Gyakorlatok

2010. ősz

Tartalomjegyzék

1. Sorozatok, sorok **3**
1.1. Speciális (végtelenhez tartó) sorozatok 3
1.2. Nagyságrendek összehasonlítása (n^n, $n!$, 2^n, n, (n^k), $\log n$) 6
1.3. Sorozatok határértéke 7
1.4. Két nevezetes határérték ($\sqrt[n]{p} \xrightarrow{n\to\infty} 1$, $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$) 12
1.5. Rekurzíve megadott sorozatok 14
1.6. $(1 + x/n)^n \xrightarrow{n\to\infty} e^x$ határértékkel kapcsolatos feladatok 17
1.7. Limesz szuperior, limesz inferior 21
1.8. Egy alkalmazás: a kör területe 23
1.9. Numerikus sorok 25
1.10. Alternáló sorok, Leibniz sorok 26
1.11. Majoráns kritérium, minoráns kritérium 29
1.12. Abszolút konvergencia, feltételes konvergencia 30
1.13. Hibaszámítás pozitív tagú sorokra 32

2. Egyváltozós valós függvények határértéke, folytonossága **35**
2.1. Függvény határértéke 35
2.2. Szakadások típusai 39
2.3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ határértékkel kapcsolatos példák 41

3. Egyváltozós valós függvények deriválása **44**
3.1. Differenciálás a definícióval 44
3.2. A deriválási szabályok gyakorlása 45
3.3. A deriválási szabályok + definíció gyakorlása 48
3.4. Elemi függvények 51
3.5. L'Hospital szabály 56
3.6. Intervallumon deriválható függvények tulajdonságai, függvényvizsgálat 57
3.7. Abszolút szélsőérték 62
3.8. Implicit megadású függvények deriválása 64
3.9. Paraméteres megadású görbék 66

4. Egyváltozós valós függvények integrálása **67**
4.1. Határozatlan integrál 67
4.2. Parciális integrálás 70
4.3. Racionális törtfüggvények integrálása 72
4.4. Határozott integrál 75
4.5. Területszámítás 77
4.6. Integrálfüggvény 78
4.7. Integrálás helyettesítéssel 80
4.8. Improprius integrál 83

4.9. Integrálkritérium 86

1. Sorozatok, sorok

1.1. Speciális (végtelenhez tartó) sorozatok

Definíció: Az a_n valós számsorozat végtelenhez tart, jelben $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty}$
(vagy más jelöléssel $a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, vagy csak $a_n \to \infty$), ha

$\forall\ P > 0\ \ (P \in \mathbb{R})$ esetén $\exists\ N(P) \in \mathbb{N}$, melyre
$$a_n > P\,, \text{ ha } n > N(P).$$

Definíció: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty}$, ha

$\forall\ M < 0\ \ (M \in \mathbb{R})$ esetén $\exists\ N(M) \in \mathbb{N}$, melyre
$$a_n < M\,, \text{ ha } n > N(M).$$

(Lehet $M > 0$-val is definiálni, ekkor ... $a_n < -M$ ...)

1. Feladat: $\boxed{a_n = 6n^3 + 3 \to \infty}$, mert

$$6n^3 + 3 > P \iff 6n^3 > P - 3 \iff n > \sqrt[3]{\frac{P-3}{6}},$$

tehát $N(P) \geq \left[\sqrt[3]{\frac{P-3}{6}}\right]$.
($[x]$ az x egész részét jelöli, mely az x-nél nem nagyobb legnagyobb egész, pl.: $[-0.8] = -1$, $[1.95] = 1$.)

2. Feladat: $\boxed{a_n = 6n^3 + 3n \to \infty\ ,}$

$6n^3 + 3n > P$: most így nem megy. Helyette becslés:

$$6n^3 + 3n \geq 6n^3 > P \quad \rightsquigarrow \quad n > \sqrt[3]{\frac{P}{6}} \quad \rightsquigarrow \quad N(P) \geq \left[\sqrt[3]{\frac{P}{6}}\right].$$

(Az alsó becslésnél a $6n^3$ helyett állhatna n^3, $3n$, n, stb.)

3. Feladat: $\boxed{a_n = \sqrt{n^2 - n}\ , \quad \lim a_n = ?}$

$n^2 - n$ „határozatlan”, $\infty - \infty$ alakú, de az $a_n = \sqrt{n(n-1)}$ alakból már látszik, hogy $a_n \to \infty$.

Az $N(P)$ küszöbindex meghatározása:

Az $\sqrt{n^2-n} > P$ egyenlőtlenséget nehézkes egzaktul megoldani. Inkább valamilyen becslést alkalmazunk. Természetesen több lehetőség van, például:

$$\sqrt{n^2-n} = \sqrt{n(n-1)} > \sqrt{(n-1)(n-1)} = n-1 > P \qquad \rightsquigarrow n > P+1$$

$$\text{Ennek megfelelően:} \quad N(P) \geq [P+1].$$

Vagy:

$$\sqrt{n^2-n} > \sqrt{n^2 - \frac{n^2}{2}} = \frac{n}{\sqrt{2}} > P \qquad \rightsquigarrow n > \sqrt{2}\,P.$$

Ez a becslés akkor igaz, ha $\dfrac{n^2}{2} > n$, azaz ha $n > 2$, tehát a küszöbindex: $N(P) \geq \max\left\{2\,,\,[\sqrt{2}\,P]\right\}$.

4. Feladat: $\boxed{a_n = n^3 - 3n^2 + 5n + 9 \to \infty}$, mert:

$$n^3 - 3n^2 + 5n + 9 > n^3 - 3n^2 \overset{*}{>} n^3 - \frac{n^3}{2} = \frac{n^3}{2} > P \quad \rightsquigarrow \qquad n > \sqrt[3]{2\,P}$$

A $*$ becslés akkor igaz, ha $\dfrac{n^3}{2} > 3n^2$, azaz ha $n > 6$, így

$$N(P) \geq \max\left\{\,[\sqrt[3]{2\,P}]\,,\,6\,\right\}$$

5. Feladat: $\boxed{a_n = \dfrac{n^3+3n}{n^2+2} \to \infty\,,}$, mert:

$$\frac{n^3+3n}{n^2+2} \geq \frac{n^3}{n^2+2n^2} = \frac{n}{3} > P \quad \rightsquigarrow \qquad n > 3P \quad \rightsquigarrow \qquad N(P) \geq \Big[3P\Big].$$

6. Feladat: $\boxed{a_n = -n^2 + 3\sqrt{n} - 9 \to -\infty}$, mert: +++

$$-n^2 + 3\sqrt{n} - 9 < M\,(<0) \quad \Longleftrightarrow \qquad n^2 - 3\sqrt{n} + 9 > -M \quad (>0)$$

Az egzakt megoldás helyett most is érdemesebb először becsülni:

$$n^2 - 3\sqrt{n} + 9 > n^2 - 3\sqrt{n} \overset{*}{>} n^2 - \frac{n^2}{2} = \frac{n^2}{2} > -M$$

A $*$ becslés akkor igaz, ha $\dfrac{n^2}{2} > 3\sqrt{n}$, ami egy bizonyos N_1 küszöbindex esetén az $n > N_1$ indexekre teljesül. (Nem kell N_1-et meghatározni, elég látni, hogy létezik.)
Tehát $\quad N(P) \geq \max\{\, N_1, [\sqrt{-2\,M}]\,\}$.

7. Feladat:

Gyakorló feladatok:

A megfelelő definícióval mutassa meg, hogy az alábbi sorozatok ∞-hez vagy $-\infty$-hez tartanak!

a) $a_n = 7n^5 + 5$, $\quad b_n = 7n^5 - 5$

b) $a_n = 7n^5 + 5n^2$, $\quad b_n = 7n^5 - 5n^2$

c) $a_n = \sqrt{2n^5 - 3n^2}$

d) $a_n = n^4 - 2n^3 + 6n^2 + 3$

e) $a_n = -n^3 + 50n^2$

Tétel: Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, és $b_n \geq a_n$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.

Megjegyzés: Elegendő, hogy $b_n \geq a_n$ csak $n > N_0$ indexekre teljesül.

Tétel: $\left(a_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty\right) \iff \left(b_n = -a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty\right)$.

A tételeket nem bizonyítjuk.

8. Feladat:

$\boxed{\text{A fenti tételek alkalmazásával mutassuk meg, hogy a következő sorozatok } \infty\text{-hez vagy } -\infty\text{-hez tartanak!}}$

a) $\quad a_n = n^5 - 7n^2 + 5n + 3$

$$\left(a_n > n^5 - 7n^2 \geq n^5 - \frac{n^5}{2} = \frac{n^5}{2} \to \infty\right)$$

b) $\quad a_n = \sqrt{n^5 + 2n^2}$, illetve $\sqrt{n^5 - 2n^2}$

c) $\quad a_n = \sqrt{n^4 + 2n^3} - \sqrt{n^4 - 5n^3} \qquad (n \geq 5)$

$$\left(a_n = \frac{n^4+2n^3-(n^4-5n^3)}{\sqrt{n^4+2n^3}+\sqrt{n^4-5n^3}} = \frac{n^2}{n^2}\frac{7n}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{5}{n}}} \geq\right.$$

$$\left. \geq \frac{7n}{\sqrt{1+2}+\sqrt{1+0}} = const.\cdot n \to \infty\right)$$

d) $$a_n = \sqrt{n^6-n^4}-\sqrt{n^6+2n^4}$$

(Legyen $b_n = -a_n$. Megmutatjuk, hogy $b_n \to \infty$, (ez könnyebb), ebből már következik, hogy $a_n \to -\infty$.)

A példák megoldásánál csak a fenti tételek használhatók. Pl. a c) feladatnál jól látható, hogy csak a speciális rendőrelv került alkalmazásra. (Még nem tudjuk, hogy $\frac{1}{n} \to 0$, nem ismerjük a konvergens számsorozatok határértékére vonatkozó tételt, stb. Erre figyeljenek oda!)

9. Feladat: $a_n = \sqrt[3]{n^6+n^5}-\sqrt[3]{n^6-n^5} \to \infty$ +++

$$a_n = \frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}, \text{ ahol } \alpha = \sqrt[3]{n^6+n^5}, \quad \beta = \sqrt[3]{n^6-n^5}.$$

1.2. Nagyságrendek összehasonlítása (n^n, $n!$, 2^n, n, (n^k), $\log n$)

A $\frac{\infty}{\infty}$ határozatlan alak, konkrét esetekben különböző határértékeket kaphatunk, például

$$\frac{n}{n^2} \to 0, \quad \frac{n^3}{n} \to \infty, \quad \frac{3n}{5n} \to \frac{3}{5}.$$

Tétel:

$$\boxed{a)\ \frac{n^n}{n!} \to \infty; \qquad b)\ \frac{n!}{2^n} \to \infty; \qquad c)\ \frac{2^n}{n} \to \infty; \qquad d)\ \frac{n}{\log_2 n} \to \infty.}$$

Bizonyítás:
a)

$$\frac{n^n}{n!} = \frac{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n} \geq n\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1 = n \to \infty \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{spec. rendőrelv}} \frac{n^n}{n!} \to \infty$$

b)

$$\frac{n!}{2^n} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1}{2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2} \geq \frac{n}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{4} \to \infty \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{spec. rendőrelv}} \frac{n!}{2^n} \to \infty$$

c) Legyen $a_n = \dfrac{2^n}{n}$. +++

Egyrészt a sorozat monoton nő, tehát $a_{n+1} \geq a_n$, hiszen:

$$\frac{2^{n+1}}{n+1} \overset{?}{\geq} \frac{2^n}{n} \quad \Longleftarrow \quad 2n \overset{?}{\geq} n+1 \quad \Longleftarrow \quad n \geq 1$$

Másrészt a páros indexű részsorozat végtelenhez tart:

$$a_{2n} = \frac{2^{2n}}{2n} = \frac{2^n\cdot 2^n}{2\cdot n} = 2^{n-1}a_n \geq 2^{n-1}a_1 = 2^n \to \infty.$$

E két tulajdonságból következik, hogy $a_n \to \infty$.

d) Legyen $a_n = \dfrac{n}{\log_2 n}$. +++

Belátható, hogy a sorozat monoton nő (ezt csak később tudjuk megmutatni), és $a_{2^k} \to \infty$. Ebből a két tulajdonságból következik az állítás.

A következőt kaptuk:

$$\boxed{n^n \gg n! \gg 2^n \gg n^k \gg n^{\frac{1}{k}} \gg \log n, \qquad k \in \mathbb{N}^+}$$

Itt a „$\gg$” jelet úgy kell olvasni hogy *erősebb*, vagy *nagyobb nagyságrendű*. Ezeket a fogalmakat a félév végén pontosítjuk.

Belátható, hogy $a_n \to \infty$ -ből következik, hogy $\dfrac{1}{a_n} \to 0$.

Ennek alapján az előzőekből következik :

$$\boxed{\frac{\log n}{n} \to 0; \qquad \frac{n}{2^n} \to 0; \qquad \frac{2^n}{n!} \to 0; \qquad \frac{n!}{n^n} \to 0}$$

1.3. Sorozatok határértéke

Szükséges ismeretek:

$\lim a_n = A$ definíciója; példák $N(\varepsilon)$ meghatározására; konvergens sorozat korlátos; divergens sorozatok; műveletek konvergens számsorozatokkal.

●●●

Néhány feladat az előadáson tanultakkal kapcsolatban:

10. Feladat: $\boxed{a_n = \dfrac{3n^2+4n+7}{n^2+n+1} \to 3, \qquad N(\varepsilon) =?}$

$$|a_n - A| = \left|\frac{3n^2+4n+7}{n^2+n+1} - 3\right| = \frac{n+4}{n^2+n+1} \le \frac{n+4n}{n^2} = \frac{5}{n} < \varepsilon,$$

$$N(\varepsilon) \ge \left[\frac{5}{\varepsilon}\right]$$

Persze másképp is majorálhatunk. Én általában igyekszem olyan becsléseket alkalmazni, ha lehet, amely minden n-re jó.

11. Feladat: $\boxed{a_n = \dfrac{n^2-10^8}{5n^6+2n^3-1}, \qquad \lim\limits_{n\to\infty} a_n =?, \qquad N(\varepsilon) =?}$

$a_n \to 0$, mert $\quad a_n = \dfrac{n^2}{n^6} \ \ldots$

$$|a_n - A| = \left|\frac{n^2-10^8}{5n^6+2n^3-1}\right| \overset{\text{ha } n \ge 10^4}{=} \frac{n^2-10^8}{5n^6+\underbrace{2n^3-1}_{>0}} < \frac{n^2}{5n^6} < \frac{1}{n^4} < \varepsilon$$

$$N(\varepsilon) \ge \max\left\{10^4, \left[\frac{1}{\sqrt[4]{\varepsilon}}\right]\right\}$$

12. Feladat: További gyakorló feladatok:

Írja le a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ definícióját és ennek alapján mutassa meg, hogy

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3-5n}{n^3+8} = 2$ $\qquad (N(\varepsilon) = ?)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^3+3n+1}{n^3+7n+b} = 4\,;$ $\quad b = 30$, illetve $b = -30$ $\qquad (N(\varepsilon) = ?)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10^9-n^3}{4n^5+3n^3-6n} = 0$ $\qquad (N(\varepsilon) = ?)$

13. Feladat:

+++

$\boxed{a_n = \dfrac{2n^2+3n+6}{3n^2-1} \to \dfrac{2}{3}, \qquad N(\varepsilon) =?}$

Megoldás. ...
(Ez kicsit nehézkesebb feladat, elhagyható. De lehet HF. is.)

14. Feladat:

$$\boxed{\text{Vizsgálja konvergencia szempontjából az } a_n = \frac{(n+1)!}{(5-2n)\ n!} \text{ sorozatot!}}$$

$$a_n = \frac{(n+1)!}{(5-2n)\,n!} = \frac{n+1}{5-2n} = \frac{n}{n} \cdot \frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{5}{n}-2} \to 1 \cdot \frac{1+0}{0-2} = -\frac{1}{2}$$

15. Feladat:

$$\boxed{\text{Vizsgálja konvergencia szempontjából az } a_n = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}} \text{ sorozatot!}}$$

$$a_n = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}} = \frac{\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}}{\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}} = \frac{3}{n-2} \to 0$$

16. Feladat: $\boxed{a_n = \sqrt{2n^2+5n} - \sqrt{2n^2-n} \ \to ?}$

Legyen $\alpha = \sqrt{2n^2+5n}$, $\beta = \sqrt{2n^2-n}$. Ekkor:

$$a_n = \alpha - \beta = (\alpha-\beta)\ \frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha+\beta} = \frac{6n}{\sqrt{2n^2+5n}+\sqrt{2n^2-n}} =$$
$$= \underbrace{\frac{n}{\sqrt{n^2}}}_{=1} \cdot \frac{6}{\sqrt{2+\frac{5}{n}}+\sqrt{2-\frac{1}{n}}} \to \frac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

17. Feladat: $\boxed{a_n = \sqrt{n^4+2n^2+3} - \sqrt{n^4+n} \ \to ?}$

18. Feladat: $\boxed{a_n = \sqrt[3]{n^3-3n+8} - \sqrt[3]{n^3+n+1} \ \to ?}$ +++

Legyen $\alpha = \sqrt[3]{n^3-3n+8}$, $\beta = \sqrt[3]{n^3+n+1}$. Ekkor:

$$a_n = \alpha - \beta = \frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2} = \dots$$

19. Feladat: További gyakorló feladatok:

Vizsgálja meg konvergencia szempontjából az alábbi sorozatokat!

a) $a_n = \dfrac{5-2n^5}{3n^5+n^4-2n^2+3}, \qquad b_n = \dfrac{5-2n^3}{3n^5+n^4-2n^2+3}, \qquad c_n = \dfrac{n^6-7}{3n^5+n^4-2n^2+3}$

b) $a_n = \dfrac{(3n+1)^4}{2n^4+n^2-3n+5}, \qquad b_n = \dfrac{(2n^2+3)^2}{(3n+5)^4}$

c) $a_n = \dfrac{\binom{2n}{4}}{\binom{n+1}{2}\binom{n-1}{2}}$

d) $a_n = \sqrt{9n^2+7} - \sqrt{9n^2+2n+5}$

e) $a_n = \sqrt{4n^4+n^2-2} - 2n^2$

f) $a_n = \dfrac{1}{n - \sqrt{n^2+3n+5}}$

20. Feladat:

+++

$$a_n = \sqrt{n^2+2n+3} - \sqrt{n^2+bn+1}$$

Határozzuk meg a $b \in \mathbb{R}$ paraméter értékét úgy, hogy a sorozat határértéke

a) ∞ vagy $-\infty$,
b) véges, nem nulla szám,
c) 0 legyen!

•••

Belátható, hogy

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } |a|<1, \\ 1, & \text{ha } a=1, \\ \infty, & \text{ha } a>1, \\ \nexists, & \text{egyébként.} \end{cases}}$$

Sőt, általában igaz, hogy az exponenciális sorozat (a^n) gyorsabban nő, illetve csökken, mint bármely hatványsorozat $(n^k,\ k \in \mathbb{N}^+)$, tehát például

$n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, vagy $n^3\left(\dfrac{-1}{5}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0.$

Összefoglalva:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} n^k a^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } |a|<1,\ k\in\mathbb{N}^+ \\ \infty, & \text{ha } a>1,\ k\in\mathbb{N}^+ \end{cases}}$$

A fenti bekeretezett formulákat bizonyítás nélkül felhasználhatjuk a feladatok megoldásánál.

●●●

Vizsgálja konvergencia szempontjából az alábbi sorozatokat!

