esetén a kapott gráf körmentes marad, akkor bevesszük
  - addig ismételjük, amíg van izolált pont vagy az élsorozat végére nem érünk
  - → a kapott gráf a  *$G$  gráf minimális költségű feszítőfája*





- az algoritmus képekben:



### 5. Minimális súlyú feszítőfa

- Definíció
  - $G$  gráf és annak éleire rendelt  $w: E \rightarrow \mathbb{R}$  súlyfüggvény
  - gráfnak azon feszítőfája, melyre ez a súlyfüggvény minimális

[N78] megjegyzést írt: Legyen...



## 6. Kruskal-tétel

### o Tétel

- Kruskal-algoritmus minimális súlyú feszítőfát talál

### o Bizonyítás

- (bizonyítás első része: feszítőfát ad az algoritmus)
- $G$  egy összefüggő, súlyozott gráf
- $F$  egy részgráfja, amit az algoritmus produkál
- $F$ -ben nem lehet kör, mivel az algoritmus egy fát épít
  - sem összefüggő, mivel az első él (amit az algoritmus talál), ami összeköt két független komponenst  $F$ -ben nem hozhat létre kört
  - $\rightarrow F$  feszítőgráf
- (bizonyítás második része: az algoritmus minimális)
- teljes indukcióval bizonyítjuk
- $H$  élhalmaz, amit az algoritmus futása generál
- minimális súlyú éleket ez az élhalmaz tartalmazza
- algoritmus első lépésnél az állítás igaz, mert  $H$  még üres
- $k$ -adik lépésnél vegyük az állítást igaznak
- $T$  minimális súlyú feszítőfa, tartalmazza  $H$ -t
- ha az algoritmus által kiválasztott él  $e$ , szintúgy benne van a  $T$ -ben, akkor az állítás  $H + e$ -re is igaz
- $T + e$  részalmazban  $\exists$  egy  $C$  kör, és egy  $f$  él, ami befejezi  $C$  kört, de nem része  $H$ -nak
- $T - f + e$  szintén egy fa, és azonos az összsúlya  $T$ -jével
  - hiszen  $T$ -nek minimális az összsúlya
  - $f$ -nek a súlya nem lehet kisebb, mint  $e$ -nek, hiszen  $e$  helyett  $f$  élet választotta volna az algoritmus
- $\rightarrow T - f + e$  egy minimális súlyú feszítőfa
- $\rightarrow H$  feszítőfává válik, ami csak akkor igaz, ha  $H$  egy minimális súlyú feszítőfa

**[N79] megjegyzést írt:** Alkalmazása:  
 Pontok – városok  
 Élek – utak  
 Súly – hossz  
 pl. villamos hálózatok, Kirchhoff-törvények, áramkörti elemekhez súlyokat párosítunk

**[N80] megjegyzést írt:** Tehát van súlyfüggvény hozzárendelve.

**[N81] megjegyzést írt:** Ha nem létezne, akkor  $e$ -t nem vettük volna be, mivel kört produkált volna  $H + f$ -ben.



BACK

## 12. tétel: Dijkstra, Bellman-Ford algoritmus

### Tételcím

Legrövidebb utak adott csúcsból: Dijkstra és Bellman-Ford algoritmusai.

### 1. Algoritmusok futása, kulcslépések

- o algoritmus futása során következőket tartjuk számon
  - $l(e)$  –  $e$  él hossza
  - $d(v)$  –  $v$  pontban az  $s$  kezdőpontból eddigi legrövidebb út hossza  
 $d(s) = 0$
- o **kulcslépések**
  - (\*)  $d(s) = 0, \forall v \neq s$ -re  $d(v) = \infty$
  - (\*\*) ha  $x$ -ből vezet egy  $e$  él  $y$ -ba, és  $d(y) > d(x) + l(e)$ , akkor  
 $d(y) = d(x) + l(e)$

### 2. Dijkstra-algoritmus

- o *optimalizálatlan*  $c \cdot n^3$  lépésszámú algoritmus:
- o **0. lépés:**
  - $S = s, T = V \setminus s$  és (\*)
- o **1. lépés:**
  - $S$ -beli pontból  $\forall T$ -beli pontba vezető  $e$  élre végezzük el (\*\*) javítást
- o **2. lépés:**
  - $T$ -beli pontok közül legyen  $v_0$  az, amelyiken a  $d(v)$  érték a legkisebb
  - tegyük át  $v_0$ -t  $T$ -ből  $S$ -be
- o **3. lépés:**
  - ha  $T$  üres  $\rightarrow$  STOP, különben vissza **1. lépéshez**
    - *optimalizált*  $c \cdot n^2$  lépésszámú algoritmus:
      - **0. lépés:**
        - $S = s, T = V \setminus s$  és (\*), valamint  $v_0 = s$

