Deriválttáblázat

$f(x)$	$f'(x)$	D_f
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$(0,+\infty)$
a^x	$a^x \ln a$	$(-\infty,+\infty)$
$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a}\frac{1}{x}$	$(0,+\infty)$
$\sin x$	$\cos x$	$(-\infty,+\infty)$
$\cos x$	$-\sin x$	$(-\infty,+\infty)$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$(0,\pi)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,1)$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,1)$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$(-\infty,+\infty)$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$(-\infty,+\infty)$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$(-\infty,+\infty)$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$(-\infty,+\infty)$
$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$(-\infty,+\infty)$
$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$(0,+\infty)$
$\operatorname{arsh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$(-\infty,+\infty)$
$\operatorname{arch} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$(1,+\infty)$

$\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges, $a \in (0,+\infty) \setminus \{1\}$

Komplex számok

alakok: $a+bi \xrightarrow[\substack{a = r\cos\varphi \\ b = r\sin\varphi}]{\substack{r=\sqrt{a^2+b^2} \\ \tan\varphi = \frac{a}{b} \text{ \& síknegyed}}} r\cdot e^{i\varphi} \rightleftarrows r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

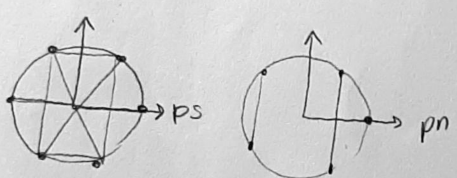
alap műveletek:
- $\oplus, \ominus$: algebrai alakban KIZÁRÓLAG
- $\circledast, \oslash$: algebrai alakban könnyű. osztás $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}$ alakban
  exp alakban könnyű.
- $z^n, \sqrt[n]{z}$: exp alakban KIZÁRÓLAG. gyökvonásnál n $\boxed{\text{különböző}}$ gyök

$$z^n = re^{i\varphi} = re^{i(2k\pi + i\varphi)} \rightarrow \sqrt[n]{r}\cdot e^{\frac{i2k\pi + i\varphi}{n}} \quad k = 0 \dots n-1$$

- $=$: $\begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$ vagy $\begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_1 = 2k\pi + \varphi_2 \end{cases}$
- $\overline{z}$: $a-bi$ vagy $re^{-i\varphi}$
- $|z|$: $\sqrt{a^2+b^2}$ vagy r

geometria:
- $\oplus, \ominus$ ~ vektorműveletek
- $\circledast, \oslash$ $\pm\alpha$-val forgatás & nyújtás $\rightarrow z^n$
- $\sqrt[n]{z}$ $\sqrt[n]{r}$ sugarú körön, n oldalú szabályos sokszög, csúcsa z felé mutat
- $\overline{z}$ tükrözés x-re

egységgyökök:



- Ha $a|b$
  akkor $\forall a$-adik egységgyök
  $\forall b$-edik egységgyök is.
- Az a-adik és b-edik egységgyökök között
  (a, b) közös.
- Visszavezetés egyenletekre.

egyenletmegoldás: (egyenletrendszer)
- legkezdetlegesebb műveleti alakban: $\oplus$ miatt ált. algebrai
- $=$ def alapján egyenletrendszer
- valós együtthatós egyenlet megoldása z & $\overline{z}$ is, de nem feltétlenül különböző
  $\rightarrow$ valós gyökvonásra is igaz
- ps hatványoknál $z^n = (-z)^n$
- ha $z_1 = z_0 \cdot e^{\frac{2\pi i}{n}}$ akkor $z_k = z_0 \cdot e^{\frac{2\pi i}{n}k}$. főleg ha nem megy a trigo

trigo:
- $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi$: a nevezetes szögek
  30° 45° 60° 90° 180°
- HASZNÁLJ EGYSÉGKÖRT szög visszavezetéshez
  (esetleg azonosságokat)
- és pisztkozatlanpot

Sorozatok határértéke

- perdef: $a_n \to \infty$ $\quad a_n > \dots > b_n > P > 0$ ami átalakítható $n > N(P)$ alakká

  $a_n \to -\infty$ $\quad a_n < \dots < b_n < P < 0$ —||—

  $a_n \to A$ $\quad 0 < |a_n - A| < \dots < b_n < \varepsilon$ ami átalakítható $n > N(\varepsilon)$ alakká