21. Feladat: $$\boxed{a_n = \frac{(-2)^n + 3}{5 + 7^n}} = \left(\frac{-2}{7}\right)^n \frac{1+3\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{5\left(\frac{1}{7}\right)^n + 1} \to 0\cdot\frac{1+0}{0+1} = 0$$

22. Feladat: $$\boxed{a_n = \frac{(-3)^{n+1} + 2^{2n+3}}{8 + 5^n}} = \frac{-3\cdot(-3)^n + 8\cdot 4^n}{8+5^n} =$$

$$= \frac{-3\cdot\left(\frac{-3}{5}\right)^n + 8\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^n}{8\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n + 1} \to \frac{0+0}{0+1} = 0$$

23. Feladat:

$$\boxed{a_n = \frac{(3)^{2n}}{(-3)^n + 10^n} \to ? \qquad b_n = \frac{(3)^{2n}}{3^n + 9^n} \to ? \qquad c_n = \frac{9^n}{3^n + 2^n} \to ?}$$

24. Feladat: $$\boxed{a_n = \frac{n^3\, 2^n + 3^n}{2^{2n} - 3\,n^2}} = \frac{n^3\, 2^n + 3^n}{4^n - 3\,n^2} = \frac{n^3\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 - 3n^2\left(\frac{1}{4}\right)^n} \to 0$$

(Felhasználtuk, hogy $n^k\, a^n \to 0$, ha $|a|<1$.)

25. Feladat: +++

A $q\in\mathbb{R}$ paraméter függvényében határozzuk meg a következő sorozat határértékét:

$$a_n = \frac{2^{2n}}{(-3)^n + q^n} \to ?$$

26. Feladat: További gyakorló feladatok:

Vizsgálja meg konvergencia szempontjából az alábbi sorozatokat!

a) $a_n = \dfrac{5^{n+2} + (-1)^n}{5^n}$

b) $a_n = \dfrac{(-2)^n - 3^n}{3^{n+1} + 2^{2n}}$

c) $a_n = \dfrac{4^{n-1} + n^5\, 3^{n+3}}{2^{2n+3} + 2^{n-3}}$

d) $a_n = \dfrac{2^{n-1} + n^8\, 4^n}{7 + 2^{3n+1}}$

1.4. Két nevezetes határérték $\left(\sqrt[n]{p} \xrightarrow{n\to\infty} 1,\ \sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1\right)$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1, \qquad p > 0} \qquad\qquad \boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1}$$

27. Feladat: Keresse meg a következő sorozatok hatáérértékét!

a) $a_n = \sqrt[2n]{2n}$, *b)* $b_n = \sqrt[n]{2n}$, *c)* $c_n = \sqrt[2n]{n}$

Megoldás.

a) $a_n \to 1$, mert az $\sqrt[n]{n}$ sorozat részsorozata.

b) $b_n = \sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n} \to 1 \cdot 1 = 1$

c) $c_n = \sqrt[2n]{\dfrac{2n}{2}} = \dfrac{\sqrt[2n]{2n}}{\sqrt[2n]{2}} \to \dfrac{1}{1} = 1$, mert a számláló és a nevező is két részsorozat.

Vagy egyszerűbben:

$$\sqrt[2n]{n} = \sqrt{\sqrt[n]{n}} \to \sqrt{1} = 1$$

28. Feladat: Vizsgálja meg konvergencia szempontjából a következő sorozatot!

$$a_n = \sqrt[n]{n+1}$$

Megoldás.

A rendőrelvvel dolgozunk:

$$\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} \le b_n = \sqrt[n]{n+1} \le \sqrt[n]{n+n} = \underbrace{\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}}_{\substack{\downarrow \\ 1\cdot 1}}$$

$$\Longrightarrow \quad b_n \to 1\,.$$

Természetesen $1 < b_n$ alsó becslés is jó.

29. Feladat:

$$a_n = \sqrt[n]{2n^3+3} \qquad\qquad b_n = \sqrt[n]{\frac{2n^2+3}{4n^2+n}}$$

Megoldás. Ezek a példák csak rendőrelvvel oldhatók meg!!!! (Nem tudják megkerülni.)

$$\underbrace{\sqrt[n]{3}}_{\substack{\downarrow\\1}} \le a_n = \sqrt[n]{2n^3+3} \le \sqrt[n]{2n^3+3\,n^3} = \underbrace{\sqrt[n]{5}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^3}_{\substack{\downarrow\\1\cdot 1^3=1}}$$

$$\Longrightarrow \quad a_n \to 1\,.$$

$$\underbrace{\sqrt[n]{\frac{2}{5}}}_{\substack{\downarrow\\1}} = \sqrt[n]{\frac{2n^2}{4n^2+n^2}} \le b_n = \sqrt[n]{\frac{2n^2+3}{4n^2+n}} \le \sqrt[n]{\frac{2n^2+3n^2}{4n^2}} = \underbrace{\sqrt[n]{\frac{5}{4}}}_{\substack{\downarrow\\1}}$$

$$\Longrightarrow \quad b_n \to 1\,.$$

Másik megoldás: $\qquad b_n := \sqrt[n]{\beta_n}$

Megmutatjuk, hogy $\beta_n \to \dfrac{1}{2} \qquad \ldots$

Ezért

$$0.4 < \beta_n < 0.6\,, \quad \text{ha } n > N_0 \quad (\exists\, N_0)$$

Ekkor $\quad \underbrace{\sqrt[n]{0.4}}_{\substack{\downarrow\\1}} < b_n = \sqrt[n]{\beta_n} < \underbrace{\sqrt[n]{0.6}}_{\substack{\downarrow\\1}}\,, \quad \text{ha } n > N_0$

$$\Longrightarrow \quad b_n \to 1 \quad \text{(Most is a rendőrelvet használtuk fel.)}$$

30. Feladat:

$$a_n = \sqrt[n^2]{n}$$

Megoldás.

$a_n = \sqrt[n]{\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}} \quad$ és $\sqrt[n]{1} \to 1 \quad$ ÍGY NEM!!!!

Ez így "letakarás". Nem tanultunk olyan tételt, amely szerint így csinálhatnánk. Csak a sejtéshez használható a "letakarás".
Egy helyes megoldás:

$$\sqrt[n]{n} \to 1 \quad \Longrightarrow \quad 0.9 < \sqrt[n]{n} < 1.1\,, \quad \text{ha } n > N_0 \quad (\exists\, N_0)$$

Ekkor $\underbrace{\sqrt[n]{0.9}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} < a_n < \underbrace{\sqrt[n]{1.1}}_{\substack{\downarrow \\ 1}}$

$$\Longrightarrow \quad \sqrt[n^2]{n} \to 1 \quad \text{(A rendőrelvet használtuk fel.)}$$

Most lehet egy kicsit egyszerűbben is becsülni a rendőrelvhez:

$$1 \le \sqrt[n^2]{n} \le \sqrt[n^2]{n^2} \quad \cdots$$

31. Feladat: További gyakorló feladatok:

Vizsgálja meg konvergencia szempontjából az alábbi sorozatokat!

a) $a_n = \sqrt[n]{4^n}\,, \qquad b_n = \sqrt[n]{4^{n+2}}\,, \qquad c_n = \sqrt[4n]{4}\,, \qquad d_n = \sqrt[5n]{4n}$

b) $a_n = \sqrt[n]{n^5\, 3^{n+2}}$

c) $a_n = \sqrt[n]{6n^5 + 3n^3 - 2n^2 + 6}$

d) $a_n = \sqrt[3]{\dfrac{27\,n^2 + 7n - 3}{8n^2 - 5n + 9}}\,, \qquad b_n = \sqrt[n]{\dfrac{27\,n^2 + 7n - 3}{8n^2 - 5n + 9}}$

e) $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{5n^2 + 3n + 4}{n^3 + 7n^2 + 6}}$

1.5. Rekurzíve megadott sorozatok

Szükséges előismeret: Ha egy sorozat monoton és korlátos, akkor konvergens.

32. Feladat: Legyen

$$a_1 = 4, \qquad\qquad a_{n+1} = 7 - \frac{10}{a_n}$$

rekurzíve adott sorozat!

$$(a_n) = (4\,,\ 4.5\,,\ 4.778\,,\ \cdots)$$

a) Mutassa meg, hogy $2 \le a_n \le 5$ minden $n \in \mathbb{N}$ -re!
b) Indokolja meg, hogy (a_n) konvergens!
Határozza meg az (a_n) határértékét!

Megoldás.

a) Teljes indukcióval dolgozunk:

1) $2 \le a_n \le 5\,,$ ha $n = 1, 2, 3$

2) Tegyük fel, hogy $2 \le a_n \le 5$

3) Igaz-e, hogy $2 \le a_{n+1} = 7 - \dfrac{10}{a_n} \le 5$?

Az indukciós feltétel $0 < 2 \le a_n \le 5$ miatt:

$$\frac{1}{2} \ge \frac{1}{a_n} \ge \frac{1}{5} \qquad | \cdot (-10)$$

(A reciprokvételnél megfordultak a reláció jelek.)

$$-5 \le -\frac{10}{a_n} \le -2 \qquad | + 7$$

$$2 \le 7 - \frac{10}{a_n} = a_{n+1} \le 5$$

Tehát igaz.

b) Sejtés: (a_n) monoton nő

Bizonyítás:

I. módszer:

Bizonyítás: teljes indukcióval.

1. $a_1 \le a_2 \le a_3$ teljesül
2. Tfh. $a_{n-1} \le a_n$
3. Igaz-e $a_n \le a_{n+1}$?

Azaz $$a_n = 7 - \frac{10}{a_{n-1}} \overset{?}{\le} 7 - \frac{10}{a_n} = a_{n+1}$$

2. miatt $0 < 2 \le a_{n-1} \le a_n$. Innen

$$\frac{1}{a_{n-1}} \ge \frac{1}{a_n} \qquad | \cdot (-10)$$

$$\Longrightarrow \quad -\frac{10}{a_{n-1}} \le -\frac{10}{a_n} \qquad | + 7$$

$$\Longrightarrow \quad a_n = 7 - \frac{10}{a_{n-1}} \le 7 - \frac{10}{a_n} = a_{n+1}$$

Tehát a számsorozat valóban monoton nő.

II. módszer:

$$a_{n+1} = 7 - \frac{10}{a_n} \overset{?}{\ge} a_n\,, \quad (a_n > 0) \quad \Longrightarrow \quad a_n^2 - 7\,a_n + 10 = (a_n - 2)\,(a_n - 5) \overset{?}{\le} 0$$

Mivel a)-ban beláttuk, hogy $2 \le a_n \le 5$, ezért az előző teljesül és így (a_n) monoton nő.

Megmutattuk, hogy a számsorozat monoton és korlátos

$$\Longrightarrow \quad (a_n) \text{ konvergens, és fennáll:}$$

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(7 - \frac{10}{a_n}\right)$$

$$A = 7 - \frac{10}{A} \quad \Longrightarrow \quad A = 5 \text{ vagy } A = 2.$$

$A = 2$ nem lehet, mivel $a_n \ge a_1 = 4$, ezért a_n nem esik a 2 szám pl. 1 sugarú környezetébe. Így $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$.

33. Feladat: Vizsgálja az alábbi sorozatok konvergenciáját!

$$a_n = \sqrt{2\,a_{n-1} + 3}$$

a) $a_1 = 1$: $(a_n) = (1\,,\ 2.236\,,\ 2.73\,,\ \cdots)$
b) $a_1 = 5$: $(a_n) = (5\,,\ 3.605\,,\ 3.195\,,\ \cdots)$

Megoldás.

$A = \sqrt{2A+3} \quad \Longrightarrow \quad A^2 - 2A - 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad A = -1$ vagy $A = 3$.

Most csak $A = 3$ jöhet szóba, hiszen $a_n > 0$. Ha tehát a számsorozat konvergens, akkor $A = 3$. Ezért dolgozunk majd a korlátosságnál is a 3-mal. A megoldás vázlata:

a) Megmutatható teljes indukcióval, hogy (a_n) monoton nő és szintén teljes indukcióval, hogy $a_n < 3$. Tehát a sorozat konvergens és az előzőek miatt $A = 3$.

   (A Segédletben van hasonló példa kidolgozva.)

b) Most teljes indukcióval megmutatható, hogy (a_n) monoton csökken és $a_n > 3$. Tehát a sorozat konvergens és az előzőek miatt $A = 3$ most is.

Megjegyzés:
A b) változatot nem kell részletesen végig megcsinálni. A lényeg, hogy a hallgatók vegyék észre, hogy a sorozat viselkedése függhet a kezdő értéktől.

34. Feladat:

Gyakorló példák:

a)

$$a_{n+1} = \sqrt{8\,a_n - 7}\,, \quad n = 1, 2, \cdots \quad \text{és} \quad a_1 = 4$$

$$(a_n) = (4\,,\ 5\,,\ 5.74\,, \cdots)$$

a) Bizonyítsa be, hogy $1 < a_n < 7$!

b) Igazolja, hogy a sorozat monoton!
c) Konvergens-e ez a sorozat? Ha igen, mi a határértéke?

d)

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 8}{7}, \quad n = 1, 2, \cdots \quad \text{és} \quad a_1 = 9$$

$$(a_n) = (9\,,\ 10.43\,,\ 14.4\,, \cdots)$$

a) Mely valós számok jöhetnek szóba a sorozat határértékeként?
b) Igazolja, hogy $a_n > 8\,, \quad n \in \mathbb{N}^+$
c) Igazolja, hogy a sorozat monoton!
d) Konvergens-e a sorozat!

e) Legyen

$$a_1 = 5, \qquad a_{n+1} = 8 - \frac{12}{a_n}$$

rekurzíve adott sorozat! $(a_n) = (5\,,\ 5.6\,,\ 5.85\,,\ \cdots)$
a) Mutassa meg, hogy $2 \le a_n \le 6$ minden $n \in \mathbb{N}$ -re!
b) Indokolja meg, hogy (a_n) konvergens! A felhasznált tételt írja le!
c) Határozza meg az (a_n) határértékét!

1.6. $(1 + x/n)^n \xrightarrow{n\to\infty} e^x$ határértékkel kapcsolatos feladatok

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$ felhasználható.

Állapítsuk meg a következő sorozatok határértékét!

35. Feladat:

$$\boxed{a_n = \left(1 + \frac{1}{6n^2}\right)^{6n^2+2}}$$

Megoldás.

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{6n^2}\right)^{6n^2} \left(1 + \frac{1}{6n^2}\right)^2 \to \mathrm{e} \cdot 1^2 = \mathrm{e}$$

(e_n részsorozatáról van szó.)

36. Feladat:

$$\boxed{a_n = \left(\frac{n+5}{n-4}\right)^{n+3}}$$

Megoldás.

$$a_n = \frac{\left(1+\frac{5}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{-4}{n}\right)^n} \cdot \frac{\left(1+\frac{5}{n}\right)^3}{\left(1+\frac{-4}{n}\right)^3} \to \frac{e^5}{e^{-4}} \cdot \frac{1^3}{1^3} = e^9$$

Más átalakítással:

$$a_n = \left(\frac{n-4+9}{n-4}\right)^{n-4+7} = \left(1+\frac{9}{n-4}\right)^{n-4} \cdot \left(1+\frac{9}{n-4}\right)^7 \to e^9 \cdot 1^7 = e^9$$

Ez a fajta átalakítás bizonyos példáknál sokkal hosszabb, ezért az első módszert használata javasolt, de persze ez nem kötelező.

37. Feladat:

$$\boxed{a_n = \left(\frac{n^2+2}{n^2+3}\right)^{n^2+7}}$$

Megoldás.

$$a_n = \left(\frac{n^2+2}{n^2+3}\right)^{n^2} \cdot \left(\frac{n^2+2}{n^2+3}\right)^7 = \frac{\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{n^2}} \cdot \left(\frac{1+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}}\right)^7 \to \frac{e^2}{e^3} \cdot 1^7 = \frac{1}{e}$$

Másik megoldás:

$$a_n = \left(\frac{(n^2+3)-1}{n^2+3}\right)^{(n^2+3)+4} = \left(1+\frac{-1}{n^2+3}\right)^{n^2+3} \cdot \left(1+\frac{-1}{n^2+3}\right)^4 \to e^{-1} \cdot 1^4 = \frac{1}{e}$$

38. Feladat:

$$\boxed{a_n = \left(\frac{3n+5}{3n-4}\right)^{3n}, \qquad b_n = \left(\frac{3n+5}{3n-4}\right)^{2n}}$$

Megoldás.

$$a_n = \left(\frac{1+\frac{5}{3n}}{1+\frac{-4}{3n}}\right)^{3n} \to \frac{e^5}{e^{-4}} = e^9$$

$$b_n = \left(\frac{1+\frac{5}{3n}}{1+\frac{-4}{3n}}\right)^{2n} = \left(\left(\frac{1+\frac{5/3}{n}}{1+\frac{-4/3}{n}}\right)^n\right)^2 \to \left(\frac{e^{5/3}}{e^{-4/3}}\right)^2 = e^6$$

39. Feladat:

Gyakorló példák:

Keresse meg az alábbi sorozatok határértékét!

a) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{5n}$

b) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{5n}\right)^{n}$

c) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{5n}\right)^{6n}$

d) $a_n = \left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{10}\right)^{n}$

e) $a_n = \dfrac{\left(5-\dfrac{1}{n}\right)^{n}}{\left(5+\dfrac{1}{n}\right)^{n}}$

f) $a_n = \left(1+\dfrac{8}{n}\right)^{2n}$

g) $a_n = \left(\dfrac{n+7}{n+4}\right)^{n+4}$

h) $a_n = \left(\dfrac{n+7}{n+3}\right)^{n}$

i) $a_n = \left(\dfrac{2n+7}{2n+3}\right)^{2n}$

j) $a_n = \left(\dfrac{2n+7}{2n+3}\right)^{n}$

k) $a_n = \left(\dfrac{2n+7}{2n+3}\right)^{2n+5}$

40. Feladat:

Gyakorló példák:

A paraméterek megadott értékeire keresse meg az alábbi sorozat határértékét!

$$a_n = \left(\frac{3n^3 + 5}{3n^3 + 3}\right)^{\alpha n^3 + \beta}$$

a) $\alpha = 3\,, \quad \beta = 0$

b) $\alpha = 3\,, \quad \beta = 2$

c) $\alpha = 1\,, \quad \beta = 0$

d) $\alpha = 6\,, \quad \beta = 0$

41. Feladat:

$$\boxed{a_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}}$$

Megoldás.

ÍGY TILOS! : $\quad a_n = \sqrt[n]{\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}} \quad \to \quad \sqrt[n]{e} \quad \to \quad 1$

Ez így "letakarás"! Ez a sejtéshez használható:

$$\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} \sim \sqrt[n]{\mathrm{e}} \quad \to \quad 1$$

De precízen meg kell mutatni. (Persze kimondható lenne használható tétel, de mi nem mondtunk ki ilyent.)
Helyesen:

$$\underbrace{\sqrt[n]{\mathrm{e}-0,1}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} < a_n = \sqrt[n]{\underbrace{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}_{\substack{\downarrow \\ \mathrm{e}}}} < \underbrace{\sqrt[n]{\mathrm{e}+0,1}}_{\substack{\downarrow \\ 1}}, \qquad \text{ha} \quad n > N_0$$

$$\Longrightarrow \quad a_n \to 1$$

Persze más becslés is jó. Pl.: $\sqrt[n]{2} \le a_n < \sqrt[n]{3}$ stb.