[N82] megjegyzést írt: Ejtsd: Dejksztra



**1. lépés:**

- csak  $v_0$ -ból  $T$ -beli pontokba vezető  $e$  élekre végezzük el (\*\*) javítást

**2. lépés:**

- $T$ -beli pontok közül legyen  $v_0$  az, amelyiken a  $d(v)$  érték a legkisebb
- tegyük át  $v_0$ -t  $T$ -ből  $S$ -be

**3. lépés:**

- ha  $T$  üres  $\rightarrow$  STOP, különben vissza **1. lépéshez**

**3. Ford-algoritmus**

o **0. lépés:**

- számozzuk meg az éleket 1-től  $e$ -ig
- tetszőleges sorrendben rögzítsük le
- $i = 1$  és (\*)

o **1. lépés:**

- a rögzített sorrendben végezzük el a (\*\*) javítást  $\forall$  élen

o **2. lépés:**

- $i = i + 1$
- ha  $i > v \rightarrow$  STOP, különben vissza **1. lépéshez**

▪ **módosított 2. lépés:**

- ha az **1. lépés** során egyetlen javítás sem történt  $\rightarrow$  STOP
- különben:  $i = i + 1$
- ha  $i \leq v + 1$ , folytassuk **1. lépésnél**
- ha  $i > v + 1 \rightarrow$  STOP

**[N83] megjegyzést írt:** Megengedi a negatív súlyú éleket is, valamint az algoritmus egyszerűbb, mint a Dijkstra.

**[N84] megjegyzést írt:** A lépésszáma  $c \cdot e \cdot v$  jóval nagyobb, mint  $n^2$ . Van erre egy módosított 2. lépés, amely jelzi, ha negatív összsúlyú körben kerültünk.

**[N85] megjegyzést írt:** És megvannak a minimális úthosszak.

**[N86] megjegyzést írt:** És van negatív összsúlyú kör.



BACK

## 13. tétel:

### Flyod legrövidebb út, aciklikus gráf

#### Tétalcím

Flyod algoritmus az összes pontpár közti legrövidebb út meghatározására. Aciklikus irányított gráf fogalma, topologikus sorrend. Algoritmus legrövidebb és leghosszabb utak meghatározására aciklikus irányított gráfban.

#### 1. Floyd-algoritmus

- o gráfban lévő összes pontpár közötti távolságok megadása
  - Ford-algoritmus is jó, de az lassabb:  $c \cdot ev^2$ , míg a Flyod:  $c \cdot v^3$
- o sikeres futás feltétele, hogy a gráfban NE legyen negatív összsúlyú kör
- o TFH.  $G$  irányított gráf  $V(G) = v_1, v_2, \dots, v_n$  pontokon
- o TFH. nincs negatív összsúlyú irányított kör
- o  $v_i$ -ből  $v_j$ -be mutató súly legyen  $l(i, j)$
- o ha nincs él egyikből a másikba, akkor legyen  $l(i, j) = \infty$
- o illetve  $l(i, j) = 0, \forall i = 1, \dots, n$ -re
- o legyen  $d^{(k)}(i, j)$  a  $v_i$ -ből  $v_j$ -be vezető legrövidebb olyan irányított út hossza, mely csak  $k$ -nál szigorúan kisebb pontokon megy át
- o így  $d^{(1)}(i, j) = l(i, j)$  és  $d^{(n+1)}$  lesz az eredetileg keresett legrövidebb irányított út hossza  $v_i$ -ből  $v_j$ -be
- o  $v_i$ -ből  $v_j$ -be legrövidebb út csak olyan lehet, mely  $k + 1$ -nél szigorúan kisebb pontokon megy át, vagy  $v_k$ -n, vagy nem
- o ha nem megy át:  $d^{(k+1)}(i, j) = d^{(k)}(i, j)$
- o ha átmegy:  $d^{(k+1)}(i, j) = d^{(k)}(i, k) + d^{(k)}(k, j)$
- o azt kell megnézni, hogy mely esetben találunk rövidebb utat
- o algoritmus
  - 0. lépés:
    - $\forall i, j$  rendezett párra legyen  $d^{(1)}(i, j) = l(i, j)$  és  $k = 2$