- műveletek: $f+g$, $c \cdot f$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $f \circ g$, $f^{\text{const.}}$, $\sqrt[\text{const}]{f}$, $|f|$

  Határozott alakok: $k \cdot 0$, $\frac{1}{0+}$, $\frac{1}{\infty}$, $\infty + \infty$, $\infty \cdot \infty$, $c > 0 : c \cdot \infty$

- nevezetesek:

$$a^n \to \begin{cases} 0 & |a| < 1 \\ 1 & a = 1 \\ \infty & a > 1 \\ \text{oszc. div.} & a \leq -1 \end{cases}$$

$c \to c$ $\quad \sqrt[n]{p} \to 1$ $\quad \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \to e^x$

$n^k \to \infty$ $\quad \sqrt[n]{n} \to 1$

$n! \to \infty$

$n^n \to \infty$

- nagyságrendek:

  $1 < a < b$ $\quad a^n \ll b^n$

  $0 < k < l$ $\quad n^k \ll n^l$

  $\left.\begin{matrix} k > 0 \\ 1 > a \end{matrix}\right\}$ $\quad n^k \ll a^n$

  $a > 1$ $\quad a^n \ll n!$ $\quad // \ln n \ll n$

  $n! \ll n^n$

- tételek:

  $f \leq g \Rightarrow \lim f \leq \lim g$. TUDD, MIT VÁRSZ.

  $a_n \to A \Rightarrow a_\sigma \to A$

- kellemetlen, határozatlan alakos esetek:

„$\infty - \infty$"

$\to \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$

$\to \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

$\to \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$

$\to a - b > a - \frac{a}{2}$ ha $\frac{a}{2} > b$

„$\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$" $\to$ kiemelősdi. a legnagyobb nagyságrendű tagokat kihozzuk a tört elé.

$\to \frac{\max a_n}{\min b_n} \geq \frac{a_n}{b_n} \geq \frac{\min a_n}{\max b_n}$. TUDD, MIT VÁRSZ

„Hatvány előkezelés" $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^n = \frac{(a_n)^n}{(b_n)^n}$, $(n+c)^n = n^n\left(1 + \frac{c}{n}\right)^n$, $\left(1 + \frac{c}{n^2}\right)^n = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{c}{n}\right)^{n^2}}$, $(a_n)^{n+c} = (a_n)^n \cdot (a_n)^c$

„$\sqrt[b]{a}$, a^b"

$\to \min a_n \leq a_n \leq \max a_n$ ált. $\Big\}$ TUDD, MIT VÁRSZ

$\to A - \varepsilon \leq a_n \leq A + \varepsilon$ konv.

$\Rightarrow \sqrt[n]{p}$, $\sqrt[n]{n}$ részsorozatai / a^n, n^a, n^n részsorozatai

- rekurzió : 1. monotonitás . próba, majd T.I.
  2. korlátosság . $\lim a_n = \lim a_{n+1}$ -ből, majd T.I. . gyakran $a_n > 0$, $a_n < 0$
  3. $\lim a_n = \lim a_{n+1}$, csak most komolyan

- limsup, liminf : 1. részsorozatokra bontás

$(-1)^n \nearrow$ ps n, $\searrow$ pn n

szögfüggvény $\nearrow 1$, $\to 0$ (ált.), $\searrow -1$

2. határértékek meghatározása $\Rightarrow$ torlódási pontok halmaza // ugyanis részsorozatok uniójának torlódási pontjai a részsorozatok torlódási pontjainak uniója
3. limsup , liminf ill. lim

// bármely sorozat felbontható monoton ; egymást kizáró sorozatokra (bár lehet, hogy végtelen sokra) $\Rightarrow$ ez azért praktikus, mert monoton sorozatnak pontosan egy torlódási pontja van

---

O, Ω $\searrow\swarrow$ Θ azonos nagyságrend

$O \Leftrightarrow \ll$

pont az, amivel becsülni akarnál

$\to 0$ / $\to +\infty$ / $\to -\infty$ -hez is használható

- szorzás
- összeadás
- hányados

$\sim$ aszimptotikus egyenlő $\Leftrightarrow$ $\lim \frac{a}{b} = 1$

nem triv

- szorzás
- összeadás
- hányados

Függvények határértéke

- PERDEF: $x \to \pm\infty$ ~ sorozatok

  $x \to x_0, x_0^+, x_0^-$: a) A : $|f(x) - A| < \ldots < g(|x - x_0|) < \varepsilon$

  $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$

  b) $\pm\infty$: konstd 2 oldalra

  $f(x) > \Omega > 0$

  $0 < x - x_0 < \delta(\Omega)$ etc.