42. Feladat:

$$\boxed{a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$$

Megoldás.

$$a_n = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^n \ge 2^n \to \infty \underset{\text{spec. rendőrelv}}{\Longrightarrow} a_n \to \infty$$

43. Feladat: +++

$$\boxed{a) \quad a_n = \left(1-\frac{1}{n^4}\right)^{n^3} \qquad\qquad b) \quad b_n = \left(1-\frac{1}{n^4}\right)^{n^5}}$$

Megoldás. ...

44. Feladat:

Gyakorló példák:

Keresse meg az alábbi sorozatok határértékét!

a) $a_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}$ b) $a_n = \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}$

c) $a_n = \left(\frac{n^2+3}{n^2+5}\right)^{n^3}$

45. Feladat:

$$a_n = \left(\frac{4n+1}{4n+5}\right)^n, \qquad b_n = \left(\frac{4n+1}{7n+5}\right)^n, \qquad c_n = \left(\frac{6n+1}{4n+5}\right)^n$$

Megoldás.

$$a_n = \frac{\left(1+\frac{1/4}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{5/4}{n}\right)^n} \to \frac{\mathrm{e}^{1/4}}{\mathrm{e}^{5/4}} = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

$$0 < b_n = \left(\frac{4n+1}{7n+5}\right)^n < \left(\frac{4n+n}{7n}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{5}{7}\right)^n}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \underset{\text{rendőrelv}}{\Longrightarrow} b_n \to 0$$

$$c_n = \left(\frac{6n+1}{4n+5}\right)^n \underset{n\geq 5}{\geq} \left(\frac{6n}{4n+n}\right)^n = \left(\frac{6}{5}\right)^n \to \infty \underset{\text{spec. rendőrelv}}{\Longrightarrow} c_n \to \infty$$

De lehet kiemeléssel is egyszerűbb alakra hozni. Pl.:

$$b_n = \left(\frac{4n+1}{7n+5}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{4n}{7n}\right)^n}_{=\left(\frac{4}{7}\right)^n} \cdot \frac{\left(1+\frac{1/4}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{5/7}{n}\right)^n} \to 0 \cdot \frac{\mathrm{e}^{1/4}}{\mathrm{e}^{5/7}} = 0$$

1.7. Limesz szuperior, limesz inferior

46. Feladat:

$$a_n = \frac{4-n^2}{n+3} \qquad \limsup a_n = ?\,, \ \liminf a_n = ?$$

47. Feladat:

a) $a_n = \left(\cos n\,\frac{\pi}{2}\right)\dfrac{2n^2-3}{n^2+n+8} \qquad \limsup a_n = ?\,, \ \liminf a_n = ?\,, \ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = ?$

b) $b_n = \left(\cos n\,\frac{\pi}{2}\right)\dfrac{2n^2-3}{n^3+n+8} \qquad \limsup b_n = ?\,, \ \liminf b_n = ?\,, \ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = ?$

Megoldás.

a) $\alpha_n := \dfrac{2n^2-3}{n^2+n+8} = \dfrac{2-\dfrac{3}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{8}{n^2}} \to 2$

Ha $n = 2k+1$: $a_n = 0 \to 0$

Ha $n = 4k$: $a_n = \alpha_n \to 2$

Ha $n = 4k+2$: $a_n = -\alpha_n \to -2$

Tehát a torlódási pontok halmaza: $S = \{-2,\, 0,\, 2\}$

$\implies \limsup a_n = 2\,, \quad \liminf a_n = -2\,, \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n \nexists$

b) $\beta_n := \dfrac{2n^2-3}{n^3+n+8} \quad \ldots \quad \to 0 \implies \limsup b_n = \liminf b_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

48. Feladat:

$\limsup a_n = ?\,,\ \liminf a_n = ?\,,\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = ?$

a) $a_n = \dfrac{(-3)^n+8}{5+2^{2n+1}}$

b) $a_n = \dfrac{(-4)^n+8}{5+2^{2n+1}}$

Megoldás. ...

49. Feladat:

$a_n = \sqrt{\dfrac{n^3+(-1)^n\,n^3}{3n^3+n+7}} \qquad \limsup a_n = ?\,,\ \liminf a_n = ?$

Megoldás.

Ha n páros: $a_n = \sqrt{\dfrac{2n^3}{3n^3+n+7}} = \sqrt{\dfrac{2}{3+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{7}{n^3}}} \to \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

Ha n páratlan: $a_n = 0 \to 0$

$\implies \limsup a_n = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\,, \quad \liminf a_n = 0$

50. Feladat:

$a_n = \sqrt{\dfrac{2n^3+(-1)^n\,n^3}{3n^3+n+7}} \qquad \limsup a_n = ?\,,\ \liminf a_n = ?$

Megoldás. . . .

51. Feladat: +++

$$a_n = \left(\frac{3-n}{5+n}\right)^n \left(\frac{4n-1}{2n+5}\right)^3 \qquad \limsup a_n = ?\ ,\ \liminf a_n = ?$$

Megoldás. . . .

52. Feladat:
Gyakorló példák:

Határozza meg az alábbi sorozatok limeszét (ha létezik), valamint limesz szuperiorját és a limesz inferiorját!

a) $a_n = \dfrac{3+2^{2n}}{-4^n+1}$ b) $a_n = \dfrac{3+2^{2n}}{(-4)^n+1}$

Felhívjuk a figyelmet, hogy $(-4)^n \neq -4^n$!!!!!!!!!!!!!!!!!
(Újabban egyre gyakrabban előforduló hiba!)

c) $a_n = \dfrac{(-4)^n+3^{2n+1}}{5+9^{n+1}}$, $b_n = a_n \cdot \cos n\pi$

d) $a_n = (-1)^n \left(\dfrac{3n-3}{3n+2}\right)^{6n+2}$ e) $a_n = \dfrac{4^{n+1}+(-2)^n}{2^{2n+1}+3^{n-1}}$

1.8. Egy alkalmazás: a kör területe

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n \cdot \sin\frac{1}{n} = 1$$ (Bizonyítás később.)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{a}{n}}{\frac{a}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a} \cdot \sin\frac{a}{n} = 1\ , \qquad a \in \mathbb{R}$$ (Bizonyítás később.)

53. Feladat:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} n\cdot\sin\frac{3}{n} = ?}$$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\sin\frac{3}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{3}{n}}{\frac{3}{n}}\cdot 3 = 1\cdot 3 = 3$$

54. Feladat:

Határozzuk meg az r sugarú kör területét mint a beírt szabályos n-szögek területeinek limeszét!

Megoldás.

A szabályos n-szög egy háromszögének területe: $t_h = \dfrac{r\cdot r\cdot\sin\frac{2\pi}{n}}{2}$

Így a szabályos n-szög területe:

$$t_n = n\cdot\frac{r^2\cdot\sin\frac{2\pi}{n}}{2} = r^2\cdot\underbrace{\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}}_{\downarrow \atop 1}\cdot\pi \quad\to\quad r^2\cdot\ \pi$$

1.9. Numerikus sorok

Előadáson a jegyzetből az 1-14. oldalakon és a 25-28. oldalakon található anyag kerül leadásra most. Még ebből is kihagyjuk a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ sor konvergenciájával kapcsolatos "bizonyítást". Most csak kimondjuk, hogy $\alpha > 1$-re konvergens, majd a félév végén az integrálkritériummal bizonyítjuk. Tehát ebben a félévben nem tanuljuk a hányados- és gyökkritériumot.

55. Feladat:

Konvergens-e a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$ sor? (A definícióval dolgozzon!)

Megoldás.

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) = \left(\sqrt{2} - \sqrt{1}\right) + \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{4} - \sqrt{3}\right) + \dots$$

$$+ \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) + \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \sqrt{n+1} - 1$$

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - 1) = \infty .$$ Tehát a sor divergens.

Geometriai sor összege:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a\,q^n = \sum_{n=1}^{\infty} a\,q^{n-1} = \frac{a}{1-q}\,, \text{ ha } \quad |q| < 1$$

---

56. Feladat:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(-5)^{n+2}} = ?}$$

(Állapítsa meg a sor összegét!)

Megoldás.

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(-5)^{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{25} \cdot \left(\frac{-4}{5}\right)^n = \underbrace{\frac{1}{25} \cdot \frac{-4}{5}}_{a} + \frac{1}{25} \cdot \left(\frac{-4}{5}\right)^2 + \frac{1}{25} \cdot \left(\frac{-4}{5}\right)^3 + \dots =$$

$$= \frac{\frac{-4}{125}}{1 - \frac{-4}{5}}$$

Itt $q = \frac{-4}{5}$, $|q| < 1$, tehát a geometriai sor konvergens.

57. Feladat:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n+1} + (-5)^n}{3^{2n+2}} = ?}$$

Megoldás.

A sor két konvergens geometriai sor összege. Tanulni, sőt bizonyítani fogunk egy tételt, mely szerint számolhatjuk tagonként a sorösszeget és az eredményeket összegezzük.

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n+1} + (-5)^n}{3^{2n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{9} \cdot \frac{8^n}{9^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9} \cdot \frac{(-5)^n}{9^n} = s_1 + s_2$$

A konstans is kiemelhető:

$$s = \frac{2}{9} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n + \frac{1}{9} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-5}{9}\right)^n = \frac{2}{9} \cdot \frac{\frac{8}{9}}{1 - \frac{8}{9}} + \frac{1}{9} \cdot \frac{\frac{-5}{9}}{1 - \frac{-5}{9}}$$

58. Feladat:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{4^n}$$

Milyen x-re konvergens és mi az összege?

1.10. Alternáló sorok, Leibniz sorok

(A két fogalom nem ekvivalens! Minden Leibniz sor alternáló sor, de nem minden alternáló sor Leibniz sor. Beszéljünk erről néhány szót!)

Konvergensek-e az alábbi sorok?

59. Feladat:

$$\boxed{\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[5]{n} + 5} \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[n]{n^5} + 5}}$$

Megoldás.

a) $$c_n := \frac{1}{\sqrt[5]{n}+5}\,.$$

Mivel $c_n \searrow 0$ (monoton csökkenően tart nullához), a sor Leibniz típusú és így konvergens.

b) Most $$c_n = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^5+5} \to \frac{1}{1+5} = \frac{1}{6} \neq 0$$

$\Longrightarrow$ a sor divergens, mert nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele, az általános tag nem tart 0-hoz.

60. Feladat:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n+5}\right)^n}$$

Megoldás.

$$c_n := \left(\frac{n+1}{n+5}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{5}{n}\right)^n} \to \frac{\mathrm{e}^1}{\mathrm{e}^5} = \frac{1}{\mathrm{e}^4} \neq 0$$

Tehát az általános tag nem tart 0-hoz, így nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele, ezért a sor divergens.

61. Feladat:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{2^n+10^n}}$$

Mutassa meg, hogy Leibniz sorról van szó!
Adjon becslést az $s \approx s_{99}$ közelítés hibájára!

Megoldás.

$$c_n = \frac{5^n}{2^n+10^n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{5}\right)^n+1} \to \frac{0}{0+1} = 0$$

Még meg kell mutatnunk, hogy a sorozat monoton csökkenő. (Ez most nem triviális, mert n növelésével a számláló és a nevező is nő.)

$$\begin{aligned}
c_{n+1} &\overset{?}{<} c_n \\
\frac{5^{n+1}}{2^{n+1}+10^{n+1}} &\overset{?}{<} \frac{5^n}{2^n+10^n} \\
5\cdot(2^n+10^n) &\overset{?}{<} 2\cdot 2^n + 10\cdot 10^n \\
3\cdot 2^n &\overset{?}{<} 5\cdot 10^n \\
\frac{3}{5} &\overset{?}{<} 5^n
\end{aligned}$$

Ez pedig igaz minden n-re és ebből következik visszafelé, hogy $c_{n+1} < c_n$, tehát a sorozat monoton csökkenő.
Ezzel bebizonyítottuk, hogy a sor Leibniz típusú, így konvergens.
Leibniz sorok esetén az $s \approx s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} c_k$ közelítés hibája:

$$|H| = |s - s_n| \le c_{n+1}$$

Ezért az $s \approx s_{99}$ közelítés hibájáról az alábbit mondhatjuk:

$$|H| = |s - s_{99}| \le c_{100} = \frac{5^{100}}{2^{100}+10^{100}}$$

62. Feladat:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n+5}{7^n+9^n}}$$

Mutassa meg, hogy Leibniz sorról van szó!
Adjon becslést az $s \approx s_{99}$ közelítés hibájára!

Megoldás.

...

63. Feladat:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[n]{n^4+5}}}$$

Konvergens-e a sor?

Megoldás.

...

64. Feladat:

$$\boxed{\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \, \frac{2n^2+5}{n^3}}$$

Konvergens-e a sor?

Megoldás.

$$\ldots$$

1.11. Majoráns kritérium, minoráns kritérium

Csak olyan példa lehet most, amelyiknél geometriai sorral vagy $\sum^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ sorral lehet majorálni, minorálni.

Vizsgálja meg konvergencia szempontjából az alábbi sorokat!

65. Feladat:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3-n+3}{3n^4+2n^2+7}}$$

Megoldás.

Divergenciát várunk, mert .... Ezért a minoráns kritériumot használjuk:

$$a_n := \frac{2n^3-n+3}{3n^4+2n^2+7} \geq \frac{2n^3-n^3+0}{3n^4+2n^4+7n^4} = \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{n}\,; \qquad \frac{1}{12}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \quad \text{divergens}$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{divergens.}$$

66. Feladat:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-n+3}{2n^5+2n^2+7}}$$

Megoldás.

Konvergenciát várunk, mert .... Ezért a majoráns kritériumot használjuk:

$$a_n := \frac{n^2-n+3}{2n^5+2n^2+7} \le \frac{n^2-0+3n^2}{2n^5+0+0} = 2\cdot\frac{1}{n^3}\ ; \qquad 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} \quad \text{konvergens}$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konvergens.}$$

67. Feladat:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^{n+2}}{1+6^{n-1}}}$$

Konvergencia esetén adjon becslést az $s \approx s_{100}$ közelítés hibájára!

Megoldás.

Konvergenciát várunk, mert …. Ezért a majoráns kritériumot használjuk:

$$a_n := \frac{2^n+3^{n+2}}{1+6^{n-1}} = \frac{2^n+9\cdot 3^n}{1+\frac{1}{6}\cdot 6^n} < \frac{3^n+9\cdot 3^n}{\frac{1}{6}\cdot 6^n} = 60\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$60\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{konvergens geometriai sor } \left(0<q=\frac{1}{2}<1\right) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konvergens.}$$

Hibabecslés:

$$s \approx \sum_{n=1}^{100}\frac{2^n+3^{n+2}}{1+6^{n-1}}$$

Mivel az előző becslés minden n-re jó:

$$0 < H = \sum_{n=101}^{\infty}\frac{2^n+3^{n+2}}{1+6^{n-1}} < 60\cdot\sum_{n=101}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 60\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{101}}{1-\frac{1}{2}}$$

1.12. Abszolút konvergencia, feltételes konvergencia

Abszolút vagy feltételesen konvergens-e az alábbi sor?

68. Feladat:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{3n-2}}$$

Megoldás.

$$c_n := |a_n| = \frac{2n+1}{3n-2} = \frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{2}{n}} \to \frac{2}{3} \neq 0$$

$\Longrightarrow$ a sor divergens, mert nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele.

69. Feladat:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{3n^5-n^2}}$$

Megoldás.

Most a szükséges feltétel teljesül.
Ilyenkor először mindig az abszolút konvergenciát ellenőrizzük:

$$c_n := |a_n| = \frac{2n+1}{3n^5-n^2} \leq \frac{2n+n}{3n^5-n^5} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{n^4};$$

$$\frac{3}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad \text{konvergens} \quad (\alpha = 4 > 1) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad \text{konvergens.}$$

Tehát a sor abszolút konvergens.

70. Feladat:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{3n^2+2}}$$

a) Abszolút vagy feltételesen konvergens-e a sor?
b) Adjon becslést az $s \approx s_{1000}$ közelítés hibájára!

Megoldás.

$$c_n := \frac{2n+1}{3n^2+2}$$

a) Az abszolút értékekből alkotott sor : $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ divergens, mert

$$c_n = \frac{2n+1}{3n^2+2} \geq \frac{2n}{3n^2+2n^2} = \frac{2}{5} \frac{1}{n}; \qquad \frac{2}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{divergens}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad \text{divergens.}$$

Tehát a sor nem abszolút konvergens.

Leibniz sor-e?

$$c_n = \underbrace{\frac{n}{n^2}}_{=\frac{1}{n}\to 0} \quad \frac{2+\dfrac{1}{n}}{3+\dfrac{2}{n^2}} \quad \to \quad 0\cdot\frac{2+0}{3+0} = 0$$

Még megmutatjuk, hogy a (c_n) számsorozat monoton csökkenő.

$$\begin{aligned} c_{n+1} &\overset{?}{<} c_n \\ \frac{2(n+1)+1}{3(n+1)^2+2} &\overset{?}{<} \frac{2n+1}{3n^2+2} \\ (2n+3)\,(3n^2+2) &\overset{?}{<} (2n+1)\,(3n^2+6n+5) \\ 0 &\overset{?}{<} 6n^2+12n-1 \end{aligned}$$

Ez pedig igaz és ebből következik visszafelé, hogy $c_{n+1} < c_n$, tehát a sorozat monoton csökkenő.
Ezzel bebizonyítottuk, hogy a sor Leibniz típusú, így konvergens.
Tehát a sor feltételesen konvergens.

b) $s \approx s_{1000} = \sum\limits_{n=1}^{1000} (-1)^{n+1}\,\dfrac{2n+1}{3n^2+2}$ közelítés hibája:

$$|H| = |s - s_{1000}| \le c_{1001} = \frac{2\cdot 1001 + 1}{3\cdot 1001^2 + 2}$$

1.13. Hibaszámítás pozitív tagú sorokra

Mutassa meg, hogy az alábbi sor konvergens!
Mekkora hibát követünk el, ha a sorösszeget 100. részletösszegével közelítjük?
$(s \approx s_{100};\quad H = r_{100} = \sum\limits_{k=101}^{\infty} a_k;\quad |H| \le ?)$

71. Feladat:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3^{n+1} + \sqrt{2}}}$$

Megoldás.

$$a_n := \frac{1}{2^n+3^{n+1}+\sqrt{2}} < \frac{1}{3^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \text{konvergens geometriai sor } \left(0<q=\frac{1}{3}<1\right) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konvergens.}$$

Hibaszámítás:

$$0 < H = \sum_{n=101}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3^{n+1} + \sqrt{2}} < \sum_{n=101}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{101}}{1 - \frac{1}{3}}$$

72. Feladat:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot 2^{2n+2}}{(n^2+1) \cdot (3^{2n+1} + 5^n)}}$$

Megoldás.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1} \cdot \frac{4 \cdot 4^n}{3 \cdot 9^n + 5^n}$$

Vegyük észre, hogy $\dfrac{n^2}{n^2+1} < 1 \;\; \forall\, n$-re. Ezt is felhasználjuk a majorálásnál.

$$a_n \leq 1 \cdot \frac{4 \cdot 4^n}{3 \cdot 9^n} = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

$\dfrac{4}{3} \cdot \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n$ konvergens geometriai sor $\left(0 < q = \dfrac{4}{9} < 1\right) \implies \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens.

A hibaszámításnál is ugyanezt az ötletet használjuk fel:

$$0 < H = \sum_{n=101}^{\infty} \frac{n^2 \cdot 2^{2n+2}}{(n^2+1) \cdot (3^{2n+1} + 5^n)} < \frac{4}{3} \cdot \sum_{n=101}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{4}{3} \cdot \frac{\left(\frac{4}{9}\right)^{101}}{1 - \frac{4}{9}}$$

73. Feladat:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n+1} + 3^n + 8}{5^n + 9}}$$

Adjon becslést az $s \approx s_{99}$ közelítés hibájára!

