7. Gyakorlat

Geometriai valószínűségi mezők, eloszlásfüggvény

1. Egy 10 cm oldalhosszúságú négyzetre leejtünk egy 3 cm átmérőjű kör alakú pénzdarabot úgy, hogy a pénzdarab középpontja benne legyen a négyzetben. Tegyük fel, hogy a pénzdarab középpontja egyenletes valószínűséggel eshet akárhova (azaz egy bármilyen x cm^2 területű részbe esés valószínűsége $x/100$). Mennyi a valószínűsége, hogy a pénzdarab lefedi a négyzet egy csúcsát?

2. Választunk egy pontot véletlenszerűen az $(1;1)$, $(1;-1)$, $(-1;-1)$ és $(-1;1)$ pontok által meghatározott négyzeten. Legyen A az az esemény, hogy a választott pont az origó középpontú, 1 sugarú körre esik, továbbá legyen B az az esemény, hogy a választott pont mindkét koordinátája pozitív. Döntsük el, hogy függetlenek-e az A és B események.

3. Véletlenszerűen választunk egy pontot a $(\pm 10;\pm 10)$ csúcspontok által meghatározott négyzeten. Mekkora az esélye, hogy a $(-1;-1)$, $(-1;7)$, $(5;-1)$ pontokat összekötő háromszög, ennek origóra vett középpontos tükörképe, vagy a $(\pm 2;\pm 2)$ pontokat összekötő négyzet közül legalább az egyik tartalmazza a pontunkat?

4. A $[0;1]$ intervallumon találomra kiválasztunk két számot egymástól függetlenül. Mennyi a valószínűsége, hogy az egyik szám több, mint kétszerese a másiknak?

5. Anita és Bálint megbeszélik, hogy találkoznak. Egyikük sem túl határozott vagy precíz ember, ezért csak annyiban állapodnak meg, hogy délelőtt 10 és 11 óra között találkoznak egy meghatározott helyen. Azonban sajnos a türelem sem az erősségük, így az érkezéstől számított 20 perc elteltével mindig elunják a várakozást, és továbbállnak. Mennyi a találkozás valószínűsége, ha mindketten egy véletlenszerű időpontban érkeznek?

---

6. Válasszunk egy pontot véletlenszerűen az $(1;0)$, $(0;1)$ és $(-1;0)$ csúcsok által meghatározott egyenlő szárú háromszög belsejében, és jelölje X a választott pont és az x tengely távolságát.
   a) Adjuk meg X eloszlásfüggvényét.
   b) Számoljuk ki a $\{0{,}25 \le X < 0{,}5\}$ esemény valószínűségét.

7. A $[0;1]$ intervallumon véletlenszerűen kiválasztunk két számot. Legyen X a két szám távolsága. Adjuk meg az X eloszlásfüggvényét.

8. Véletlenszerűen választunk két számot a $[-1;1]$ intervallumból. Legyen X a két szám összege. Mi a valószínűsége annak, hogy X pozitív? Határozzuk meg X eloszlásfüggvényét.

9. Az egységnégyzeten találomra kiválasztunk egy P pontot. Jelölje X a P-hez legközelebbi oldal és a P pont távolságát. Határozzuk meg X eloszlásfüggvényét.

10. Jelölje X az ötös lottón kihúzott öt szám közül a legkisebbet. Adjuk meg X eloszlásfüggvényének értékét a 4 ill. 25 helyeken. Folytonos-e ez az eloszlásfüggvény?

11. Legyen X egy kockadobás eredménye. Határozzuk meg az $Y = (X-3)^2$ eloszlásfüggvényét.

12. Eloszlásfüggvények-e az alábbi hozzárendelési szabályú $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények?
   a) $F(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } t > 0, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$
   b) $F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-at} & \text{ha } t > 0, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$ $(a \in \mathbb{R})$
   c) $F(t) = 1 - e^{-t^2}$
   d) $F(t) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(t) + \frac{1}{2}$