**[N87] megjegyzést írt:** Ezek után már világos, hogy az algoritmus lépésszáma  $c \cdot v^3$ -nal arányos.



▪ **1. lépés:**

- $\forall i, j$  rendezett párra

$$d^{(k+1)}(i, j) = \min\{d^{(k)}(i, j), d^{(k)}(i, k) + d^{(k)}(k, j)\}$$

▪ **2. lépés:**

- ha  $k = n + 1$ , akkor STOP
- különben  $k = k + 1$  és folytassuk az **1. lépés**nél

## 2. Irányított aciklikus gráf

○ Definíció

- egy  $G$  gráfot akkor nevezünk irányított aciklikus gráfnak ( $DAG$ ), ha irányított élei vannak és nem tartalmaz kört

## 3. Topologikus elrendezés

○ Definíció

- legyen  $G$  gráf irányított
- $G$  topologikus elrendezés a csúcsoknak egy olyan  $v_1, v_2, \dots, v_n$  sorrendje, melyben  $x \rightarrow y \in E$  esetén  $x$  előbb van, mint  $y$

## 4. Topologikus elrendezés

○ Tétel

- ha  $G$  irányított gráf aciklikus, akkor  $\exists$  benne nyelő
  - azaz olyan pont, amelyből nincs kimenő él

○ Bizonyítás

- legyen  $P$  a leghosszabb irányított utak egyike,  $v$  legyen a végpontja
- TFH.  $v$  nem nyelő
- járjuk be az utat topologikus sorrendben
- az előző állítás annyit jelent, hogy  $P$  vagy nem a legutolsó elem a topologikus elrendezésben (ez ellentmondás lenne)
- vagy egy, a topologikus sorrendben előrébb lévő ponthoz csatlakozik vissza (ismét ellentmondás)

## 5. Topologikus elrendezés

○ Tétel

- egy  $G$  irányított gráfhoz akkor és csak akkor létezik topologikus elrendezés, ha az aciklikus

[N88] megjegyzést írt: Azaz, ha  $x = v_i, y = v_j$ , akkor  $i < j$



o **Bizonyítás**

- keressünk ebben a gráfban egy nyelőcsúcsot, legyen ez a  $v_n$
- vegyük el ezt a csúcsot
- ekkor  $G/v_n$ -ben  $v_{n-1}$  lesz a nyelő
- ismételjük, ameddig semmi sem marad
- amelyeket elvettünk, ha fordítva sorba rendezzük, akkor topologikus sorba rendezése lesz  $G$ -nek
- a DFS is generál egy ilyet a futása során, ha nincs benne visszaél

[N89] megjegyzést írt: A szükségeset triviális bizonyítani, viszont az elégségeset nem. Az előbbi lemma állítását felhasználjuk a bizonyításhoz.

[N90] megjegyzést írt: Tehát a legvégén lesz az először elvett elem.

[N91] megjegyzést írt: Tehát kör.

**6. Legrövidebb és leghosszabb út keresése DAG-ben**

- o a topologikus elrendezést használva lineáris időben
- o tehát  $n + e$ -vel arányos lépésszámban megoldható a leghosszabb/legrövidebb út keresése
- o input legyen a  $G$  irányított gráf, és annak egy topologikus sorrendje  $s$
- o algoritmus

▪ **0. lépés:**

- $t(s) = 0$
- $\forall v \neq s$ -re  $t(v) = \infty$ ,  $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}$

▪ **1. lépés:**

```
for i = 2 to n do
  if  $\exists e = \overrightarrow{v_j v_i}$  él, melyre  $t(v_j) \neq \infty$ 
  then
     $t(v_i) = \min/\max(t(v_j) + w(e): e = \overrightarrow{v_j v_i}, t(v_j) \neq \infty)$ 
end for
```



BACK

## 14. tétel: DFS algoritmus, erdő

### Tétalcím

A DFS algoritmus, DFS-erdő, az élek osztályozása. A DFS alkalmazása az aciklikusság eldöntésére, illetve topologikus sorrend meghatározására.