Megoldás.

...

74. Feladat:

Gyakorló példák:

a) Mikor mondjuk, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor összege s-sel egyenlő?

A definícióval határozza meg az alábbi sor összegét!

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) = ?$$

b) Adja meg az alábbi sor összegét!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} + (-2)^n}{7^n} = ?$$

c) Konvergens-e az alábbi sor?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{n^8+5}}$ *b)* $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^8+5}}$

d) Konvergens-e az alábbi sor?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+3}$ *b)* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+3}$

e) Abszolút konvergens vagy feltételesen konvergens-e az alábbi sor?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}+3}$ *b)* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3 + 2n^2 - 7}{4n^6 - n^4 + 5n^2}$

f) *a)* Mit nevezünk Leibniz-sornak?
Milyen tételt tanultunk Leibniz-sorokkal kapcsolatban?
b) Konvergensek-e az alábbi sorok?

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{n^2}$, *ii)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$, *iii)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3}$.

g)

$$a_n = \left(\frac{4n-2}{4n+1}\right)^n, \qquad b_n = \left(\frac{4n-3}{8n+2}\right)^n$$

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = ?$ $\lim_{n\to\infty} b_n = ?$

b) Konvergens-e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, illetve a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor?

Amelyik konvergens, annál adjon becslést az $s \approx s_{100}$ közelítés hibájára!

2. Egyváltozós valós függvények határértéke, folytonossága

2.1. Függvény határértéke

1. Feladat:

A megfelelő definícióval bizonyítsa be az alábbi határértékeket!

a) $\lim\limits_{x \to 1} (3x+4) = 7$

b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{8-2x^2}{x+2} = 8$

c) $\lim\limits_{x \to -3} \sqrt{1-5x} = 4$

Megoldás.

a) Írjuk fel a definíciót, mielőtt hozzáfogunk a megoldáshoz!

$$|f(x) - A| = |3x+4-7| = |3x-3| = 3\,|x-1| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad |x-1| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \Longrightarrow \quad \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{3}$$

b) $$|f(x) - A| = \left|\frac{8-2x^2}{x+2} - 8\right| = \left|\frac{2(4-x^2)}{x+2} - 8\right| \underbrace{=}_{x \neq -2} |2\,(2-x) - 8| = |-2x-4| =$$

$$= 2\,|x+2| < \varepsilon \qquad \Longrightarrow \quad |x+2| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \Longrightarrow \quad \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$$

c) $$|f(x) - A| = |\sqrt{1-5x} - 4| = \left|(\sqrt{1-5x} - 4)\,\frac{\sqrt{1-5x}+4}{\sqrt{1-5x}+4}\right| =$$

$$= \frac{|1-5x-16|}{\sqrt{1-5x}+4} = \frac{5\,|x+3|}{\sqrt{1-5x}+4} \le \frac{5\,|x+3|}{0+4} < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad |x+3| < \frac{4\,\varepsilon}{5} \quad \Longrightarrow \quad \delta(\varepsilon) = \frac{4\,\varepsilon}{5}$$

2. Feladat:

A megfelelő definícióval bizonyítsa be az alábbi határértékeket!

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1-2x}{x+3} = -2$$

Megoldás.

A megfelelő definíciók:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \ : \qquad \forall\,\varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\, P_1(\varepsilon) > 0 : \quad |f(x) - A| < \varepsilon, \text{ ha } x > P_1(\varepsilon)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \ : \qquad \forall\,\varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\, P_2(\varepsilon) > 0 : \quad |f(x) - A| < \varepsilon, \text{ ha } x < -P_2(\varepsilon)$$

Készítsünk ábrát is a jobb megértéshez!

$$|f(x) - A| = \left|\frac{1-2x}{x+3} + 2\right| = \left|\frac{1-2x+2x+6}{x+3}\right| = \frac{7}{|x+3|} < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |x+3| > \frac{7}{\varepsilon}$$

$$x \to \infty : \quad x+3 > \frac{7}{\varepsilon} \quad \Longrightarrow \quad x > \frac{7}{\varepsilon} - 3 = P_1(\varepsilon)$$

$$x \to -\infty : \quad -(x+3) > \frac{7}{\varepsilon} \quad \Longrightarrow \quad x < -\left(\frac{7}{\varepsilon} + 3\right) = -P_2(\varepsilon)$$

3. Feladat: További gyakorló feladatok

A megfelelő definícióval bizonyítsa be az alábbi határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x-2}{x-1} + 3x = 5$

b) $\lim\limits_{x\to -2} \sqrt{2x+15} = \sqrt{11}$

c) $\lim\limits_{x\to \infty} (2x^3 - x^2 + 4x + 7) = \infty$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt[3]{1+2x} = -\infty$

e) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{6x+1}{3-2x} = -3$

Megoldás.

...

4. Feladat:

$$\boxed{f(x) = \frac{x^2+3x-10}{(x^2-4)^2}\,, \qquad \lim_{x\to -2} f(x) = ?\,, \qquad \lim_{x\to 2} f(x) = ?}$$

Megoldás.

$$f(x) = \frac{(x-2)\,(x+5)}{(x-2)^2\,(x+2)^2}$$

$$\lim_{x\to -2} \underbrace{\frac{1}{(x+2)^2}}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{\frac{x^2+3x-10}{(x-2)^2}}_{\to -12/16} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2\pm 0} \underbrace{\frac{x-2}{(x-2)\,(x-2)}}_{=\frac{1}{x-2}\to\pm\infty} \cdot \underbrace{\frac{x+5}{(x+2)^2}}_{\to 7/16} = \pm\infty$$

5. Feladat:

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^5-3x^2+1}{x^7+4x^3+5} = ?}$$

Megoldás.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \underbrace{\frac{x^5}{x^7}}_{=\frac{1}{x^2}\to 0} \cdot \underbrace{\frac{2-\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^5}}{1+\frac{4}{x^4}+\frac{5}{x^7}}}_{\to 2} = 0$$

6. Feladat:

$$\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{3x^2+1}-2x} = ?\,,}$$

Megoldás.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{3x^2+1}-2x} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{3x^2+1}-2x} \cdot \frac{\sqrt{3x^2+1}+2x}{\sqrt{3x^2+1}+2x} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\,(\sqrt{3x^2+1}+2x)}{3x^2+1\,-\,4x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{3x^2+1}+2x}{-(x+1)} = 1 \cdot \frac{4}{-2} = -2$$

7. Feladat:

$$\boxed{\lim_{x\to -\infty} x\,\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-3}\right) = ?}$$

Megoldás.

$$\lim_{x\to-\infty} x\,\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-3}\right)\ \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-3}} = \lim_{x\to-\infty} x\,\frac{x^2+1-(x^2-3)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-3}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2}}}_{=\frac{x}{|x|}=\frac{x}{-x}=-1} \ \frac{4}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}} = -1\cdot\frac{4}{1+1} = -2$$

8. Feladat: További gyakorló feladatok

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (\sqrt{4x^2+3x}-2x) = ?$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{(\sqrt{x^2-4x}+x)} = ?$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} (2x^6-x^5+8x^3-5x^2+1) = ?$

Megoldás.

...

9. Feladat:

a) $\lim\limits_{x\to 3\pm 0} 2+5\{x\} = ?$	*b)* $\lim\limits_{x\to 3\pm 0} [x-1] = ?$

Megoldás.

$\lim\limits_{x\to 3+0} 2+5\{x\} = 2+5\cdot 0 = 0$

$\lim\limits_{x\to 3-0} 2+5\{x\} = 2+5\cdot 1 = 7$

$\lim\limits_{x\to 3+0} [x-1] = 2$, mert $x\in(3,4)$ esetén $x-1\in(2,3) \implies [x-1] = 2$

$\lim\limits_{x\to 3-0} [x-1] = 1$, mert $x\in(2,3)$ esetén $x-1\in(1,2) \implies [x-1] = 1$

10. Feladat:

+++

Bizonyítsa be, hogy $\lim\limits_{x\to 0} \cos\dfrac{1}{x}$ nem létezik!

Megoldás. ...

11. Feladat: További gyakorló feladatok

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \sin 7x^2 = ?$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} \sin 7x^2 = ?$

Megoldás.

...

2.2. Szakadások típusai

Hol és milyen szakadásai vannak az alábbi függvényeknek?
(Mindig határozza meg a jobb és bal oldali határértékeket a vizsgálandó pontokban!)

12. Feladat:

$$\boxed{f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^2\,(x+3)}}$$

Megoldás.

f két folytonos függvény hányadosa, így csak a nevező nullahelyeinél van szakadása.
Vizsgálandó pontok: $x = 0$, illetve $x = -3$

$$\lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{\frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x+3}}_{\to 1} = +\infty \quad : \qquad x = 0 \text{ másodfajú szakadási hely.}$$

$x = -3$-ban a határérték $\dfrac{0}{0}$ alakú, tehát a számlálóból is kiemelhető az $(x+3)$ gyöktényező.
$x^3 + x^2 - 5x + 3 = \ldots = (x+3)\,(x^2 - 2x + 1)$
(A polinomosztást szép lassan csináljuk, nem mindenki ismeri.)

$$\lim_{x \to -3} \underbrace{\frac{x+3}{x+3}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2}}_{\to 16/9} = \frac{16}{9} \quad : \qquad x = -3 \text{ -ban megszüntethető szakadása van.}$$

13. Feladat:

$$\boxed{f(x) = \frac{x^4 - 3x^3}{|2x^2 - 6x|}}$$

Megoldás.

f két folytonos függvény hányadosa, így csak a nevező nullahelyeinél van szakadása.

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{|x|} \cdot \frac{x-3}{|x-3|}$$

Vizsgálandó pontok: $x = 0$, illetve $x = 3$

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{x^3}{x}}_{=x^2 \to 0} \cdot \underbrace{\frac{x-3}{|x-3|}}_{\to -1} = 0 \qquad \lim_{x \to 0-0} \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{x^3}{-x}}_{=-x^2 \to 0} \cdot \underbrace{\frac{x-3}{|x-3|}}_{\to -1} = 0 \ :$$

$x = 0$ megszüntethető szakadási hely.

$$\lim_{x \to 3+0} \frac{1}{2} \cdot \underbrace{x^2}_{\to 9} \cdot \underbrace{\frac{x-3}{x-3}}_{\to 1} = \frac{9}{2} \qquad \lim_{x \to 3-0} \frac{1}{2} \cdot \underbrace{x^2}_{\to 9} \cdot \underbrace{\frac{x-3}{-(x-3)}}_{\to -1} = \frac{-9}{2} \ :$$

$x = 3$-ban véges ugrása van.

14. Feladat:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|4-x|} + \dfrac{1}{4-x}\,, & \text{ha } x \geq 2 \\[2ex] \dfrac{x^2 - 10x}{x^2 - 11\,x + 10}\,, & \text{ha } x < 2 \end{cases}$$

Megoldás.

Ha $x < 2$: $\quad f(x) = \dfrac{x\,(x-10)}{(x-1)\,(x-10)}$

Értelmezési tartomány: $x \neq 4\,,\ x \neq 1$

Vizsgálandó pontok: $1\,,\ 2\,,\ 4$

$$f(1 \pm 0) = \lim_{x \to 1 \pm 0} \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{\to \pm\infty} x \frac{x-10}{x-10} = \pm\infty \quad \text{másodfajú (lényeges) szakadás.}$$

$$f(2-0) = \lim_{x \to 2-0} \frac{x\,(x-10)}{(x-1)\,(x-10)} = 2 \qquad f(2+0) = \lim_{x \to 2+0} \left(\frac{1}{|4-x|} + \frac{1}{4-x} \right) = 1$$

f-nek $x = 2$-ben véges ugrása van (elsőfajú szakadás)

$$f(4+0) = \lim_{x \to 4+0} \underbrace{\left(\frac{1}{-(4-x)} + \frac{1}{4-x} \right)}_{=0} = 0$$

$$f(4-0) = \lim_{x \to 4-0} \left(\frac{1}{4-x} + \frac{1}{4-x} \right) = \lim_{x \to 4-0} \frac{2}{4-x} = \infty$$

$x = 4$: másodfajú szakadási hely

15. Feladat:

+++

Hol folytonos, hol milyen szakadása van?

$$f(x) = \begin{cases} 2x\ , & \text{ha } x \text{ rac.} \\ \\ x^2\ , & \text{ha } x \text{ irrac.} \end{cases}$$

Megoldás. ...

2.3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ határértékkel kapcsolatos példák

16. Feladat:

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5\,x^2}{\operatorname{tg} 3\,x^2} = ?}$$

Megoldás.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5\,x^2}{5\,x^2} \quad \frac{5\,x^2}{3\,x^2} \quad \frac{3\,x^2}{\sin 3\,x^2} \quad \cos 3\,x^2 = 1 \cdot \frac{5}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{5}{3}$$

17. Feladat:

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 9\,x^2}{x^2} = ?}$$

Megoldás.

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \quad \text{alapján:} \quad 1 - \cos 9x^2 = 2\ \sin^2 \tfrac{9x^2}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\ \sin^2 \frac{9x^2}{2}}{x^2} = \lim_{x \to 0} 2\ \frac{\sin \frac{9}{2}x^2}{\frac{9}{2}x^2}\ \frac{9}{2}\ \sin \tfrac{9}{2}x^2 = 2 \cdot 1 \cdot \frac{9}{2} \cdot 0 = 0$$

18. Feladat:

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\cos 2\sqrt[5]{x} - 1}{\sin \sqrt[3]{x}} = ?}$$

Megoldás.

Most is az előző azonosságot használjuk:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2\,\sin^2 \sqrt[5]{x}}{\sin \sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to 0} -2 \left(\frac{\sin \sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{x}}\right)^2 \underbrace{\frac{(\sqrt[5]{x})^2}{\sqrt[3]{x}}}_{...=\sqrt[15]{x}\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sin \sqrt[3]{x}} = -2\cdot 1\cdot 0\cdot 1 = 0$$

19. Feladat: Hol és milyen típusú szakadása van az alábbi függvényeknek?

$$f(x) = \frac{\sin(1-x)}{x^2-1} \qquad\qquad g(x) = \frac{\sin|2-x|}{x-2}$$

Megoldás.

$$f(x) = -\frac{\sin(1-x)}{1-x}\,\frac{1}{x+1}$$

Szakadási helyek: $x = 1$ és $x = -1$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} -\underbrace{\frac{\sin(1-x)}{1-x}}_{\to 1}\,\underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\to 1/2} = -\frac{1}{2} \quad : \quad \text{megszüntethető szakadás}$$

$$\lim_{x\to -1\pm 0} f(x) = \lim_{x\to -1\pm 0} \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\to\pm\infty}\,\underbrace{\left(-\frac{\sin(1-x)}{1-x}\right)}_{\to -\frac{\sin 2}{2}<0} = \mp\infty \quad : \text{másodfajú szakadás}$$

$$g(x) = \frac{\sin|2-x|}{x-2} = \frac{\sin|x-2|}{x-2}$$

(Nem muszáj átírni, de így talán jobban értik.)

Szakadási hely: $x = 2$

$$g(2+0) = \lim_{x\to 2+0} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = 1$$

$$g(2-0) = \lim_{x\to 2-0} \frac{\sin(-(x-2))}{x-2} = \lim_{x\to 2-0} -\frac{\sin(x-2)}{x-2} = -1$$

Véges ugrás (elsőfajú szakadás).

20. Feladat: További gyakorló feladatok:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}\, 7x}{\sin 9x} = ?$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x^2}{2x} = ?$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x - \sin 8x}{7x + \sin 2x} = ?$

d) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{5x - \sin 8x}{7x + \sin 2x} = ?$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 5x - 1}{7x^2} = ?$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x^2 - 1}{6x^3} = ?$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos \sqrt[3]{x^2}}{5x} = ?$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos \sqrt[5]{x}}{\sin \sqrt[3]{x^2}} = ?$

i) $\lim\limits_{x\to \infty} x^4 \sin \dfrac{2}{x^4} = ?$

j) $\lim\limits_{x\to 0} x^4 \sin \dfrac{2}{x^4} = ?$

21. Feladat:

Hol és milyen típusú szakadása van az alábbi függvénynek?

$$f(x) = \frac{\sin(x-2)}{(x^2+4)\sqrt{x^2-4x+4}}$$

Megoldás. ...

3. Egyváltozós valós függvények deriválása

3.1. Differenciálás a definícióval

A derivált definíciójával határozza meg az alábbi deriváltakat!

1. Feladat:

$$f(x) = \sqrt{6x+1} \qquad f'(4) = ?$$

Megoldás.

$$f'(4) = \lim_{h\to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{6(4+h)+1} - 5}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{25+6h} - 5}{h} \; \frac{\sqrt{25+6h} + 5}{\sqrt{25+6h} + 5} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{25+6h - 25}{h\,(\sqrt{25+6h} + 5)} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} \; \frac{6}{\sqrt{25+6h} + 5} = \frac{6}{10}$$

2. Feladat:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+7}} \qquad f'(1) = ?$$

Megoldás.

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{2(1+h)+7}} - \frac{1}{3}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3 - \sqrt{9+2h}}{h \cdot 3 \cdot \sqrt{9+2h}} \; \frac{3 + \sqrt{9+2h}}{3 + \sqrt{9+2h}} = \ldots =$$

$$= \lim_{h\to 0} -\frac{2}{3} \; \frac{h}{h} \; \frac{1}{\sqrt{9+2h}\;(3 + \sqrt{9+2h})} = -\frac{1}{27}$$

3. Feladat:

$$f(x) = \frac{1}{3x+1} \qquad f'(-1) = ?$$

Megoldás. ...

4. Feladat: További gyakorló feladatok:
A definícióval határozza meg az alábbi deriváltakat!

a) $f(x) = \sqrt{1-3x}$ $\qquad f'(-3) = ?$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x-5}$ $\qquad f'(6) = ?$

c) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ $\qquad f'(2) = ?$

d) $f(x) = \sqrt{x^2-4x+4} \cdot \sin(x-2)$ $\qquad f'(2) = ?$

5. Feladat:

(T) $\boxed{(\cos x)' = -\sin x\,, \quad x \in \mathbb{R}}$

Bizonyítsa be a tételt!
(Előadáson volt (vagy lesz) $(\sin x)' = \cos x$)

Megoldás.
$f(x) := \cos x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cdot \cos h - \sin x \cdot \sin h - \cos x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \cos x \cdot \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\to 0} - \sin x \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1} = -\sin x$$

Ugyanis:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\,\sin^2 \frac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\ \sin\frac{h}{2} = -1 \cdot 0 = 0$$

3.2. A deriválási szabályok gyakorlása

Írjuk fel a deriválási szabályokat a tablára, az összetett függvényét is!
Az előadásról tudjuk (vagy nem, akkor bátran állítsuk), hogy

$$(x^{\alpha})' = \alpha\, x^{\alpha-1} ,$$
$$(\sin x)' = \cos x .$$

Az előbb volt, hogy $(\cos x)' = -\sin x$. Ezekre lehet támaszkodni.

6. Feladat:

Ⓣ

> a) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} , \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
>
> b) $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} , \quad x \neq k\pi$
>
> Bizonyítsa be az állításokat!

Megoldás.

