A Számítástudomány alapjai

1. ZH 2010. X. 15. 8^{15}

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.
Kérjük, minden résztvevő **nevét, NEPTUN kódját** és **gyakorlatvezetője nevét**a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel, mert ennek hiányában a dolgozatot nem értékeljük.
Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe.
Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

Feladatok

1. A 15 fős képviselőtestület választásra 5 párt állít egy-egy 15 fős listát. A szavazást követően mindegyik párt a listája elejéről az elért eredményének megfelelő számú képviselőt küld a testületbe, úgy, hogy a testület összesen 15 fős legyen. Hányféle lehet a képviselőtestület összetétele a szavazás után?

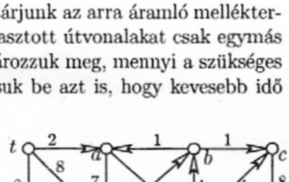
2. Tegyük fel, hogy az F fának csak első- és negyedfokú csúcsai vannak, szám szerint n_1 ill. n_4. Igazoljuk, hogy $n_1 = 2 \cdot n_4 + 2$.

3. Tegyük fel, hogy a G gráf 3-szorosan élösszefüggő és létezik Euler-körsétája. Mutassuk meg, hogy G 4-szeresen élösszefüggő.

4. Legyenek az F fa csúcsai az $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$, élei pedig $v_i v_{i+1}$, ha $1 \leq i \leq 4$ ill. $v_5 v_j$, ha $6 \leq j \leq 10$. Tegyük fel, hogy F a G egyszerű gráf v_1-ből indított szélességi bejárásához tartozó fa. Legfeljebb hány éle lehet G-nek?

5. Baj van: átszakadt a hegytetőn a zagytározó gátja. Szerencsére az iszap nem veszélyes, slaggal lemosható. Az mellékelt ábrán t jelzi a tározót, s pedig a szerencsétlen helyen fekvő várost, amit meg kell védeni. A nyilak arra vezetnek, amerre az adott mélyedésben folyik a zagy. (Furcsa errefelé a gravitáció: megtörténhet, hogy végig lejt egy a kiindulópontjába visszatérő útvonal.) A nyíl mellett álló számok azt mutatják, hogy a katasztrófavédelemnek hány percig tart elzárni az adott nyíl mentén lezúduló folyadék útját. Az a cél, hogy a lehető legrövidebb idő alatt minden lehetséges s-be vezető utat lezárjunk az arra áramló melléktermék elől. Mivel csak egy munkagép működik, ezért a kiválasztott útvonalakat csak egymás után zárhatjuk le. Segítsünk a katasztrófavédelemnek: határozzuk meg, mennyi a szükséges legrövidebb idő, ami alatt a munka elvégezhető. Bizonyítsuk be azt is, hogy kevesebb idő nem elég minderre.

6. Legyenek a G irányítatlan gráf csúcsai az $1, 2, \ldots, 100$ számok, az i és j csúcs között pedig akkor fusson él, ha $j < i$ esetén az $i - j$ szám 4-gyel osztva 1-et ad maradékul. Páros-e a G gráf?



Gyakorlatvezetők és gyakorlatok Csákány Rita (Sz-Cs, IB 140), Csönde Gergely (Cs, IB 145), Drótos Márton (Cs, IB 141, Sz R 504), Faller Beáta (Sz-Cs, IB 142), Fejér Attila (Sz, QBF10), Fleiner Tamás (Sz, IB 141, Cs IB 138), Karkus Péter (Cs, IB 146), Kiss Gergely (Sz-CS, IB 139), Vidor Sára (Sz, IB 145), Vígh Dorottya (Sz, IB 146)

Jó munkát!

A Számítástudomány alapjai

1. ZH javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

1. A 15 fős képviselőtestület választásra 5 párt állít egy-egy 15 fős listát. A szavazást követően mindegyik párt a listája elejéről az elért eredményének megfelelő számú képviselőt küld a testületbe, úgy, hogy a testület összesen 15 fős legyen. Hányféle lehet a képviselőtestület összetétele a szavazás után?

