Villamosmérnök A3X (2014 tavasz) — 1. vizsga ZH

Minden feladat 12 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. Odja meg az $x - xy - y' = 0$ differenciálegyenletet!

Megoldás. Az egyenlet nem egzakt, mert $P(x,y) = x - xy$, $Q(x,y) = -1$-re $P_y = -x \neq 0 = Q_x$, de $\frac{P_y - Q_x}{Q} = x$, tehát a $e^{\int x\, dx} = e^{x^2/2}$-el való szorzással kapott $e^{x^2/2}(x - xy) - e^{x^2/2}y' = 0$ már az. Legyen $M(x,y) = e^{x^2/2}(x - xy)$ és $N(x,y) = -e^{x^2/2}$. Kell: $u(x,y)$, amire $u_x = M$, $u_y = N$.
Az elsőből $u(x,y) = \int e^{x/2}(x - xy)\, dx = e^{x/2}(1-y) + c(y)$; ebből és a másodikból $-e^{x/2} = u_y = -e^{x/2} + \frac{d}{dy}c(y) \rightsquigarrow \frac{d}{dy}c(y) = 0 \rightsquigarrow c(y) = c \rightsquigarrow u(x,y) = e^{x/2}(1-y) + c$, vagyis a megoldás $c = e^{x/2}(1-y)$, amiből $y = 1 - ce^{-x/2}$.
VAGY: $y' + xy = x$ lineáris.
y_{ha}: $y' + xy = 0$ szétválasztható változójú. $\frac{dy}{dx} = -xy \rightsquigarrow \int \frac{dy}{y} = \int -x\ dx \rightsquigarrow \ln|y| = -\frac{x^2}{2} + c \rightsquigarrow |y| = c_1 e^{-\frac{x^2}{2}}$, $c_1 > 0 \rightsquigarrow y_{ha} = ce^{-\frac{x^2}{2}}$, $c \neq 0$.
y_{ip}: állandók variálásával. y_{ip}-t $c(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ alakban keressük. $x = c'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - c(x)xe^{-\frac{x^2}{2}} + xc(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = c'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \rightsquigarrow c'(x) = xe^{\frac{x^2}{2}} \rightsquigarrow c(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \rightsquigarrow y_{ip} = 1$, és így $y_{ia} = y_{ha} + y_{ip} = ce^{-\frac{x^2}{2}} + 1$.

2. Legyen F a $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ egységkocka kifelé irányított határa, $v(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$. $\int_F v\ df = ?$

Megoldás. A Gauss–Osztrogradszkij-tétel szerint $\int_F v\ df = \int_K \operatorname{div} v\ dV$. $\operatorname{div}(x^2, y^2, z^2) = 2(x+y+z)$, tehát

$$\begin{aligned}
\int_F v\ df &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 2(x+y+z)\ dzdydx \\
&= \int_0^1 \int_0^1 [2xz + 2yz + z^2]_0^1\ dydx = \int_0^1 \int_0^1 2x + 2y + 1\ dydx \\
&= \int_0^1 [2xy + y^2 + y]_0^1\ dx = \int_0^1 2x + 2\ dx = [x^2 + 2x]_0^1 = 3
\end{aligned}$$

3. Határozza meg $\cos(\frac{\pi}{2} + i)$ képzetes részét!

Megoldás. $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$, tehát

$$\begin{aligned}
\cos(\frac{\pi}{2} + i) &= \frac{1}{2}(e^{-1+\frac{i\pi}{2}} + e^{1-\frac{i\pi}{2}}) \\
&= \frac{1}{2}(e^{-1}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) + e(\cos\frac{-\pi}{2} + i\sin\frac{-\pi}{2})) = \frac{1}{2}(e^{-1} - e)i,
\end{aligned}$$

vagyis $\operatorname{Im}\cos(\frac{\pi}{2} + i) = \frac{1}{2}(e^{-1} - e) = \operatorname{sh}(-1)$.
VAGY: $\cos(\frac{\pi}{2} + i) = \cos\frac{\pi}{2}\cos i - \sin\frac{\pi}{2}\sin i = -\sin i = -i\operatorname{sh} 1$.

4. $\int_K \frac{e^z}{z^2+1}\ dz = ?$ ha K az origó középpontú, pozitívan irányított, 2 sugarú kör.

Megoldás. Legyen K_i és K_{-i} az i ill. $-i$ körüli, 1/2 sugarú, pozitívan irányított körvonal. Akkor a Cauchy-integráltétel és a Cauchy integrálformula miatt $\int_K \frac{e^z}{z^2+1}\ dz = \int_{K_i} \frac{e^z/(z+i)}{z-i}\ dz + \int_{K_{-i}} \frac{e^z/(z-i)}{z+i}\ dz = 2\pi i(\frac{e^i}{2i} + \frac{e^{-i}}{-2i}) = \pi(e^i - e^{-i}) = 2\pi i \sin 1$.
VAGY reziduum-tétellel: $\int_K \frac{e^z}{z^2+1}\ dz = 2\pi i(\operatorname{Res}_i f + \operatorname{Res}_{-i} f) = 2\pi i(\frac{e^i}{2i} + \frac{e^{-i}}{2(-i)}) = \pi(e^i - e^{-i})$.

5. (a) Igaz-e, hogy minden monoton, korlátos komplex sorozat konvergens?
(b) Igaz-e, hogy $|\sin z| \le 1$ minden z komplex számra?
(c) Van-e olyan $\mathbb{C}$-n deriválható függvény, aminek a valós része $y^3 + 5x$?
(d) Definiálja $\int_a^b f(t)\, dt$-t, ha $f(t) = u(t) + iv(t) : [a, b] \to \mathbb{C}$!

Megoldás. (a) A monotonitásnak nincs értelme, mert $\mathbb{C}$-n nincs rendezés.
(b) Nem: $\sin(it) = \frac{1}{2i}(e^{-t} + e^{t})$, tehát $\lim_{t\to\infty}|\sin(it)| = \infty$, azaz $\sin z$ nem is korlátos.
(c) Nem, mert nem elégíti ki a Laplace-egyenletet: ha $u(x, y) = y^3 + 5x$, akkor $u_{xx}(x, y) = 0$, $u_{yy}(x, y) = 6y$.
(d) $\int_a^b u(t) + iv(t)\, dt = \int_a^b u(t)\, dt + i \int_a^b v(t)\, dt$.