A hányadosfüggvény deriválási szabályát és a függvények definícióját használjuk fel.

$$\left(\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \right)$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x\, (\cos x)'}{\cos^2 x} = \ldots = \frac{1}{\cos^2 x} , \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x\, (\sin x)'}{\sin^2 x} = \ldots = \frac{-1}{\sin^2 x} , \qquad x \neq k\pi$$

7. Feladat:

> Deriváljuk az alábbi (vagy hasonló) függvényeket!
>
> $$\frac{x^2-2x+3}{2\,x^2+7} , \quad (x^2+1)\sqrt{1+2x^4} , \quad \frac{x^2+5x^3}{\sqrt{2x^6+3}} , \quad (x^3+2x^2-x)^6 ,$$
> $$\sin 3x , \quad \sin^3 2x , \quad \sin x^3 , \quad \sin^5 2x^3 , \quad (x^3 + \cos^2 x^4)^3$$

Megoldás.

$$\left(\frac{x^2-2x+3}{2\,x^2+7}\right)' = \frac{(2x-2)\,(2\,x^2+7) - (x^2-2x+3)\,4x}{(2\,x^2+7)^2}$$

$$\left((x^2+1)\sqrt{1+2x^4} \right)' = (x^2+1)'\sqrt{1+2x^4} + (x^2+1)\underbrace{\left(\sqrt{1+2x^4}\right)'}_{=(1+2x^4)^{1/2}} =$$

$$= 2x\sqrt{1+2x^4} + x^2\,\frac{1}{2}\,(1+2x^4)^{-1/2}\cdot\underbrace{(1+2x^4)'}_{=8\,x^3}$$

Most még ilyen részletességgel dolgozzanak!

$$\left(\frac{x^2+5x^3}{\sqrt{2x^6+3}}\right)' = \frac{(x^2+5x^3)'\,\sqrt{2x^6+3} - (x^2+5x^3)\,(\sqrt{2x^6+3})'}{(\sqrt{2x^6+3})^2} =$$

$$= \frac{(2x+15x^2)\,\sqrt{2x^6+3} - (x^2+5x^3)\ \frac{1}{2}(2x^6+3)^{-1/2}\ 12x^5}{(2x^6+3}$$

$$(\,(x^3+2x^2-x)^6\,)' = 6\,(x^3+2x^2-x)^5\,\underbrace{(x^3+2x^2-x)'}_{=\,3x^2+4x-1}$$

$$(\sin 3x\,)' = \cos 3x\,\cdot\,3$$

$$\left(\sin^3 2x\,\right)' = 3\cdot\sin^2 2x\,\cdot\,\underbrace{(\sin 2x)'}_{\cos 2x\,\cdot\,2}$$

$$(\sin x^3\,)' = \cos x^3\,\cdot\,3x^2$$

$$\left(\sin^5 2x^3\,\right)' = 5\cdot\sin^4 2x^3\cdot\underbrace{(\sin 2x^3)'}_{\cos 2x^3\,\cdot\,6x^2}$$

$$\left(\left(x^3+\cos^2 x^4\right)^3\right)' = 3\cdot\left(x^3+\cos^2 x^4\right)^2\cdot\left(x^3+\cos^2 x^4\right)'$$

$$\left(x^3+\cos^2 x^4\right)' = 3x^2 + 2\,\cos x^4\cdot\,\underbrace{(\cos x^4)'}_{-\,\sin x^4\,\cdot\,4x^3}$$

8. Feladat:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2(4x)+3} - \dfrac{8}{(x-2)^4}\,, & \text{ha } x \geq 0 \\[2ex] \dfrac{\sin^2 3x}{7\,x^2}\,, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Határozza meg a deriváltfüggvényt, ahol az létezik!

Megoldás.

$f'(2)\,\nexists$, mert a függvény nem értelmezett $x = 2$-ben.

$$f(0+0) = \lim_{x\to 0+0}\left(\frac{1}{\cos^2(4x)+3} - \frac{8}{(x-2)^4}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$f(0-0) = \lim_{x\to 0-0}\frac{\sin^2 3x}{7\,x^2} = \lim_{x\to 0-0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2\cdot\frac{9}{7} = \frac{9}{7} \neq f(0+0)$$

$f'(0)\,\nexists$, mert a függvény nem folytonos $x = 0$-ban (nem létezik a határérték itt).
Ha $x \neq 0$ és $x \neq 2$, akkor f deriválható, mert deriválható függvények összetétele.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2\ \cos 4x \cdot (-\sin 4x) \cdot 4}{(\cos^2 4x + 3)^2} - 8\,(-4)\,(x-2)^{-5}\,, & \text{ha } x > 0 \text{ és } x \neq 2 \\[2ex] \dfrac{2\ \sin 3x \cdot \cos 3x \cdot 3 \cdot 7x^2 - \sin^2 3x \cdot 14x}{49\,x^4}\,, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

3.3. A deriválási szabályok + definíció gyakorlása

9. Feladat:

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ Mutassuk meg, hogy $f'(0)\ \nexists$!

Megoldás.

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = \infty$$

Tehát $f'(0)\ \nexists$.

10. Feladat:

$$f(x) = \sqrt[3]{x}\ \sin \sqrt[3]{x^2} \qquad f'(x) = ?$$

($x = 0$-ban a definícióval dolgozzon!)

Megoldás.

Ha $x \neq 0$, akkor deriválható függvények összetétele és

$$f'(x) = \frac{1}{3}\, x^{-2/3}\ \sin \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}\ \left(\cos \sqrt[3]{x^2}\right)\, \frac{2}{3}\, x^{-1/3}$$

Ha $x = 0$, akkor a definícióval dolgozunk:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}\ \sin \sqrt[3]{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{\sqrt[3]{h}}\ \frac{\sin \sqrt[3]{h^2}}{\sqrt[3]{h^2}} = 1$$

11. Feladat:

$$f(x) = \sqrt[5]{x^3\ \mathrm{tg}\,(5\,x^2)}\,, \qquad |x| < \frac{1}{\sqrt{5}}$$

a) $f'(x) = ?$, ha $x \neq 0$

b) A derivált definíciója alapján határozza meg $f'(0)$ értékét!

Megoldás.

a) Ha $x \neq 0$, akkor létezik a derivált, mert deriválható függvények összetétele:

$$f'(x) = \left((x^3 \ \mathrm{tg}\, 5\, x^2)^{1/5} \right)' = \frac{1}{5} \ (x^3 \ \mathrm{tg}\, 5\, x^2)^{-4/5} \cdot (x^3 \ \mathrm{tg}\, 5\, x^2)'$$

$$(x^3 \ \mathrm{tg}\, 5\, x^2)' = 3x^2 \ \mathrm{tg}\, 5\, x^2 + x^3 \ \frac{1}{\cos^2 5x^2} \cdot 10x$$

b) $$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[5]{h^3 \ \mathrm{tg}\, 5h^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[5]{h^3 \ \dfrac{\sin 5h^2}{\cos 5h^2}}}{\sqrt[5]{h^5}} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[5]{h^3}}{\sqrt[5]{h^3}} \cdot \sqrt[5]{\frac{\sin 5h^2}{5h^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{5}}{\sqrt[5]{\cos 5h^2}} = 1 \cdot \sqrt[5]{1} \cdot \frac{\sqrt[5]{5}}{1} = \sqrt[5]{5}$$

12. Feladat:

$$\boxed{f(x) = |x-1| \cdot \sin(2x-2) \qquad\qquad f'(x) = ?}$$

Megoldás.

$g(x) := (x-1) \ \sin(2x-2)$
Ez egy mindenütt deriválható függvény:

$$g'(x) = 1 \cdot \sin(2x-2) + (x-1) \cdot \cos(2x-2) \cdot 2$$

g felhasználásával:

$$f(x) = \begin{cases} g(x)\,, & \text{ha } x \geq 1 \\ -g(x)\,, & \text{ha } x < 1 \end{cases}$$

Ezért

$$f'(x) = \begin{cases} g'(x)\,, & \text{ha } x > 1 \\ -g'(x)\,, & \text{ha } x < 1 \end{cases}$$

$x = 1$-ben legjobb a definícióval ellenőrizni a deriválhatóságot. (Használható lenne a segédlet 26. oldalán kimondott tétel is, de talán jobb ilyenkor a definíció.)

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{|x-1| \ \sin(2x-2) - 0}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} |x-1| \cdot \frac{\sin 2(x-1)}{2(x-1)} \cdot 2 = 0 \cdot 1 \cdot 2 = 0$$

13. Feladat:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

$f'(x) = ?$

Megoldás. ...

14. Feladat: További gyakorló feladatok:

a) $f(x) = |x^2 - 9| \cdot \sin(x-3)$, $f'(x) = ?$

b) $f(x) = |x^3 - 3x^2|$, $f'(x) = ?$

c) $f(x) = \sqrt[5]{x^2} \sin\sqrt[5]{x^3}$, $f'(x) = ?$

d) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x^2}{7x^2}, & \text{ha } x > 0 \\ |x(x-1)|, & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$$

$f'(x) = ?$

e) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3x-1}, & \text{ha } x \geq 1 \\ ax + b, & \text{ha } x < 1 \end{cases}$$

Adja meg a és b értékét úgy, hogy $f'(1)$ létezzen!

3.4. Elemi függvények

15. Feladat:

Rajzolja fel a tg és az arctg függvények grafikonját! Határozza meg értelmezési tartományukat, értékkészletüket, deriváltjukat!

16. Feladat:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = ?$

b) $\lim\limits_{x\to 3+0} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{3-x} = ?$ $\qquad \lim\limits_{x\to 3-0} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{3-x} = ?$

$\lim\limits_{x\to \infty} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{3-x} = ?$

c) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} = ?$

d) $\lim\limits_{x\to 3} \operatorname{arctg} \dfrac{x^2-3x}{3x-9} = ?$

e) $\lim\limits_{x\to \infty} \operatorname{arctg} \dfrac{x^2-1}{2x+3} = ?$

Megoldás.

a) $x = \operatorname{tg} u\,, \quad u = \operatorname{arctg} x \quad$ helyettesítéssel :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{u\to 0} \frac{u}{\operatorname{tg} u} = \lim_{u\to 0} \frac{u}{\sin u} \cos u = 1$$

b) $$\lim_{x\to 3+0} \operatorname{arctg} \underbrace{\frac{1}{3-x}}_{\to -\infty\,,\ \text{mert } 1/-0 \text{ alakú}} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 3-0} \operatorname{arctg} \underbrace{\frac{1}{3-x}}_{\to \infty\,,\ \text{mert } 1/+0 \text{ alakú}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to \infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{3-x} = \operatorname{arctg} 0 = 0$$

c) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} = 0$, mert ($0 \cdot$ korlátos) alakú.

d) $\lim\limits_{x\to 3} \operatorname{arctg} \dfrac{x^2-3x}{3x-9} = \lim\limits_{x\to 3} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{3}\,\dfrac{x-3}{x-3} = \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{x^2-1}{2x+3} = \lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} \underbrace{\left(\dfrac{x^2}{x}\,\dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{2+\frac{3}{x}}\right)}_{\to\infty} = \dfrac{\pi}{2}$

17. Feladat:

$f(x) = \sqrt[3]{x \, \operatorname{arctg} x^2}\,, \qquad f'(x) = ?$

($x = 0$-ban a definícióval dolgozzon!)

Megoldás.

Fel kell használni, hogy $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2} = 1$ az előző példában látottak alapján.

Adjuk fel házi feladatnak, mert nincs benne már új dolog!

18. Feladat:

$$f(x) = \begin{cases} x \, \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}\,, & \text{ha } x \neq 0 \\ a\,, & \text{ha } x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 \, \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}\,, & \text{ha } x \neq 0 \\ b\,, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

a) Határozza meg az a és b paraméterek értékét úgy, hogy az f és g folytonos legyen $x = 0$-ban!

b) $f'(0) = ?\,, \quad g'(0) = ?$

Megoldás.

a) $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} = 0\,, \qquad (0 \cdot \text{ korlátos alakú})$

Hasonlóan $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$

Tehát $a = f(0) := 0\,, \quad b = g(0) := 0$. Vagyis

$$f(x) = \begin{cases} x \, \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}\,, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0\,, & \text{ha } x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 \, \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}\,, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0\,, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvények már mindenütt folytonosak.

b) $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h \operatorname{arctg}\dfrac{1}{h} - 0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{h} \quad \nexists$

$\left(f'_+(0) = \dfrac{\pi}{2}, \qquad f'_-(0) = -\dfrac{\pi}{2} \right)$

$g'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(h) - g(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2 \operatorname{arctg}\dfrac{1}{h} - 0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h \cdot \operatorname{arctg}\dfrac{1}{h} = 0$

19. Feladat:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}, & \text{ha } x \neq 1 \\ \beta, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$

a) Megválasztható-e β értéke úgy, hogy az f függvény folytonos legyen $x = 1$-ben?

b) $f'(x) = ?$, ha $x \neq 1$

c) $\lim\limits_{x\to 1} f'(x) = ?$
Létezik-e $f'(1)$?

Megoldás.

a) $\lim\limits_{x\to 1+0} \operatorname{arctg}\underbrace{\dfrac{1+x}{1-x}}_{\to -\infty} = -\dfrac{\pi}{2} \neq \lim\limits_{x\to 1-0} \operatorname{arctg}\underbrace{\dfrac{1+x}{1-x}}_{\to \infty} = \dfrac{\pi}{2}$

Mivel $x = 1$-ben $\nexists$ a határérték, ezért nincs olyan β, melyre f folytonos lenne $x = 1$-ben.

b) Ha $x \neq 1$:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = \ldots = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\left(\left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1\cdot(1-x) - (1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2} \right)$$

c) $\lim\limits_{x\to 1} f'(x) = \dfrac{1}{2}$, de $f'(1) \nexists$, mert az f függvény nem folytonos $x = 1$-ben.

20. Feladat:

Ismertesse az arcsin függvény tulajdonságait (értelmezési tartomány, értékkészlet, ábra, derivált)!

21. Feladat:

$$f(x) = 3\pi - 2\arcsin(3-2x)$$

a) $D_f = ?\,,\quad R_f = ?\,,\quad f'(x) = ?$
b) Írja fel az $x_0 = \dfrac{7}{4}$ pontbeli érintőegyenes egyenletét!
c) Indokolja meg, hogy f-nek létezik az f^{-1} inverze!
$f^{-1}(x) = ?\,,\quad D_{f^{-1}} = ?\,,\quad R_{f^{-1}} = ?$

Megoldás.

a) $-1 \le 3-2x \le 1 \;\ldots \quad \Longrightarrow \quad D_f = [1,2]$

$3-2x \in [-1,1] \quad \Longrightarrow \quad \arcsin(3-2x) \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,,\,\dfrac{\pi}{2}\right]$

$\Longrightarrow \quad 2\arcsin(3-2x) \in [-\pi\,,\,\pi] \quad \Longrightarrow \quad R_f = [2\pi\,,\,4\pi]$

$$f'(x) = -2\,\frac{1}{\sqrt{1-(3-2x)^2}}\,(-2) = \frac{4}{\sqrt{1-(3-2x)^2}}\,,\quad x \in (1,2)$$

b) $y_é = f\left(\dfrac{7}{4}\right) + f'\left(\dfrac{7}{4}\right)\left(x - \dfrac{7}{4}\right) = \dfrac{10}{3}\pi + \dfrac{8}{\sqrt{3}}\left(x - \dfrac{7}{4}\right)$

c) $f'(x) > 0$, ha $x \in (1,2)$ és f folytonos $[1,2]$-ben, ezért f szigorúan monoton nő D_f-en, így a teljes értelmezési tartományban invertálható.

$y = 3\pi - 2\arcsin(3-2x) \quad \Longrightarrow \quad \ldots \qquad f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}\left(3 - \sin\dfrac{3\pi - x}{2}\right)$

$D_{f^{-1}} = R_f = [2\pi\,,\,4\pi]\,,\quad R_{f^{-1}} = D_f = [1,2]$

22. Feladat:

$$f(x) = \arccos\frac{4}{x^2} - \frac{\pi}{2}$$

a) $D_f = ?\,,\quad R_f = ?$
b) Adja meg a -5 pontot tartalmazó azon legbővebb intervallumot, melyen f invertálható!

$f^{-1}(x) = ?\,,\quad D_{f^{-1}} = ?\,,\quad R_{f^{-1}} = ?$

Megoldás.

a) f páros függvény.

ÉT.: $\left|\frac{4}{x^2}\right| \le 1 \implies |x| \ge 2$

$0 < \frac{4}{x^2} \le 1$ miatt $\arccos\frac{4}{x^2} \in \left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right) \implies R_f = \left[-\frac{\pi}{2}\,,\,0\right)$

b) $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{x^2}\right)^2}} \cdot \frac{-8}{x^3} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{x^2}\right)^2}} \cdot \frac{8}{x^3}\,,$ ha $|x| > 2$.

$f'(x) < 0\,,$ ha $x \in (-\infty, -2)$ és f folytonos $I = (-\infty, -2]$ -n $\implies$ f szigorúan monoton csökken I -n, tehát invertálható I -n. ($-5 \in I$)

$y = \arccos\frac{4}{x^2} - \frac{\pi}{2} \implies \ldots \qquad f^{-1}(x) = \frac{-2}{\sqrt{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}}$

$D_{f^{-1}} = R_f = \left[-\frac{\pi}{2}\,,\,0\right)\,, \quad R_{f^{-1}} = D_f = (-\infty, -2]$

23. Feladat:

Deriválja az alábbi függvényeket!

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{ch} 5x^2\,, & \text{ha } x \ge 0 \\ \operatorname{sh} 2x - 3x\,, & \text{ha } x < 0 \end{cases} \quad ; \qquad g(x) = (1+x^4)^{2x}$$

Megoldás.

Rajzoljuk fel az $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ függvényeket!

$f(0+0) = f(0) = \operatorname{ch} 0 = 1 \ne f(0-0) = 0 \implies f$ nem folytonos $x = 0$ -ban
$\implies f'(0) \nexists$

Egyébként f deriválható függvények összetétele és így deriválható:

$$f'(x) = \begin{cases} 10x\ \operatorname{sh} 5x^2\,, & \text{ha } x > 0 \\ 2\ \operatorname{ch} 2x - 3\,, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

g exponenciális hatványfüggvény, ennek megfelelően deriváljuk:

$g(x) = e^{\ln(1+x^4)^{2x}} = e^{2x\ \ln(1+x^4)}$

$g'(x) = e^{2x\ \ln(1+x^4)} \cdot (2x\ \ln(1+x^4))' = (1+x^4)^{2x} \cdot \left(2\ \ln(1+x^4) + 2x\frac{4x^3}{1+x^4}\right)$

24. Feladat:

$$f(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{e}^{-\dfrac{1}{(x-2)^2}}, & \text{ha } x > 2 \\ \mathrm{ch}^2\,(x-2)^3, & \text{ha } x \le 2 \end{cases}$$

Írja fel $f'(x)$ értékét, ahol az létezik!

Megoldás. ...

25. Feladat:

$$f(x) = 2\ \mathrm{arctg}\,\frac{1}{x^2} - \pi$$

Hol és milyen szakadása van a függvénynek?

Írja fel $f'(x)$ értékét, ahol az létezik!

Adjon meg egy intervallumot, melyen létezik f^{-1}!

$f^{-1}(x) = ?$, $D_{f^{-1}} = ?$, $R_{f^{-1}} = ?$

Megoldás. ...