   A képviselőtestület összetétele annyiféle lehet, ahányféleképp a 15 képviselői helyet el lehet osztani 5 párt között. (2 pont)
   Mind a 15 helyre 5-féle pártból lehet választani, a helyek sorrendje pedig nem számít, (2 pont)
   ezért 5 elem 15-ödosztályú ismétléses kombinációjáról van szó. (3 pont)
   Az órán tanultak szerint ilyenből $\binom{19}{4}$ van, és ez a válasz a feladat kérdésére is. (3 pont)

2. Tegyük fel, hogy az F fának csak első- és negyedfokú csúcsai vannak, szám szerint n_1 ill. n_4. Igazoljuk, hogy $n_1 = 2 \cdot n_4 + 2$.

   Tanultuk, hogy minden véges gráfban a fokszámösszeg az élszám kétszerese, (3 pont)
   továbbá, hogy egy n csúcsú fának pontosan $n-1$ éle van. (2 pont)
   Ez F-re nézve azt jelenti, hogy $n_1 + 4n_4 = 2n - 2$, ahol $n = n_1 + n_4$ a G csúcsainak száma. (2 pont)
   Innen azt kapjuk, hogy $n_1 + 4n_4 = 2(n_1 + n_4) - 2$, (2 pont)
   amit rendezve éppen a bizonyítandó állítást kapjuk: $n_1 = 2 \cdot n_4 + 2$. (1 pont)

3. Tegyük fel, hogy a G gráf 3-szorosan élösszefüggő és létezik Euler-körsétája. Mutassuk meg, hogy G 4-szeresen élösszefüggő.

   A G gráf 3-élöf, ezért legfeljebb két élét elhagyva mindenképp összefüggő marad. (2 pont)
   Mivel G-nek van Euler-körsétája, a tanultak szerint G minden csúcsának páros a fokszáma. (2 pont)
   Azt kell igazolnunk, hogy G 4-élöf, azaz bárhogyan is hagyunk el G-ből legfeljebb 3 élt, G-nek összefüggőnek kell maradnia. (2 pont)
   Tegyük fel indirekt, hogy ez nem így van, ami azt jelenti, hogy valahogyan elhagyható G-ből 3 él úgy, hogy G ettől szétessen. (1 pont)
   Ha az ekkor keletkező komponensek egyikében a csúcsokat egy ponttá húzzuk össze, akkor olyan gráfot kapunk, amiben minden csúcs foka páros, kivéve az összehúzott csúcsét, aminek 3 a foka. (2 pont)
   Ez azonban lehetetlen, hiszen tanultuk, hogy a fokszámösszeg minden véges gráfban páros, így a páratlan fokú csúcsok száma semmiképp sem lehet pontosan egy. A kapott ellentmondás a feladat állításának helyességét bizonyítja. (1 pont)

4. Legyenek az F fa csúcsai az $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$, élei pedig $v_i v_{i+1}$, ha $1 \le i \le 4$ ill. $v_5 v_j$, ha $6 \le j \le 10$. Tegyük fel, hogy F a G egyszerű gráf v_1-ből indított szélességi bejárásához tartozó fa. Legfeljebb hány éle lehet G-nek?

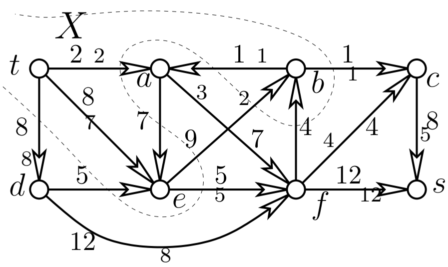
   Tanultuk, hogy az F fában minden v_1-ből vezető út a G gráfnak egy legrövidebb útja az adott csúcsba. (2 pont)
   Ez azt jelenti, hogy a $v_1, v_2, \ldots, v_5$ pontokból nem indulhat további éle G-nek, hiszen ekkor valamelyik csúcsba vezetne v_1ből rövidebb út, mint a fabeli. (3 pont)
   A G gráfnak tehát csak a $v_6, v_7, \ldots, v_{10}$ csúcsok között vezethet további éle. (1 pont)
   Ezen csúcsok közé bárhogy is húzunk be további éleket, az F fa az így kapott G gráf szélességi bejáráshoz tartozó fája marad. (2 pont)