- ÁTVITELI ELV (BEHELYETTESÍTÉSI ELV): ha $x_n \to x_0$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} f(x_n)$ pl. $x_n = x_0$ vagy $x_n \to 0+$ stb.
- CÁFOLÁS: $x_n \to x_0$ ahol $f(x_n) \to A$

  $x_m \to x_0$ ahol $f(x_m) \not\to A$ fél oldal elég

- L'HOPITÁLÁS, de csak ha a végén létezik határérték. KIV. e^x, shx, chx. ott kiemelést érdemes

  $\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$ $0 \cdot \infty$

- SZÖGFÜGGVÉNYEK: ha nem jó

  $\lim\limits_{0} \frac{\sin x}{x} = 1$

  $\lim\limits_{0} \frac{\tan x}{x} = 1$

  - $\tan\textcircled{5} = \frac{\sin\textcircled{5}}{\cos\textcircled{5}}$
  - $\sin\textcircled{5} = \frac{\sin\textcircled{5}}{\textcircled{5}} \cdot \textcircled{5}$
  - $\sin^2\textcircled{5} + \cos^2\textcircled{5} = 1$
  - $(1 + \cos\textcircled{5})(1 - \cos\textcircled{5}) = 1 - \cos^2\textcircled{5} = \sin^2\textcircled{5}$
  - további azonosságok bevezetése
  - L'Hospital
  - Helyettesítés: — arcusoknál
    — $x \to$ vmi helyett $u \to 0$ kell

- HELYETTESÍTÉS: (ÁTVITELI ELV)

  $$\left.x \to x_0 \Rightarrow f(x) \to f(x_0)\right\} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{f(x) \to f(x_0)} g(f(x))$$

- EXPONENCIÁLIS: • ha $x \to \infty \Rightarrow \textcircled{5} \to \infty$

  $$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

  • $a^b = e^{b \ln a}$

↳ Folytonosság: perdef

E. folytonosság: perdef / Heine I. II. ~ határérték végesben. cáfolás: $x_n - x_m \to 0$ de $|f(x_n) - f(x_m)| > K$

Szakadások: $K_{x_0} \subset D_f$ de nem folytonos x_0-ban

- elsőfajú — megszüntethető
  — véges ugrás

  másodfajú
- folytonos függvényeknél csak D_f-en kívül ill. összeilleszteknél lehet
- egyoldali határértékek vizsgálata

Deriválás

perdef: $K_{x_0,\delta} \subseteq D_f$ & $\exists \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, mindkét oldal egyenlő és véges

// x_0-ban folytonos, mint szükséges feltétel

elemi fv & műveletek

d/dx	$(f+g)(x)$	$(cf)(x)$	$(f\cdot g)(x)$	$\left(\frac{1}{g}\right)(x)$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$f(g(x))$	ha $f(g(x))=x$: $f(x)$
	$(f'+g')(x)$	$(cf')(x)$	$(f'g+g'f)(x)$	$\left(\frac{-g'}{g^2}\right)(x)$	$\left(\frac{f'g-g'f}{g^2}\right)(x)$	$f'(g(x))\cdot g'(x)$	$\frac{1}{g'(g(x))}$

paraméteres deriválás $x=x(t)$ $y=y(t)$ $f'(x)=?$

1. $\dot{x} \to$ szigmon $\to \exists$inverz
2. $\dot{y}, \dot{x}$ & beh: $f'(x_0)=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ $f''(x_0)=\frac{\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$

implicit deriválás $F(x,y)=0$

1. a $P(x,y)$ rajta van a görbén?
   // x szerint vizsgálunk
2. derivált „egyenlet", ahol y egyszerre függvény és y' az ismeretlen
3. ha y'' kell, akkor $y'(x)$-t behelyettesítjük

Függvényvizsgálat

D_f, zh, paritás, periódus

$f' \to \nearrow, \searrow$, zh, szélsőértékvizsg.

$f'' \to \cup, \cap$, zh, inflexióvizsg.