3.5. L'Hospital szabály

26. Feladat:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{arctg}\,2\,x^3}{\mathrm{arsh}\,5\,x^3} = ?$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 3\,x^2}{\mathrm{tg}^2\,x} = ?$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-5x} = ?$

d) $\lim\limits_{x\to +0} \sqrt{x}\,\ln x^7 = ?$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right) = ?$

f) $\lim\limits_{x\to +0} x^{\mathrm{tg}\,x} = ?$

g) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{8x} - 2\,\mathrm{e}^{-3x}}{\mathrm{e}^{5x} + \mathrm{e}^{-3x}} = ?$

h) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\mathrm{sh}\,(3x-2)}{\mathrm{ch}\,(3x+4)} = ?$

Megoldás.

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{arctg}\,2\,x^3}{\mathrm{arsh}\,5\,x^3} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{1+(2x^3)^2}\quad 6x^2}{\dfrac{1}{\sqrt{1+(5x^3)^2}}\quad 15x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{5}\,\frac{\dfrac{1}{1+(2x^3)^2}}{\dfrac{1}{\sqrt{1+(5x^3)^2}}} = \frac{2}{5}$$

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin 3\,x^2}{\mathrm{tg}^2\, x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-(3x^2)^2}}\; 6x}{2\ \mathrm{tg}\, x\ \dfrac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0} 3\frac{1}{\sqrt{1-9x^4}}\ \frac{x}{\sin x}\ \cos^3 x = 3$$

c) $$\lim_{x\to\infty} x^2\, \mathrm{e}^{-5x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^{5x}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{5\,\mathrm{e}^{5x}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{25\,\mathrm{e}^{5x}} = 0$$

d) $$\lim_{x\to +0} \sqrt{x}\ \ln x^7 = \lim_{x\to +0} \frac{\ln x^7}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to +0} \frac{7\ \ln x}{x^{-1/2}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to +0} \frac{7\ \dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{2}\ x^{-3/2}} =$$

$$= \lim_{x\to +0} -14\ \sqrt{x} = 0$$

e) $$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{x\ \ln x - x + 1}{(x-1)\ \ln x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\ln x + x\ \dfrac{1}{x} - 1}{\ln x + (x-1)\ \dfrac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\ln x + 1 - \dfrac{1}{x}} \overset{\text{L'H}}{=} \frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

f) $$\lim_{x\to +0} x^{\mathrm{tg}\, x} = \lim_{x\to +0} \mathrm{e}^{\ln x^{\mathrm{tg}\, x}} = \lim_{x\to +0} \mathrm{e}^{\mathrm{tg}\, x\cdot \ln x} = \mathrm{e}^0 = 1\ , \text{ mert}$$

$$\lim_{x\to +0} \mathrm{tg}\, x\cdot \ln x = \lim_{x\to +0} \frac{\ln x}{\mathrm{ctg}\, x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to +0} \frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to +0} -\frac{\sin x}{x}\ \sin x = 0$$

g) A L'Hospital szabály alkalmazása most nem vezetne eredményre.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\mathrm{e}^{8x} - 2\,\mathrm{e}^{-3x}}{\mathrm{e}^{5x} + \mathrm{e}^{-3x}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\mathrm{e}^{-3x}}{\mathrm{e}^{-3x}}\ \frac{\mathrm{e}^{11x} - 2}{\mathrm{e}^{8x} + 1} = 1\cdot \frac{0-2}{0+1} = -2$$

h) Itt sem vezet eredményre a L'Hospital szabály. Beírva a függvények definícióját, az előző példához hasonlóan járhatunk el:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{sh}\,(3x-2)}{\mathrm{ch}\,(3x+4)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{3x-2} - \mathrm{e}^{-(3x-2)}}{\mathrm{e}^{3x+4} + \mathrm{e}^{-(3x+4)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{3x}}\ \frac{\mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^{-6x+2}}{\mathrm{e}^{4} + \mathrm{e}^{-6x-4}} = \frac{\mathrm{e}^{-2}}{\mathrm{e}^{4}}$$

3.6. Intervallumon deriválható függvények tulajdonságai, függvényvizsgálat

27. Feladat:

$$f(x) = (x-3)^3\ (x+5)^4$$

a) Adja meg azokat a legbővebb intervallumokat, melyeken a függvény szigorúan monoton!
b) Hol van lokális szélsőértéke?

Megoldás.

$f'(x) = 3(x-3)^2\,(x+5)^4 + (x-3)^3 4(x+5)^3 = \ldots = \underbrace{(x-3)^2(x+5)^2}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(x+5)(7x+3)}_{\text{rajzoljuk fel!}}$

x	$(-\infty,-5)$	-5	$\left(-5,-\frac{3}{7}\right)$	$-\frac{3}{7}$	$\left(-\frac{3}{7},3\right)$	3	$(3,\infty)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

Tehát f szigorúan monoton nő: $(-\infty,-5)$ és $\left(-\frac{3}{7},\infty\right)$ intervallumokon,

f szigorúan monoton csökken: $\left(-5,-\frac{3}{7}\right)$-en.

$x = -5$-ben lokális maximum van, mert f növekvőből csökkenőbe megy át.

$x = -\frac{3}{7}$-ben lokális minimum van, mert f csökkenőből növekvőbe változik.

28. Feladat:

$$f(x) = \ln(x^2+2x+2)$$

Keresse meg azokat az intervallumokat, melyeken a függvény
- monoton nő, illetve monoton csökken;
- alulról konvex, alulról konkáv.

Megoldás.

$f(x) = \ln(x^2+2x+2) = \ln\underbrace{((x+1)^2+1)}_{\geq 1} \implies D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+2}$$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,\infty)$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

Tehát f (szigorúan) monoton csökken $(-\infty,-1)$-en és (szigorúan) monoton nő $(-1,\infty)$-en.

$$f''(x) = \frac{2(x^2+2x+2) - (2x+2)(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{-2x\,(x+2)}{(x^2+2x+2)^2}$$

A nevező ≥ 1, a számlálóban levő parabolát pedig rajzoljuk fel!

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,\infty)$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\cap$	(infl. pont)	$\cup$	(infl. pont)	$\cap$

29. Feladat:

$$f(x) = x\,e^{-3x}$$

Hol monoton növő, illetve csökkenő az f függvény?
Hol van lokális szélsőértéke?

Megoldás.

$f'(x) = 1 \cdot e^{-3x} + x\,e^{-3x}\,(-3) = (1-3x)\,e^{-3x} = 0\,,$ ha $x = \dfrac{1}{3}\,.$

x	$\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	lok.max.	$\searrow$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\,e^{-1}$$

30. Feladat:

$$f(x) = 2x^6 - 15x^5 + 20x^4$$

Hol konvex, hol konkáv a függvény? Hol van inflexiós pontja?

Megoldás.

$f'(x) = 12\,x^5 - 75\,x^4 + 80\,x^3$

$f''(x) = 60\,x^4 - 300\,x^3 + 240\,x^2 = \underbrace{60x^2}_{\geq 0}\,\underbrace{(x^2 - 5x + 4)}_{(x-1)\,(x-4)}$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 4)$	4	$(4, \infty)$
f''	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$		$\cup$	infl.p.	$\cap$	infl.p.	$\cup$

31. Feladat:

$$f(x) = x\,e^{-x^2}$$

Keresse meg azokat az intervallumokat, amelyeken az f függvény konvex, illetve konkáv!
Hol van inflexiója az f függvénynek?

Megoldás.

$f'(x) = e^{-x^2} + x\,e^{-x^2}\,(-2x) = e^{-x^2} - 2x^2\,e^{-x^2}$

$f''(x) = e^{-x^2}\,(-2x) - 4x\,e^{-x^2} - 2x^2\,e^{-x^2}\,(-2x) = e^{-x^2}\,(4x^3 - 6x) = e^{-x^2}\,2x\,(2x^2 - 3)$

Ábrázoljuk vázlatosan a $2x\,(2x^2 - 3)$ függvényt, mert így könnyebb az előjelvizsgálat!

(Harmadfokú polinom, nullahelyek: $-\sqrt{\frac{3}{2}}\,,\ 0\,,\ \sqrt{\frac{3}{2}}\,;$
$+\infty$ -ben $+\infty$ -hez tart a függvény és $-\infty$ -ben $-\infty$ -hez tart a függvény.)

Ennek alapján:

x	$\left(-\infty,-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},0\right)$	0	$\left(0,\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\infty\right)$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cap$	infl.p.	$\cup$	infl.p.	$\cap$	infl.p.	$\cup$

32. Feladat: Hol konvex, hol konkáv az

$$f(x) = x^2\,\ln(\mathrm{e}\,x)$$

függvény? Van-e inflexiós pontja?

Megoldás. $D_f = (0,\infty)$

$f'(x) = 2x\,\ln(\mathrm{e}\,x) + x^2\,\dfrac{1}{\mathrm{e}\,x}\,\mathrm{e} = 2x\,\ln(\mathrm{e}\,x) + x$

$f''(x) = 2\,\ln(\mathrm{e}\,x) + 2x\,\dfrac{1}{\mathrm{e}\,x}\,\mathrm{e} + 1 = 2\,\ln(\mathrm{e}\,x) + 3 = 0$

$\Longrightarrow \quad \ln(\mathrm{e}\,x) = -\dfrac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{e}\,x = \mathrm{e}^{-3/2} \quad \Longrightarrow \quad x = \mathrm{e}^{-5/2}$

x	$(0\,,\ \mathrm{e}^{-5/2})$	$\mathrm{e}^{-5/2}$	$(\mathrm{e}^{-5/2}\,,\ \infty)$
f''	$-$	0	$+$
f	$\cap$	(infl. pont)	$\cup$

33. Feladat: Vizsgálja meg és vázlatosan ábrázolja az

$$f(x) = \frac{\ln(\mathrm{e}\,x)}{x}$$

függvényt? Konvex-konkáv tulajdonságot, inflexiót most ne vizsgáljon!

Megoldás. $D_f = (0,\infty)$

Nullahely: $\mathrm{e}\,x = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$

$$\lim_{x\to+0} \underbrace{\frac{\ln(\mathrm{e}\,x)}{x}}_{\frac{-\infty}{+0}\ \text{alakú}} = -\infty \qquad\qquad \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{\ln(\mathrm{e}\,x)}{x}}_{\frac{\infty}{\infty}\ \text{alakú}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

$$f'(x) = \frac{x\,\frac{1}{x} - \ln(\mathrm{e}\,x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(\mathrm{e}\,x)}{x^2} = 0 \implies \ln(\mathrm{e}\,x) = 1 \implies x = 1\,,\ f(1) = 1$$

x	$(0\,,1)$	1	$(1\,,\infty)$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Ábra

34. Feladat:

Végezzen függvényvizsgálatot és vázlatosan ábrázolja a függvényt!

a) $f(x) = x^3 \cdot \mathrm{e}^{-x}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x}$

Megoldás.

a) $f(x) = x^3 \cdot \mathrm{e}^{-x}$

$D_f = \mathbb{R}$; Nullahely: $x = 0$

$\lim\limits_{x\to\infty} x^3 \cdot \mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{\mathrm{e}^x} \overset{\text{L'H}}{=} \dots = 0$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 \cdot \mathrm{e}^{-x} = -\infty$

Nem páros, nem páratlan, nem periodikus.

$f'(x) = 3x^2\,\mathrm{e}^{-x} - x^3\,\mathrm{e}^{-x} = x^2\,\mathrm{e}^{-x}\,(3 - x)$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,3)$	3	$(3,\infty)$
f'	$+$	0	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$		$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

$f(3) = 27\,\mathrm{e}^{-3} = \dfrac{27}{\mathrm{e}^3}$

$$f''(x) = 6x\,\mathrm{e}^{-x} - 3x^2\,\mathrm{e}^{-x} - 3x^2\,\mathrm{e}^{-x} + x^3\,\mathrm{e}^{-x} = x\,\mathrm{e}^{-x}\,\underbrace{(x^2 - 6x + 6)}_{=0\,:\,x=3\pm\sqrt{3}}$$

x	$(-\infty,0)$	0	$\left(0,3-\sqrt{3}\right)$	$3-\sqrt{3}$	$\left(3-\sqrt{3},3+\sqrt{3}\right)$	$3+\sqrt{3}$	$(3+\sqrt{3},\infty)$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cap$	infl.p.	$\cup$	infl.p.	$\cap$	infl.p.	$\cup$

$$R_f = \left(-\infty\,,\ \frac{27}{\mathrm{e}^3}\right]$$

Ábra

b) $\quad f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x} = x + 1 - \dfrac{2}{x} = \dfrac{(x-1)(x+2)}{x}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\quad \lim\limits_{x \to +0} \left(x + 1 - \dfrac{2}{x} \right) = -\infty$; $\quad \lim\limits_{x \to -0} \left(x + 1 - \dfrac{2}{x} \right) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(x + 1 - \dfrac{2}{x} \right) = \pm\infty$

Nullahelyek: $\quad x = 1$, $\quad x = -2$

$f'(x) = \left(x + 1 - \dfrac{2}{x} \right)' = 1 + \dfrac{2}{x^2} > 0$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
f'	$+$	$\nexists$	$+$
f	$\nearrow$	szak.h.	$\nearrow$

$f''(x) = -\dfrac{4}{x^3}$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
f'	$+$	$\nexists$	$-$
f	$\cup$	szak.h.	$\cap$

Ábra

Megjegyzés:
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - (x+1)) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(-\dfrac{2}{x} \right) = 0 \quad \Longrightarrow$ A függvény, ha $x \to \pm\infty$ egyre közelebb kerül az $y = x + 1$ lineáris függvényhez (lineáris aszimptota). (Beszéljünk róla, ha a feladat befér a gyakorlatba, de a hallgatótól nem várjuk el, hogy észrevegye.)

35. Feladat: (Most ilyen példát nem veszünk.)

Van-e lineáris aszimptotája az alábbi függvénynek $+\infty$ -ben?

a) $\quad f(x) = 2x + x \cdot \sin \dfrac{1}{x}$

b) $\quad f(x) = \sqrt{4x^2 + 3x}$

c) $\quad f(x) = \dfrac{2x^3 + 1}{x^2 + x - 3}$

3.7. Abszolút szélsőérték

36. Feladat:

$$f(x) = x^3 + \frac{48}{x^2}$$

a) Végezzen függvényvizsgálatot és vázlatosan ábrázolja a függvényt!
b) Beszélhetünk-e a függvény maximumáról illetve minimumáról az $[1,3]$ intervallumon? Ha igen, akkor mennyi ezek értéke?

Megoldás.

a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\qquad \lim\limits_{x\to 0} x^3 + \frac{48}{x^2} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, $\qquad \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

Nem páros, nem páratlan, nem periodikus.

Nullahely: $\quad f(x) = \frac{x^5 + 48}{x^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(\sqrt[5]{-48}) = 0$

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{96}{x^3} = \frac{3\,(x^5 - 32)}{x^3} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 2\ , \quad f(2) = 20$$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,\infty)$
f'	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	szak.h.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

$$f''(x) = 6x + \frac{3\cdot 96}{x^4} = 6\cdot\frac{x^5 + 48}{x^4} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt[5]{-48}\ , \quad (f(\sqrt[5]{-48}) = 0)$$

x	$(-\infty,\sqrt[5]{-48})$	$\sqrt[5]{-48}$	$(\sqrt[5]{-48},0)$	0	$(0,\infty)$
f''	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$
f	$\cap$	infl.p.	$\cup$	szak.h.	$\cup$

Ábra

b) Mivel f folytonos $[1,3]$-ban (zárt!) $\Longrightarrow$ $\exists$ min., max. (Weierstrass II. tétele.)

Mivel f az intervallumon mindenütt deriválható, a szóbajöhető pontok:
- a lokális szélsőérték: $\quad f(2) = 20$,
- az intervallum végpontjai: $\quad f(1) = 49$, $\quad f(3) = 27 + \frac{48}{9}$

$$\Longrightarrow \quad \min_{x\in[1,2]} \{f(x)\} = 20 \,, \qquad \max_{x\in[1,2]} \{f(x)\} = 49$$

37. Feladat:

$$f(x) = x^2 \, \mathrm{e}^{-3x}$$

Van-e minimuma, illetve maximuma az f függvénynek a $[0\,,\,1]$ intervallumon? (Indokoljon!)
Ha igen, határozza meg!

Megoldás. ... $f'(x) = x\,\mathrm{e}^{-3x}\,(2-3x)$ ...

$$\min_{x\in[0,1]} \{f(x)\} = f(0) = 0 \,, \qquad \max_{x\in[0,1]} \{f(x)\} = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}\,\mathrm{e}^{-2}$$

3.8. Implicit megadású függvények deriválása

38. Feladat:

Az $y(x)$ függvény az $x_0 = \mathrm{e}$ pont környezetében differenciálható és kielégíti az

$$x\,\ln y + y\,\ln x = 1$$

implicit függvénykapcsolatot.
Határozza meg ezen függvény (e,1) pontjabeli érintő egyenesének egyenletét!

Megoldás.

Ellenőrizzük a pontot!

$$\mathrm{e}\cdot\ln 1 + 1\cdot\ln\mathrm{e} \stackrel{?}{=} 1 \qquad \text{Igaz.}$$

Tehát az $y(x)$ valóban átmegy az adott ponton: $y(\mathrm{e}) = 1\,.$

$$x\,\ln y(x) + y(x)\,\ln x = 1$$

Mindkét oldalt x szerint deriváljuk:

$$1\cdot\ln y(x) + x\cdot\frac{1}{y(x)}\cdot y'(x) + y'(x)\cdot\ln x + y(x)\cdot\frac{1}{x} = 0$$

Behelyettesítve $x = \mathrm{e}$-t $(y(\mathrm{e}) = 1)$, kapjuk $y'(\mathrm{e})$-t:

$$\ln 1 + \mathrm{e} \cdot y'(\mathrm{e}) + y'(\mathrm{e}) \cdot \ln \mathrm{e} + \frac{1}{\mathrm{e}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad y'(\mathrm{e}) = -\frac{1}{\mathrm{e}\,(\mathrm{e}+1)}$$

Az érintőegyenes egyenlete:

$$y_{\text{é}} = y(\mathrm{e}) + y'(\mathrm{e})(x - \mathrm{e}) \;=\; 1 \;-\; \frac{1}{\mathrm{e}\,(\mathrm{e}+1)}\,(x - \mathrm{e})$$

39. Feladat:

A differenciálható $y = y(x)$ átmegy az $x_0 = 1$, $y_0 = -1$ ponton és x_0 egy környezetében kielégíti az alábbi implicit egyenletet:

$$y^2 \,+\, 2\,y^5 \,+\, \mathrm{e}^{2x-2} \,-\, (x-1)^4 \,=\, 0$$

Van-e ennek a függvénynek lokális szélsőértéke az $x_0 = 1$ pontban?
Van-e inflexiója a függvénynek ugyanitt?

Megoldás.

$1 - 2 + 1 - 0 \overset{?}{=} 0$ Igaz.
Az x-től való függést már nem jelölöm, így áttekinthetőbb:

$$2y\,y' \,+\, 10y^4\,y' \,+\, 2\mathrm{e}^{2x-2} \,-\, 4(x-1)^3 = 0$$

Behelyettesítés: $x = 1$, $y = -1$

$$-2y'(1) \,+\, 10y'(1) \,+\, 4 \,-\, 0 \,=\, 0 \quad \Longrightarrow \quad y'(1) \,=\, -\frac{1}{4}$$

Mivel $y'(1) \neq 0 \quad \Longrightarrow$ nincs lokális szélsőértéke $x = 1$-ben (nem teljesül a szükséges feltétel).

$$2y'\,y' \,+\, 2y\,y'' \,+\, 40y^3\,y'\,y' \,+\, 10\,y^4\,y'' \,+\, 4\mathrm{e}^{2x-2} \,-\, 12(x-1)^2 = 0$$

$x = 1$, $y = -1$, $y' = -\dfrac{1}{4}$:

$$\frac{1}{8} \,-\, 2\,y''(1) \,-\, \frac{40}{16} \,+\, 10\,y''(1) \,+\, 4 \,-\, 0 \,=\, 0$$

Elég csak felírni, hogy ebből $y''(1) = -\dfrac{13}{64}$ (ha igaz).
Mivel $y''(1) \neq 0 \quad \Longrightarrow$ nincs inflexiós pontja $x = 1$-ben (nem teljesül a szükséges feltétel).