Mivel 5 csúcs közé $\binom{5}{2} = 10$ él húzható, a G gráfnak legfeljebb $10 + 9 = 19$ éle lehet, ahol a 9 az F élszáma. (2 pont)

5. Baj van: átszakadt a hegytetőn a zagytározó gátja. Szerencsére az iszap nem veszélyes, slaggal lemosható. Az mellékelt ábrán t jelzi a tározót, s pedig a szerencsétlen helyen fekvő várost, amit meg kell védeni. A nyilak arra vezetnek, amerre az adott mélyedésben folyik a zagy. (Furcsa errefelé a gravitáció: megtörténhet, hogy végig lejt egy a kiindulópontjába visszatérő útvonal.) A nyíl mellett álló számok azt mutatják, hogy a katasztrófavédelemnek hány percig tart elzárni az adott nyíl mentén lezúduló folyadék útját. Az a cél, hogy a lehető legrövidebb idő alatt minden lehetséges s-be vezető utat lezárjunk az arra áramló melléktermék elől. Mivel csak egy munkagép működik, ezért a kiválasztott útvonalakat csak egymás után zárhatjuk le. Segítsünk a katasztrófavédelemnek: határozzuk meg, mennyi a szükséges legrövidebb idő, ami alatt a munka elvégezhető. Bizonyítsuk be azt is, hogy kevesebb idő nem elég minderre.

Ha a feladathoz tartozó ábra gráfját hálózatként értelmezzük, akkor az a célunk, hogy ebben a hálózatban minimális kapacitású ts-vágást találjunk. (A ts-vágás kapacitását (szemben az st-vágással a t-t tartalmazó rész felől az s-t tartalmazó rész felé mutató élek összkapacitása adja.) (3 pont)
A minimális ts-vágás meghatározását a hálózat egy maximális folyamának megkeresésével az órán tanult módon végeztük el. (3 pont)
Azt kaptuk, hogy az ábrán szaggatottal jelölt vágás kapacitása 17, az apróbb számokkal jelölt folyam nagysága pedig 17. (Amelyik élen nincs más szám a kapacitáson kívül, ott nem folyik folyam, azaz $f(e) = 0$.) (2 pont)
A folyam létezése miatt bármely ts-vágás kapacitása legalább 17. Ezek szerint valóban minimális ts-vágást találtunk, (1 pont)
így a válasz az, hogy a katasztrófavédelemnek legalább 17 percre van szüksége, (1 pont)
és ehhez a kijelölt ts-vágás t-től s felé futó éleket kell lezárni. (0 pont)

Ez egy gonosz feladat: nemcsak azért, mert az s és t szerepe felcserélődött, hanem amiatt is, hogy a folyamnak (ami a vágás minimalitását bizonyítja) nincs szemléletes jelentése, szemben a megszokott modellel, aholis vmi termék áramlik.



6. Legyenek a G irányítatlan gráf csúcsai az $1, 2, \ldots, 100$ számok, az i és j csúcs között pedig akkor fusson él, ha $j < i$ esetén az $i - j$ szám 4-gyel osztva 1-et ad maradékul. Páros-e a G gráf?

Ha i és j között él fut, akkor i és j közül pontosan az egyik páros, a másik páratlan. (3 pont)
Ez azt jelenti, hogy se két páros szám, se két páratlan szám között nem futhat él, (3 pont)
így G valóban páros: a színosztályokat a 100-nál nem nagyobb páros ill. páratlan pozitív egészek alkotják. (4 pont)

Meg lehet persze másképp is oldani.
Sosem fut él két csúcs között akkor, ha azok 4-gyel osztva ugyanannyi maradékot adnak. (2 pont)
Két különböző maradékosztály között pedig csak akkor futhat él, ha a maradékok különbsége 1 vagy a 0-ás és a 3-as maradékosztályról van szó. (2 pont)
A G gráf tehát páros, hiszen az 1-es és 3-as ill. a 2-es és 0-ás maradékosztály között nem vezet él, és ezek adják a színosztályokat. (6 pont)