### 1. DFS algoritmus

- bemenet: egy  $n$  csúcsú  $G$  irányított gráf és egy  $s \in V$  csúcs
  - $d(v)$ :  $v$  csúcs **mélységi száma**
  - $f(v)$ :  $v$  csúcs **befejezési száma**
  - $m(v)$ :  $v$ -t megelőző csúcs
  - $a$ : a jelenlegi csúcs
  - $g$ : az aktuális **gyökérpont**
  - $D$ : az eddigi legnagyobb mélységi szám
  - $F$ : az eddigi legnagyobb befejezési szám
- algoritmus
  - **0. lépés:**
    - $d(s) = 1$
    - $\forall v \neq s$ -re  $d(v) = *$
    - $\forall v$ -re  $f(v) = *, m(v) = *, a = s, g = s, D = 1, F = 0$
  - **1. lépés:**
    - ha létezik olyan  $e = \overrightarrow{av}$  él, melyre  $d(v) = *$ , akkor
      - ♦  $D = D + 1$
      - ♦  $d(v) = D$
      - ♦  $m(v) = a$
      - ♦  $a = v$
      - ♦ vissza az **1. lépéshez**

[N92] megjegyzést írt: Tehát, amelyből a  $v$ -t a bejárás elérte.





▪ **2. lépés:**

- $F = F + 1$
- $f(a) = F$
- ha  $a \neq g$ , akkor  $a = m(a)$  és vissza az **1. lépéshez**
- ha  $D = n$ , akkor STOP
- válasszunk olyan  $v$  csúcsot, melyre  $d(v) = *$
- $g = v$ ,  $a = v$ , és vissza az **1. lépéshez**

**2. DFS-erdő**

○ Definíció

- $s$  csúcsból indítva  $G$  irányított gráfban lefuttattuk a DFS algoritmust
- a futáshoz tartozó DFS erdő  $F$
- legyen  $e = \overrightarrow{uv}$  a  $G$ -nek tetszőleges éle, ekkor:
  - $e$ -t **faél**nek nevezzük, ha  $e \in E(F)$
  - $e$ -t **előreél**nek nevezzük, ha nem faél, de  $F$ -ben van  $u$ -ból  $v$ -be irányított út
  - $e$ -t **visszaél**nek nevezzük, ha  $F$ -ben van  $v$ -ből  $u$ -ba irányított út
  - $e$ -t **keresztél**nek nevezzük, ha  $F$ -ben sem  $u$ -ból  $v$ -be, sem  $v$ -ből  $u$ -ba nincs irányított út

[N93] megjegyzést írt: Vagyis  $v$  leszámazottja  $u$ -nak.

[N94] megjegyzést írt: Tehát  $v$  őse  $u$ -nak.

**3. DFS és aciklikusság**

○ Tétel

- ha  $G$  irányított gráf aciklikus, a DFS futtatásakor nem keletkezik visszaél
- ha nincs visszaél, akkor  $f(v)$  szerinti csökkenő sorrend a topologikus sorrend

○ Bizonyítás

- ha keletkezik visszaél, és  $e = \overrightarrow{uv}$  ilyen, akkor  $G$  irányított gráf nyilván tartalmaz kört
- az  $F$  DFS-erdő tartalmaz  $v$ -ből  $u$ -ba irányított utat, amelyet  $e$ -vel kiegészítve irányított körré zárhatunk
- TFH. nem keletkezik visszaél

[N95] megjegyzést írt: Mert  $e$  visszaél.



- ha megmutatjuk a tétel 2. állítását, hogy a csúcsoknak a befejezési számozás szerinti fordított sorrendje topologikus rendezés, akkor ebből következik  $G$  aciklikussága is
- meg kell mutatni, hogy  $G \forall e = \overrightarrow{uv}$  élére  $f(v) < f(u)$
- feltettük, hogy visszaél nem keletkezett, ezért  $e$  lehet fa-, előre- és keresztél
- ha  $e$  fa- vagy előreél, akkor DFS eljárás során  $u$  első aktívvá válásakor az  $u$  befejezéséig tartó szakasza során érte el  $v$ -t
- így ennek során kellett befejezni azt
- tehát a  $v$ -t előbb fejezte be  $u$ -nál  $\rightarrow f(v) < f(u)$
- ha pedig  $e$  keresztél, akkor  $e$  vizsgálatának pillanatában  $f(v)$  már kapott értéket
- $u$  viszont aktív csúcs volt, így ekkor még  $f(u) = *$
- mivel az eljárás egyre nagyobb befejezési számokat ad, ezért  $f(v) < f(u)$  erre is teljesülni fog