3.9. Paraméteres megadású görbék

40. Feladat:

Legyen

$$x = t + \sin 4t\,, \qquad\qquad y = t + \sin 2t$$

a) Indokolja meg, hogy a fenti paraméteresen megadott görbének van $y = f(x)$ előállítása a $t_0 = \dfrac{\pi}{8}$ paraméterhez tartozó $x_0 = x(t_0)$ pont egy környezetében!
b) $f'(x_0) = ?\,,\quad f''(x_0) = ?$ Van-e lokális szélsőértéke, illetve inflexiója az f függvénynek az x_0 pontban?
c) Írja fel a t_0 paraméterű pontban az érintő egyenes egyenletét! (Descartes koordinátákkal.)

Megoldás.

a) $\dot{x}(t) = 1 + 4\cos 4t$

$$\dot{x}\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 > 0 \text{ és } \dot{x}(t) \text{ folytonos} \quad \Longrightarrow \quad \exists \left(\frac{\pi}{8} - \delta\,, \frac{\pi}{8} + \delta\right)\,, \text{ ahol } \dot{x}(t) > 0$$

$\Longrightarrow$ itt $x(t)$ szigorúan monoton nő
$\Longrightarrow$ $\exists$ inverze: $t = t(x)$ és így $\exists\, f(x) = y(t(x))$.

b) $\dot{y}(t) = 1 + 2\cos 2t\,, \qquad \dot{y}\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 1 + \sqrt{2}$

$$x_0 = x\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{\pi}{8}$$

$$f'(x_0) = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)} : \qquad f'\left(1 + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{\dot{y}\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\dot{x}\left(\frac{\pi}{8}\right)} = 1 + \sqrt{2} > 0$$

$\Longrightarrow$ f lokálisan nő x_0-ban. (Nincs lokális szélsőérték itt.)

$$\ddot{x} = -16\sin 4t\,, \qquad \ddot{x}\left(\frac{\pi}{8}\right) = -16$$

$$\ddot{y} = -4\sin 2t\,, \qquad \ddot{y}\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$$

$$f''\left(1 + \frac{\pi}{8}\right) = \left.\frac{\ddot{y}\,\dot{x} - \dot{y}\,\ddot{x}}{\dot{x}^3}\right|_{t_0} = \frac{-2\sqrt{2} - (1+\sqrt{2})(-16)}{1} = 16 + 14\sqrt{2} > 0$$

Nincs x_0-ban inflexiós pont, mert nem teljesül a szükséges feltétel $(f''(x_0) \neq 0)$.

c) $$y_{\text{é}} = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) = y(t_0) + \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}\,(x - x(t_0)) =$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{\sqrt{2}} + (1 + \sqrt{2})\,\left(x - (1 + \frac{\pi}{8})\right)$$

4. Egyváltozós valós függvények integrálása

4.1. Határozatlan integrál

Szükséges fogalmak: primitív függvény, határozatlan integrál.

1. Feladat:

a) $$\boxed{\int (2x+3)^5 \, \mathrm{d}x} = \frac{1}{2} \int \underbrace{2 \cdot (2x+3)^5}_{f' \cdot f^5} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \, \frac{(2x+3)^6}{6} + C$$

b) $$\boxed{\int \frac{1}{(2x+3)^5} \, \mathrm{d}x} = \frac{1}{2} \int \underbrace{2 \cdot (2x+3)^{-5}}_{f' \cdot f^{-5}} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \, \frac{(2x+3)^{-4}}{-4} + C$$

c) $$\boxed{\int \frac{2}{9x+1} \, \mathrm{d}x} = \frac{2}{9} \int \underbrace{\frac{9}{9x+1}}_{f'/f} \, \mathrm{d}x = \frac{2}{9} \ln|9x+1| + C$$

d) $$\boxed{\int \frac{2}{(9x+1)^2} \, \mathrm{d}x} = \frac{2}{9} \int \underbrace{9\,(9x+1)^{-2}}_{f' \cdot f^{-2}} \, \mathrm{d}x = \frac{2}{9} \, \frac{(9x+1)^{-1}}{-1} + C$$

e) $$\boxed{\int \frac{2}{9x^2+1} \, \mathrm{d}x} = 2 \int \frac{1}{1+(3x)^2} \, \mathrm{d}x = 2 \, \frac{\operatorname{arctg} 3x}{3} + C$$

f) $$\boxed{\int \frac{2}{9x^2+3} \, \mathrm{d}x} = \frac{2}{3} \int \frac{1}{1+(\sqrt{3}\,x)^2} \, \mathrm{d}x = \frac{2}{3} \, \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{3}\,x}{\sqrt{3}} + C$$

g) $$\boxed{\int \frac{2x}{9x^2+3} \, \mathrm{d}x} = \frac{1}{9} \int \underbrace{\frac{18\,x}{9x^2+3}}_{f'/f} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{9} \ln(9x^2+3) + C$$

h) A következő két feladatot az előző kettő mintájára oldhatjuk meg.

$$\boxed{\int \frac{2x+4}{9x^2+3} \, \mathrm{d}x} = \cdots \qquad \text{(Hf.)}$$

$$\boxed{\int \frac{7x+5}{9x^2+3} \, \mathrm{d}x} = \cdots \qquad \text{(Hf.)}$$

i) $$\boxed{\int \frac{2}{9x^2+6x+3} \, \mathrm{d}x} = 2 \int \frac{1}{(3x+1)^2+2} \, \mathrm{d}x = \frac{2}{2} \int \frac{1}{1+(\frac{3x+1}{\sqrt{2}})^2} \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\operatorname{arctg} \frac{3x+1}{\sqrt{2}}}{\frac{3}{\sqrt{2}}} + C$$

j) $\boxed{\displaystyle\int \frac{18x+8}{9x^2+6x+3}\,\mathrm{d}x}$

Felhasználjuk az előző példa eredményét:

$$I = \int \frac{18x+6}{9x^2+6x+3}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2}{9x^2+6x+3}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \ln(9x^2+6x+3) + \frac{\operatorname{arctg} \frac{3x+1}{\sqrt{2}}}{\frac{3}{\sqrt{2}}} + C$$

●●●

Összefoglalva az előző példák tanulságait

$$\boxed{\int \frac{\alpha\, x+\beta}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x \quad \text{típusú integrálok megoldása}}$$

$f(x) := ax^2+bx+c\,, \qquad D := b^2-4ac$

$D \geq 0$ esetén részlettörtekre bontással dolgozunk. (Ezt később vesszük.)
$D < 0$ esetén az alábbi átalakítással dolgozunk:

$$\int \frac{\alpha\, x+\beta}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = k_1 \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x + k_2 \int \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x = k_1 \ln|f(x)| + k_2 \int \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x$$

A megmaradt határozatlan integrál meghatározása:

A nevezőben teljes négyzetté kiegészítés és esetleges kiemelés után a következő alakot kapjuk:

$$\int \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x = k_3 \int \frac{1}{1+(...)^2}\,\mathrm{d}x = k_3 \frac{\operatorname{arctg}(...)}{(...)'} + C$$

Itt $(...)$: $x-$nek lineáris függvénye, így a nevezőbe konstans került.

Ezzel a módszerrel oldja meg az alábbi feladatot!

k) $\boxed{\displaystyle\int \frac{9x+2}{9x^2+6x+3}\,\mathrm{d}x} = \cdots$ (Hf.)

●●●

Most áttérünk az $\displaystyle\int \frac{\alpha\, x+\beta}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$ típusú integrálok számítására.
Először egyszerűbb példákat csinálunk, majd ezt is megbeszéljük általánosan.

l) $$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4x-12}}\,\mathrm{d}x} = \int \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2-16}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{(\frac{x-2}{4})^2-1}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{\operatorname{arch}\frac{x-2}{4}}{\frac{1}{4}} + C$$

m) $$\boxed{\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x-12}}\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\int \underbrace{(2x-4)\,(x^2-4x-12)^{-1/2}}_{f'\cdot f^{-1/2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(x^2-4x-12)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C$$

n) A következő példa megint az előző két típus egyesítése, azok eredményét felhasználjuk:

$$\boxed{\int \frac{4x-2}{\sqrt{x^2-4x-12}}\,\mathrm{d}x} = 2\int \frac{2x-4+3}{\sqrt{x^2-4x-12}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\left(\int (2x-4)\,(x^2-4x-12)^{-1/2}\,\mathrm{d}x + 3\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4x-12}}\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= 2\left(\frac{(x^2-4x-12)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + 3\cdot\frac{1}{4}\,\frac{\operatorname{arch}\frac{x-2}{4}}{\frac{1}{4}}\right) + C$$

•••

Összefoglalva az előző példák tanulságait:

$$\boxed{\int \frac{\alpha\,x+\beta}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x \quad \text{típusú integrálok megoldása}}$$

$f(x) := ax^2+bx+c$

Az alábbi átalakítással dolgozunk:

$$\int \frac{\alpha\,x+\beta}{\sqrt{f(x)}}\,\mathrm{d}x = k_1\int f'(x)\,f^{-1/2}(x)\,\mathrm{d}x + k_2\int \frac{1}{\sqrt{f(x)}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= k_1\,\frac{f^{1/2}(x)}{1/2} + k_2\int \frac{1}{\sqrt{f(x)}}\,\mathrm{d}x$$

A megmaradt határozatlan integrál kiszámítása:

A nevezőben teljes négyzetté kiegészítés és esetleges kiemelés után a következő esetek egyikét kapjuk:

$$\int \frac{1}{\sqrt{f(x)}}\,\mathrm{d}x = k_3\int \frac{1}{\sqrt{1-(...)^2}}\,\mathrm{d}x = k_3\,\frac{\arcsin(...)}{(...)'} + C$$

Vagy:

$$\int \frac{1}{\sqrt{f(x)}}\ \mathrm{d}x \ = \ k_3 \int \frac{1}{\sqrt{1+(...)^2}}\ \mathrm{d}x \ = \ k_3\ \frac{\operatorname{arsh}(...)}{(...)'} \ + C$$

Vagy:

$$\int \frac{1}{\sqrt{f(x)}}\ \mathrm{d}x \ = \ k_3 \int \frac{1}{\sqrt{(...)^2-1}}\ \mathrm{d}x \ = \ k_3\ \frac{\operatorname{arch}(...)}{(...)'} \ + C$$

Itt $(...)$: $x-$nek lineáris függvénye.

Ezzel a módszerrel oldja meg az alábbi feladatot!

o) $\boxed{1.)\ \int \frac{4x}{\sqrt{x^2+6x+11}}\ \mathrm{d}x \qquad \text{(Hf.)}}$

$\boxed{2.)\ \int \frac{3x+1}{\sqrt{3-x^2-2x}}\ \mathrm{d}x \qquad \text{(Hf.)}}$

2. Feladat:

Gyakorló példák:

$$\boxed{\int \cos(x)\, \mathrm{e}^{\sin x}\ \mathrm{d}x \ = \ \cdots}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{(1+x^2)\ \operatorname{arctg} x}\ \mathrm{d}x \ = \ \cdots}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{x\ \ln x^5}\ \mathrm{d}x \ = \ \cdots}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{x\ \ln^5 x}\ \mathrm{d}x \ = \ \cdots}$$

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{e}^{4x}}{(1\ +\ \mathrm{e}^{4x})^4}\ \mathrm{d}x \ = \ \cdots}$$

4.2. Parciális integrálás

3. Feladat:

$$\boxed{\int (3x-1)\ \sin(5x+3)\ \mathrm{d}x\ =\ I}$$

$$u = 3x-1 \quad , \quad v' = \sin(5x+3)$$
$$u' = 3 \quad , \quad v = \frac{-\cos(5x+3)}{5}$$

$$I = (3x-1)\ \frac{-\cos(5x+3)}{5} + \frac{3}{5}\int \cos(5x+3)\ \mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{1}{5}\ (3x-1)\ \ \cos(5x+3)\ +\ \frac{3}{5}\ \frac{\sin(5x+3)}{5}\ +\ C$$

$$\boxed{\int x^3\ \ln(2x)\ \mathrm{d}x\ =\ I}$$

$$u' = x^3 \quad , \quad v = \ln(2x)$$
$$u = \frac{x^4}{4} \quad , \quad v' = \frac{1}{2x}\cdot 2 = \frac{1}{x}$$

$$I\ =\ \frac{x^4}{4}\ \ln(2x)\ -\ \frac{1}{4}\int x^3\ \mathrm{d}x\ =\ \frac{x^4}{4}\ \ln(2x)\ -\ \frac{1}{4}\,\frac{x^4}{4}\ +\ C$$

$$\boxed{\int \operatorname{arctg} 2x\ \mathrm{d}x\ =\ I}\ =\ \int 1\cdot \operatorname{arctg} 2x\ \mathrm{d}x$$

$$u' = 1 \quad , \quad v = \operatorname{arctg} 2x$$
$$u = x \quad , \quad v' = \frac{1}{1\ +\ 4x^2}\cdot 2$$

$$I\ =\ x\ \operatorname{arctg} 2x\ -\int \frac{2x}{1\ +\ 4x^2}\ \mathrm{d}x\ =\ x\ \operatorname{arctg} 2x\ -\ \frac{1}{4}\int \frac{8x}{1\ +\ 4x^2}\ \mathrm{d}x\ =$$
$$=\ x\ \operatorname{arctg} 2x\ -\ \frac{1}{4}\ \ln(1\ +\ 4x^2)\ +\ C$$

$$\boxed{\int \operatorname{ch} 2x\ \sin 5x\ \mathrm{d}x\ =\ I}$$

$$u = \operatorname{ch} 2x \quad , \quad v' = \sin 5x$$
$$u' = 2\ \operatorname{sh} 2x \quad , \quad v = \frac{-\cos 5x}{5}$$

$$I\ =\ -\frac{1}{5}\ \operatorname{ch} 2x\ \cos 5x\ +\ \frac{2}{5}\int \operatorname{sh} 2x\ \cos 5x\ \mathrm{d}x$$
$$u' = \operatorname{ch} 2x \quad , \quad v = \sin 5x$$
$$u' = \frac{\operatorname{sh} 2x}{2} \quad , \quad v = 5\ \cos 5x$$

$$I\ =\ \frac{1}{2}\ \operatorname{sh} 2x\ \sin 5x\ -\ \frac{5}{2}\int \operatorname{sh} 2x\ \cos 5x\ \mathrm{d}x$$

A két egyenletből kiküszöbölve a fellépő idegen integrált kapjuk I-re a végeredményt:

$$I = \frac{4}{29}\left(-\frac{5}{4}\ \mathrm{ch}\,2x\ \cos 5x + \frac{1}{2}\ \mathrm{sh}\,2x\ \sin 5x\right) + C$$

4. Feladat: További gyakorló feladatok:

a) $\boxed{\int \ln(5x)\ \mathrm{d}x = ?}$

b) $\boxed{\int (2x+3)\ \ln(5x)\ \mathrm{d}x = ?}$

c) $\boxed{\int (5x+2)\ \mathrm{sh}(4x)\ \mathrm{d}x = ?}$

d) $\boxed{\int x^2\ \cos(3x)\ \mathrm{d}x = ?}$

e) $\boxed{\int \arcsin(2x)\ \mathrm{d}x = ?}$

f) $\boxed{\int 4x\ \mathrm{arctg}(2x)\ \mathrm{d}x = ?}$

4.3. Racionális törtfüggvények integrálása

5. Feladat:

$$\boxed{\int \frac{x+1}{x^2+3x}\ \mathrm{d}x = ?}$$

Megoldás.

$$\frac{x+1}{x(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} \qquad \Big|\cdot x(x+3)$$

$$x+1 = A(x+3) + Bx$$

$$x := -3 : \quad -2 = -3B \quad \Longrightarrow \quad B = \frac{2}{3}$$

$$x := 0 : \quad 1 = 3A \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{1}{3}$$

$$I = \int \left(\frac{1}{3}\,\frac{1}{x} + \frac{2}{3}\,\frac{1}{x+3} \right) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln|x| + \frac{2}{3}\ln|x+3| + C$$

6. Feladat:

$$\boxed{\int \frac{2x+1}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x = ?}$$

Megoldás.

$$\int \frac{2x+1}{(x-2)(x-3)}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int \left(-5\,\frac{1}{x-2} + 7\,\frac{1}{x-3} \right) \mathrm{d}x = -5\ln|x-2| + 7\ln|x-3| + C$$

Ugyanis:

$$\frac{2x+1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \qquad \Big| \cdot (x-2)(x-3)$$

$$2x+1 = A(x-3) + B(x-2)$$

$$x := 2 : \quad 5 = -A \quad \Longrightarrow \quad A = -5$$

$$x := 3 : \quad 7 = B \quad \Longrightarrow \quad B = 7$$

7. Feladat:

$$\boxed{\int \frac{1}{x^3+2x^2}\,\mathrm{d}x = ?}$$

Megoldás.

$$\frac{1}{x^2\,(x+2)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+2} \qquad \Big| \cdot x^2\,(x+2)$$

$$1 = A(x+2) + Bx(x+2) + Cx^2$$

Most együttható összehasonlítással dolgozunk:

$$1 = (B+C)x^2 + (A+2B)x + 2A$$

Innen a következő lineáris egyenletrendszer adódik:

$$2A = 1$$
$$A + 2B = 0$$
$$B + C = 0$$

Melynek megoldása: $A = \frac{1}{2}\,, \quad B = -\frac{1}{4}\,, \quad C = \frac{1}{4}$

$$I = \int \left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}\,\frac{1}{x} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{x+2} \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\frac{x^{-1}}{-1} - \frac{1}{4}\ln|x| + \frac{1}{4}\ln|x+2| + C$$

8. Feladat:

$$\boxed{\int \frac{x+1}{(x-1)^2\,(x-3)}\,\mathrm{d}x\ = ?}$$

Megoldás.

$$\frac{x+1}{(x-1)^2\,(x-3)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-3} = \ldots = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-3}$$

$$I = -\frac{(x-1)^{-1}}{-1} - \ln|x-1| + \ln|x-3| + C$$

9. Feladat:

$$\boxed{a)\quad \int \frac{x^3}{x^4-16}\,\mathrm{d}x\ = ? \qquad\qquad b)\quad \int \frac{x^5-15\,x}{x^4-16}\,\mathrm{d}x\ = ?}$$

Megoldás.

a) $\dfrac{f'}{f}$ alakú:

$$\frac{1}{4}\int \frac{4\,x^3}{x^4-16}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln|x^4 - 16| + C$$

b) Áltört, át kell alakítani: $\dfrac{x^5-15\,x}{x^4-16} = x + \dfrac{x}{x^4-16}$

$$\frac{x}{x^4-16} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+4} = \ldots = \frac{1/16}{x-2} + \frac{1/16}{x+2} + \frac{-1/8\ x}{x^2+4}$$

$$\int \left(x + \frac{1}{16}\,\frac{1}{x-2} + \frac{1}{16}\,\frac{1}{x+2} - \frac{1}{8}\,\frac{1}{2}\,\frac{2\,x}{x^2+4} \right)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16}\ln|x-2| + \frac{1}{16}\ln|x+2| - \frac{1}{16}\ln(x^2+4) + C$$

10. Feladat: További gyakorló feladatok:

a) $\boxed{\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-9}\,\mathrm{d}x\ = ?}$

b) $\boxed{\alpha)\quad \int \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \beta)\quad \int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = ?}$

c) $\boxed{\alpha)\quad \int \frac{x^2}{x^3-1}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \beta)\quad \int \frac{1}{x^3-1}\,\mathrm{d}x = ?}$

d) $\boxed{\int \frac{x^5+2x^4+x^3+3x^2-2x+2}{x^3+2x^2}\,\mathrm{d}x = ?}$

4.4. Határozott integrál

11. Feladat:

$$\boxed{\int_0^\pi \cos^2 x\,\mathrm{d}x = ?}$$

Megoldás.

$$I = \int_0^\pi \underbrace{\cos^2 x}_{\frac{1+\cos 2x}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right)\Bigg|_0^\pi = \frac{1}{2}(\pi + 0 - (0+0)) = \frac{1}{2}\pi$$

$\cos 2x$ integrálja a megadott intervallumra 0-nak adódott, ami nem meglepő, mivel a függvény π szerint periodikus és egy teljes periodusra integráltunk.

