[15] 1, i, [8p]

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x\,\mathrm{arctg}(2x^2)} = \frac{(x\,\mathrm{arctg}(2x^2))'}{2\sqrt{x\,\mathrm{arctg}(2x^2)}} = \frac{\mathrm{arctg}(2x^2) + x\frac{4x}{1+(2x^2)^2}}{2\sqrt{x\,\mathrm{arctg}(2x^2)}} =$$

$(x>0)$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathrm{arctg}(2x^2)}{x}} + \frac{2x^2}{1+4x^4}\cdot\frac{1}{\sqrt{x\,\mathrm{arctg}(2x^2)}}$$

Ezt az alakot is elfogadjuk.

ii, [7p]

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\mathrm{tg}(3x)}\right) = \frac{\frac{1}{x}\cdot \mathrm{tg}(3x) - \ln x\cdot\frac{3}{\cos^2(3x)}}{\mathrm{tg}^2(3x)} = \frac{\sin(3x)\cos(3x) - 3x\ln x}{x\sin^2(3x)}$$

$(x>0)$

Kisebb rendezési hiba: −2p; deriválási szabály eltévesztése: −5p.

2, [25] Legyen (x_0, y_0) az érintési pont koordinátája. Így $y_0 = e^{x_0^2/12}$ (1). 3

Ebben a pontban a görbéhez húzott érintő egyenlete:

$$y'(x) = \frac{x}{6}e^{x^2/12}\ ; \quad (y-y_0) = \underbrace{\frac{x_0}{6}e^{x_0^2/12}}_{y'(x_0)}(x-x_0) \quad 8$$

Az érintő átmegy az $(x,y)=(1,0)$ ponton, így $(0-y_0) = \frac{x_0}{6}e^{x_0^2/12}(1-x_0)$ (2) 5

Az (1)-(2) egyenletrendszert kell megoldanunk (x_0, y_0)-ra. (1) figyelembevételével (2)-ből adódik: $-1 = \frac{x_0}{6}(1-x_0)$ 4 $\Rightarrow x_0^2 - x_0 - 6 = (x_0-3)(x_0+2) = 0$

$x_0^{(1)} = 3 > 0$ ✓ 2 ; $\cancel{x_0^{(2)} = -2 < 0}$ ↯ ; $y_0 = e^{9/12} = e^{3/4}$ 3

3, i, [30] [16] Közös nevezőre hozás után L'Hospital szabállyal dolgozunk.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right) \overset{5}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x - x}{x^3}\right) \overset{\left(\frac{0}{0}\right),\ L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2} \overset{4}{\underset{"\frac{0}{0}"\ L'H}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x} \overset{4}{=} -\frac{1}{6} \quad 3$$

ii, A L'Hospital szabály nem vezet eredményre. [14]

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\Big(\underbrace{x}_{\to 0\ (2)}\cdot\underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\to 1\ (4)}\cdot\underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{korlátos}\ (4)}\Big) \overset{2}{=} 0 \quad 2$$

$0 \cdot 1 \cdot$ korlátos

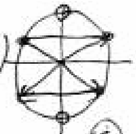
4, [20] i, $f(x) = e^{-2\sin^2(x)} \cdot \sin x$; $f'(x) = -4\sin x\cos x\, f(x) + e^{-2\sin^2 x}\cos x =$
[50]

$= (1-4\sin^2 x)\cos x\, e^{-2\sin^2 x}$ (4)

f folytonos ; $[0, \frac{3}{4}\pi]$ kompakt $\xRightarrow{\text{Weierstrass II}}$ f felveszi maximumát, minimumát (4)

f diff.-ható $\Rightarrow$ $\forall$ lokális szélsőérték-helyen $f'=0$.

$$f'(x)=0 \iff \begin{cases} 1-4\sin^2 x = 0 \iff \sin x = \pm\frac{1}{2} \iff x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{vagy } \cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$



(6)

Így a $[0, \frac{3}{4}\pi]$-ben vizsgálandó pontok:

$f(0) = 0$ (1) (végpont) ; $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} e^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{e}}$ (1) ; $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{e^2}$ (1) ; $f(\frac{3}{4}\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot e}$ (1) (végp.)

Tehát $[0, \frac{3}{4}\pi]$-en f maximuma: $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2\sqrt{e}}$ (1) ; f minimuma: $f(0) = 0$ (1)

$(0 < \frac{1}{e^2} < \frac{1}{\sqrt{2}e} < \frac{1}{2\sqrt{e}})$

---

ii, [10] f folytonos, diff.-ható, periodikus 2π szerint. (2) Weierstrass II. tétele értelmében felveszi szélsőértékeit (2) és Bolzano tétele szerint felvesz minden értéket a két szélsőérték között. (2) Mert az $f(x) = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ helyeken kell vizsgálni f értékeit:

$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{e^2}$; $f(-\frac{\pi}{2}) = \frac{-1}{e^2}$; $f(\frac{\pi}{6}) = f(\frac{5\pi}{6}) = \frac{1}{2\sqrt{e}}$; $f(-\frac{\pi}{6}) = f(-\frac{5\pi}{6}) = \frac{-1}{2\sqrt{e}}$ (4)

Tehát $R_f = [-\frac{1}{2\sqrt{e}}, +\frac{1}{2\sqrt{e}}]$

MEGJ.: A 4/ii feladatban $D_f = \mathbb{R}$. Ha valaki $f|_{[0, 3\pi/4]}$ értékkészletét adja meg, max. 5 pontot kaphat erre a részre.

5, Legyen $g(x) = \ln f(x) = \ln\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)+2\right)$. Mivel a logaritmus függv.
[7] monoton, elég $A := \frac{g(a)+g(b)}{2} = \frac{1}{2}\left(\ln f(a) + \ln f(b)\right) = \ln\sqrt{f(a)f(b)}$
és $B = g\left(\frac{a+b}{2}\right) = \ln f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ közötti egyenlőtlenséget találni. (2)

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f} = \frac{-1}{2}\,\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)+2}\,; \quad g''(x) = \frac{-1}{4}\,\frac{\cos(x/2)\left(\cos(x/2)+2\right)+\sin^2(x/2)}{\left(\cos(x/2)+2\right)^2} =$$

$$= -\,\frac{1+2\cos(x/2)}{4\left(\cos(x/2)+2\right)^2} \quad (2)$$

Ha $x \in [3,4]$, akkor $\frac{x}{2} \in \left[\frac{3}{2}, 2\right] \subset \left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$, tehát $1+2\cos(x/2) > 0$, így (2)
$x \in [3,4]$ esetén $g''(x) < 0$. Ez azt jelenti, hogy g itt konkáv, A

$$g\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{g(a)+g(b)}{2} \iff f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \sqrt{f(a)f(b)}\,, \text{ ha } a, b \in [3,4] \quad (1)$$