12. Feladat:

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} \cos^5 x\,\sin^2 x\,\mathrm{d}x = ?}$$

Megoldás.

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos x\,\underbrace{(\cos^2 x)^2}_{(1-\sin^2 x)^2}\,\sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \left(\cos x\,\sin^2 x - 2\cos x\,\sin^4 x + \cos x\,\sin^6 x\right)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\sin^3 x}{3} - 2\,\frac{\sin^5 x}{5} + \frac{\sin^7 x}{7}\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7}$$

13. Feladat:

$$\boxed{\int_0^2 \mathrm{e}^{|2x-1|}\, \mathrm{d}x = ?}$$

Megoldás.

$$I = \int_0^{1/2} \mathrm{e}^{1-2x}\, \mathrm{d}x + \int_{1/2}^2 \mathrm{e}^{2x-1}\, \mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{2}\, \mathrm{e}^{1-2x}\Big|_0^{1/2} + \frac{1}{2}\, \mathrm{e}^{2x-1}\Big|_{1/2}^{2} = -\frac{1}{2}\,(1-\mathrm{e}) + \frac{1}{2}\,(\mathrm{e}^3 - 1)$$

14. Feladat: További gyakorló feladatok:

a) $\boxed{\int_{\pi/2}^{\pi} \cos^3 x\, \mathrm{d}x = ?}$

b) $\boxed{\int_{-1}^{2} |x^2 - 3x|\, \mathrm{d}x = ?}$

c) $\boxed{\int_0^4 \sqrt{x^2 - 4x + 4}\, \mathrm{d}x = ?}$

d) $\boxed{\int_0^3 \operatorname{sign}(x^2 - 4)\, \mathrm{d}x = ?}$

e) $\boxed{\int_0^1 (x+5)\, \mathrm{e}^{-3x}\, \mathrm{d}x = ?}$

4.5. Területszámítás

Az $f(x)$ és $g(x)$ "közé" eső terület, ha $x \in [a,b]$:

$$T = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x$$

15. Feladat:

Számítsa ki az $f(x) = x^2 + 2x$ és az $g(x) = 4 - x^2$ görbéje közötti területet!

Megoldás.

Rajzoljuk fel az $f(x) = x(x+2)$, $g(x) = (2-x)(2+x)$ görbéket.
Az ábrából látható, hogy :

$$T = \int_{-2}^{1} \big(4 - x^2 - (x^2 + 2x)\big) \, \mathrm{d}x = \int_{-2}^{1} (-2x^2 - 2x + 4) \, \mathrm{d}x = -\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 4x \Big|_{-2}^{1} = \ldots = 9$$

16. Feladat:

Mekkora az $y = \ln x$ görbéje, valamint az $y = 0$, $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$, $x = \mathrm{e}$ egyenesek közé eső síkrész területe!

Megoldás.

Készítsünk ábrát!

$$T = -\int_{1/\mathrm{e}}^{1} \ln x \, \mathrm{d}x + \int_{1}^{\mathrm{e}} \ln x \, \mathrm{d}x = \ldots$$

Parciálisan kell integrálni...

17. Feladat:

Mekkora az $f(x) = x^2 - 4x + 3$ görbéje, valamint az $y = 0$, $x = 0$, $x = 5$ egyenesek közé eső síkrész területe!

Megoldás. . . .

4.6. Integrálfüggvény

18. Feladat:

$$f(x) = \mathrm{sg}(x^2 - 5x + 4)$$

a) Ábrázolja a függvényt!
b) Írja fel az

$$F(x) = \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

ún. integrálfüggvényt, ha $x \in [0,3]$!

Megoldás.

$f(x) = \mathrm{sg}\left((x-1)(x-4)\right)$:

Ábra

$$x \in [0\,,\,1] \ : \qquad F(x) = \int_0^x 1\ \mathrm{d}t = x$$

$$x \in (1\,,\,3] \ : \qquad F(x) = \int_0^1 1\ \mathrm{d}t + \int_1^x -1\ \mathrm{d}t = 1 - t|_1^x = 2 - x$$

Tehát:

$$F(x) = \begin{cases} x\,, & \text{ha } 0 \le x \le 1 \\ 2 - x\,, & \text{ha } 1 < x \le 3 \end{cases}$$

19. Feladat:

$$f(t) = \begin{cases} 2t\,, & \text{ha } t \in [0,1] \\ 2\,, & \text{ha } t > 1 \end{cases}$$

Határozza meg az

$$F(x) = \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t \qquad (x > 0)$$

integrált! Hol deriválható az F függvény és mi a deriváltja?

Megoldás.

Ábra

$x \in [0\,,\,1]$: $\quad F(x) = \int\limits_0^x 2t \ \mathrm{d}t = t^2\Big|_0^x = x^2$

$x > 1$: $\quad F(x) = \int\limits_0^1 2t \ \mathrm{d}t + \int\limits_1^x 2 \ \mathrm{d}t = 1 + 2t|_1^x = 1 + (2x-2)$

Tehát:

$$F(x) = \begin{cases} x^2\,, & \text{ha } 0 \le x \le 1 \\ 2x-1\,, & \text{ha } 1 < x \end{cases}$$

Az integrandusz (f) folytonossága miatt F deriválható (integrálszámítás II. alaptétele) és

$$F'(x) = f(x) = \begin{cases} 2x\,, & \text{ha } x \in [0,1] \\ 2\,, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

20. Feladat:

$$G(x) = \int\limits_0^{4x} \sqrt{1+t^8} \ \mathrm{d}t\,, \qquad (x > 0)\,; \qquad G'(x) = ?$$

Megoldás.

1. megoldás: megfelelő helyettesítéssel integrálfüggvényt kapunk.

$t := 4u \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}t = 4\,\mathrm{d}u$

$t = 0$: $\ u = 0\,;\qquad t = 4x$: $\ u = x$

Elvégezve a helyettesítést:

$$G(x) = \int\limits_0^x \sqrt{1+(4u)^8} \cdot 4 \ \mathrm{d}t$$

Az integrandusz folytonossága miatt G deriválható (integrálszámítás II. alaptétele) és

$$G'(x) = \sqrt{1+(4x)^8} \cdot 4$$

2. megoldás:

$$F(x) := \int\limits_0^x \sqrt{1+t^8} \ \mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad F'(x) = \sqrt{1+x^8} \quad \text{(az integrandusz folytonos)}$$

Mivel $G(x) = F(4x)$, felhasználhatjuk az összetett függvény deriválási szabályát:

$$G'(x) = F'(4x) \cdot 4 = \sqrt{1 + (4x)^8} \cdot 4$$

21. Feladat:

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\, \mathrm{d}t\,, \quad G(x) = \int_0^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\, \mathrm{d}t\,, \quad H(x) = \int_x^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\, \mathrm{d}t\,, \quad (x \neq 0)$$

Határozza meg a deriváltfüggvényeket!

Megoldás.

$f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ folytonossága miatt az F integrálfüggvény deriválható (integrálszámítás II. alaptétele) és

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$$

$G(x) = F(x^3)$ deriválható függvények összetétele

$$\Longrightarrow \quad G'(x) = F'(x^3) \cdot 3x^2 = \frac{1}{\sqrt{1+x^{12}}} \cdot 3x^2$$

$$H(x) = F(x^3) - F(x) \quad \Longrightarrow \quad H'(x) = F'(x^3) \cdot 3x^2 - F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^{12}}} \cdot 3x^2 - \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$$

22. Feladat:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x \ln(1+t)\, \mathrm{d}t}{x^2} = ?$$

4.7. Integrálás helyettesítéssel

23. Feladat:

$\displaystyle\int \sqrt{x^2 - 4}\, \mathrm{d}x = ?$ $\qquad \dfrac{x}{2} = \operatorname{ch} t$ helyettesítéssel dolgozzon!

Megoldás.

$$X := 2 \int \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1} \, \mathrm{d}x \ :$$

Helyettesítéssel:

$$\frac{x}{2} = \operatorname{ch} t \quad \Longrightarrow \quad x = 2 \operatorname{ch} t \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}x = 2 \operatorname{sh} t \, \mathrm{d}t \qquad \left(t = \operatorname{arch} \frac{x}{2}\right)$$

$$2 \int \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} \cdot 2 \operatorname{sh} t \, \mathrm{d}t = 4 \int \operatorname{sh}^2 t \, \mathrm{d}t = 4 \int \frac{\operatorname{ch} 2t - 1}{2} \, \mathrm{d}t = 2 \int (\operatorname{ch} 2t - 1) \, \mathrm{d}t =$$

$$= 2 \left(\frac{\operatorname{sh} 2t}{2} - t\right) + C = 2(\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t - t) + C = 2(\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} \ \operatorname{ch} t - t) + C$$

$$X = 2 \left(\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1} \cdot \frac{x}{2} - \operatorname{arch} \frac{x}{2}\right) + C = x \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1} - 2 \operatorname{arch} \frac{x}{2} + C$$

24. Feladat:

a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1} \, \mathrm{d}x = ?$	*b)* $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{6x}}{\mathrm{e}^{2x}+1} \, \mathrm{d}x = ?$

Szükség esetén alkalmazza az $\mathrm{e}^x = t$ helyettesítést!

Megoldás.

a) Itt nem kell helyettesítés. f'/f alakú :

$$\frac{1}{2} \int \frac{2 \, \mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln \left(\mathrm{e}^{2x} + 1\right) + C$$

b) Helyettesítéssel:

$$\mathrm{e}^x = t \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t$$

$$X : \int \frac{t^6}{t^2+1} \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t = \int \frac{t^5}{t^2+1} \, \mathrm{d}t = \int \left(t^3 - t + \frac{t}{t^2+1}\right) \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \ln (t^2 + 1) + C$$

$$X = \frac{\mathrm{e}^{4x}}{4} - \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} + \frac{1}{2} \ln (\mathrm{e}^{2x} + 1) + C$$

25. Feladat:

$\displaystyle\int \frac{9x}{\sqrt{2-3x}+1} \, \mathrm{d}x = ?$	$t = \sqrt{2-3x}$ helyettesítéssel dolgozzon!

Megoldás.

$$x = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\,t^2 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}x = -\frac{2}{3}\,t\ \mathrm{d}t$$

$$X: \int \frac{3\,(2-t^2)}{t+1}\left(-\frac{2}{3}\,t\right)\,\mathrm{d}t \;=\; 2\int \frac{t^3-2t}{t+1}\,\mathrm{d}t \;=\; 2\int\left(t^2-t-1+\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t \;=$$

$$= 2\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|\right)+C$$

$$X \;=\; 2\left(\frac{1}{3}\left(\sqrt{2-3x}\right)^3 - \frac{1}{2}(2-3x) - \sqrt{2-3x} + \ln\left(\sqrt{2-3x}+1\right)\right) + C$$

26. Feladat:

$$\boxed{\int \frac{\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[3]{x^2}+x}\,\mathrm{d}x \;=?\qquad\qquad t=\sqrt[3]{x}\ \text{ helyettesítéssel dolgozzon!}}$$

Megoldás.

$$t=\sqrt[3]{x} \quad\Longrightarrow\quad x=t^3 \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{d}x = 3t^2\ \mathrm{d}t$$

$$X: \int \frac{t^2+1}{t^2+t^3}\,3t^2\ \mathrm{d}t \;=\; 3\int\frac{t^2+1}{t+1}\,\mathrm{d}t \;=\; 3\int\left(t-1+\frac{2}{t+1}\right)\mathrm{d}t \;=$$

$$= 3\left(\frac{t^2}{2}-t+2\,\ln|t+1|\right)+C$$

$$X \;=\; 3\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+2\,\ln|\sqrt[3]{x}+1|\right)+C$$

27. Feladat:

$a)\ \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{(5x-1)^2}}\,\mathrm{d}x \;=?$ $\qquad b)\ \displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt[3]{(5x-1)^2}}\,\mathrm{d}x \;=?$

Szükség esetén alkalmazza a $t=\sqrt{5x-1}$ helyettesítést!

Megoldás. . . .

28. Feladat: További gyakorló feladatok:

a) $\boxed{\displaystyle\int \frac{e^{2x} + 5e^{x}}{e^{2x} + 4e^{x} + 3}\,dx = ? \qquad e^{x} = t}$

b) $\boxed{\displaystyle\int_0^2 \frac{e^{x} - 1}{e^{x} + 1}\,dx = ? \qquad e^{x} = t}$

c) $\boxed{\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{5-4x}}\,dx = ? \qquad t = \sqrt{5-4x}}$

4.8. Improprius integrál

29. Feladat:

$$\boxed{\int_{-1}^{\infty} \frac{4}{x^2+2x+5}\,dx = ?}$$

Megoldás.

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{4}{x^2+2x+5}\,dx = \lim_{\omega\to\infty} \int_{-1}^{\omega} \frac{4}{4+(x+1)^2}\,dx = \frac{4}{4} \lim_{\omega\to\infty} \int_{-1}^{\omega} \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}\,dx =$$

$$= \lim_{\omega\to\infty} \left. \frac{\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}}{\frac{1}{2}} \right|_{-1}^{\omega} = 2 \lim_{\omega\to\infty} \left(\operatorname{arctg}\frac{\omega+1}{2} - \operatorname{arctg} 0 \right) = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi$$

30. Feladat:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{-4} \frac{1}{x^2+2x-3}\,dx = ?}$$

Megoldás.

$$\int_{-\infty}^{-4} \frac{1}{x^2+2x-3}\,dx = \lim_{\omega\to-\infty} \int_{\omega}^{-4} \frac{1}{x^2+2x-3}\,dx = \ \ldots\ =$$

$$= \lim_{\omega \to -\infty} \frac{1}{4} \int_{\omega}^{-4} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3} \right) \mathrm{d}x = \lim_{\omega \to -\infty} \frac{1}{4} \left(\ln|x-1| - \ln|x+3| \right) \Big|_{\omega}^{-4} =$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{\omega \to -\infty} \left(\ln 5 - \ln 1 - \left(\ln|\omega - 1| - \ln|\omega + 3| \right) \right) = \frac{1}{4} \lim_{\omega \to -\infty} \left(\ln 5 + \ln \left| \frac{\omega + 3}{\omega - 1} \right| \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\ln 5 + \ln 1 \right) = \frac{1}{4} \ln 5$$

31. Feladat:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 2x}{1 + 4x^2} \, \mathrm{d}x = ?}$$

Megoldás.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 2x}{1 + 4x^2} \, \mathrm{d}x = \lim_{\omega_1 \to -\infty, \, \omega_2 \to \infty} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{\operatorname{arctg}^2 2x}{1 + 4x^2} \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\omega_1 \to -\infty, \, \omega_2 \to \infty} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \underbrace{2 \frac{1}{1 + 4x^2} \operatorname{arctg}^2 2x}_{f' f^2 \text{ alakú}} \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\omega_1 \to -\infty, \, \omega_2 \to \infty} \frac{\operatorname{arctg}^3 2x}{3} \Big|_{\omega_1}^{\omega_2} = \frac{1}{6} \lim_{\omega_1 \to -\infty, \, \omega_2 \to \infty} \left(\operatorname{arctg}^3 2\omega_2 - \operatorname{arctg}^3 2\omega_1 \right) =$$

$$= \frac{1}{6} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^3 - \left(-\frac{\pi}{2} \right)^3 \right) = \frac{\pi^3}{24}$$

32. Feladat:

$$\boxed{\int_{-2}^{0} \frac{6}{\sqrt{4 + 2x}} \, \mathrm{d}x = ?}$$

Megoldás.

$$\int_{-2}^{0} \frac{6}{\sqrt{4 + 2x}} \, \mathrm{d}x = \lim_{\delta \to 0+0} 6 \cdot \frac{1}{2} \int_{-2+\delta}^{0} \underbrace{2 \, (4 + 2x)^{-1/2}}_{f' f^{-1/2} \text{ alakú}} \, \mathrm{d}x =$$

$$= 3 \lim_{\delta \to 0+0} \left. \frac{(4+2x)^{1/2}}{\frac{1}{2}} \right|_{-2+\delta}^{0} = 6 \lim_{\delta \to 0+0} (2 - \sqrt{2\,\delta}) = 12$$

33. Feladat:

$$\boxed{\int_0^{1/e} \frac{\ln^2 x}{x} \, \mathrm{d}x = ?}$$

Megoldás.

$$\lim_{\delta \to 0+0} \int_\delta^{1/e} \underbrace{\frac{1}{x} \ln^2 x}_{f'\, f^2 \ \text{alakú}} \, \mathrm{d}x = \lim_{\delta \to 0+0} \left. \frac{\ln^3 x}{3} \right|_\delta^{1/e} = \frac{1}{3} \lim_{\delta \to 0+0} \left(\ln^3 \left(\frac{1}{e} \right) - \ln^3 \delta \right) = \infty$$

Az improprius integrál divergens.

34. Feladat:

$$\boxed{\int_0^{2} \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} \, \mathrm{d}x = ?}$$

Megoldás.

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} \, \mathrm{d}x = \lim_{\delta \to 0+0} \frac{1}{2} \int_\delta^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-2}{2} \right)^2}} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \lim_{\delta \to 0+0} \left. \frac{\arcsin \frac{x-2}{2}}{\frac{1}{2}} \right|_\delta^2 =$$

$$= \lim_{\delta \to 0+0} \left(\arcsin 0 - \arcsin \frac{\delta - 2}{2} \right) = -\arcsin(-1) = \frac{\pi}{2}$$

35. Feladat: További gyakorló feladatok:

a) $\boxed{\int_1^{\infty} \frac{x}{9 + 4x^2} \, \mathrm{d}x = ?}$

b) $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{5}{4 + 7x^2}\, dx = ?}$

c) $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{25}{x^3 - 5x^2}\, dx = ?}$

d) $\boxed{\displaystyle\int_{0}^{\infty} 4x\, e^{-2x^2}\, dx = ?}$

e) $\boxed{\displaystyle\int_{0}^{\infty} (2x+3)\, e^{-3x}\, dx = ?}$

f) $\boxed{\displaystyle\int_{8}^{12} \frac{x+1}{\sqrt{x-8}}\, dx = ? \qquad t = \sqrt{x-8}}$

g) $\boxed{\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-\sqrt{x}}\, dx = ? \qquad \sqrt{x} = t}$

4.9. Integrálkritérium

36. Feladat: Vizsgálja meg konvergencia szempontjából az alábbi sorokat!

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{3\,n\ \ln n^3}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{3\,n\ \ln^3 n}$

Konvergencia esetén adjon becslést az $s \approx s_{100}$ közelítés hibájára!