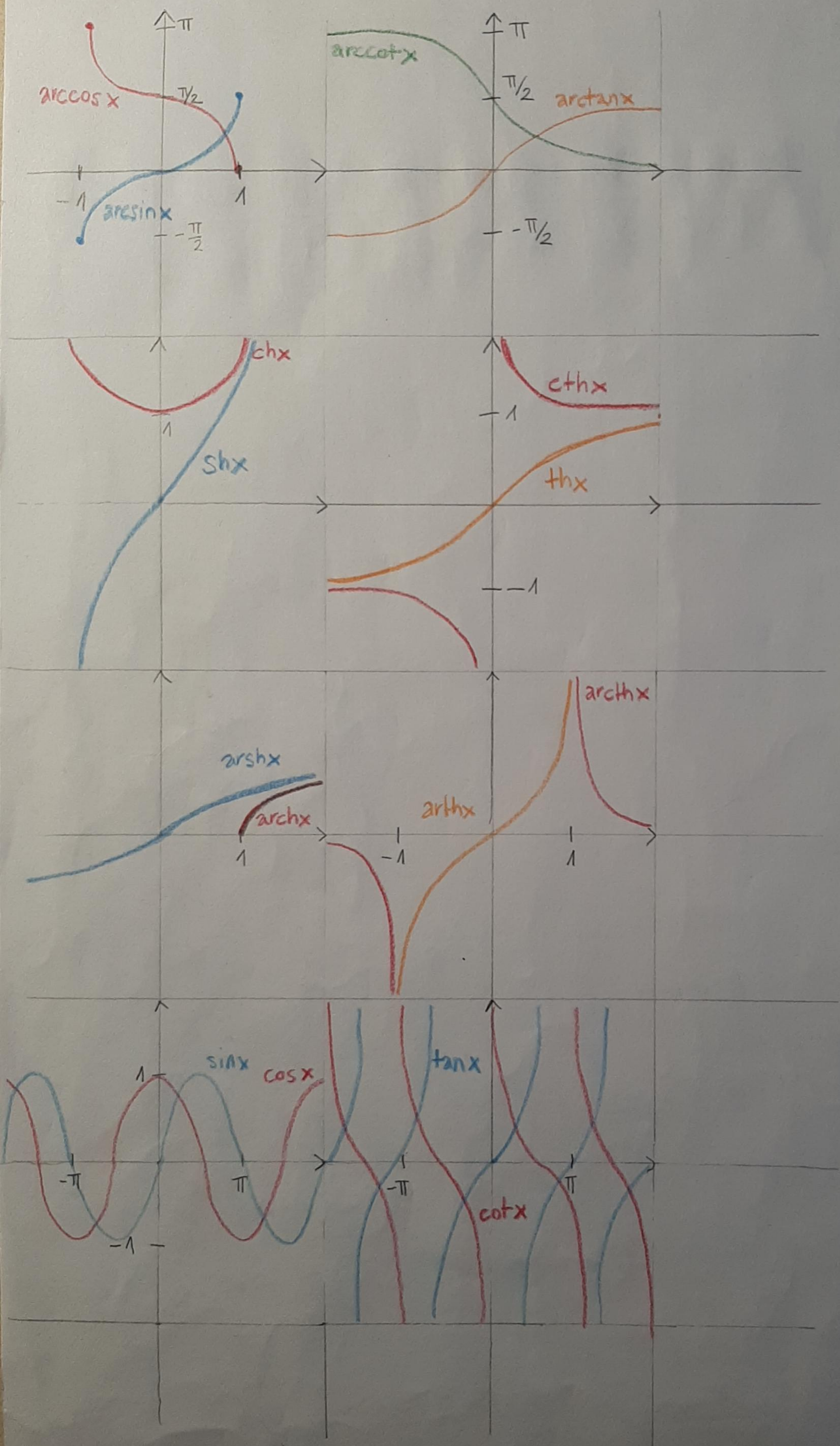
lim: $\pm\infty$ ill. szakadások

R_f: minden többi alapján

+ linearizáció x_0 pontban: $y(x)=y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)$

+ lineáris aszimpoták: ha $\lim \frac{f(x)}{x}=A$ & $\lim(f(x)-Ax)=B \Rightarrow \exists$ és $y=Ax+B$

„Barátink", a trigonometrikus fv-ek



Hatlan integrálás

Deriválttáblázat

$\int cf$, $\int f+g$

$\int f(ax+b) = \frac{F(ax+b)}{a}$

Szorzatok

- elvégezzük : (umi + umi) umi
- $\int f^{\alpha} \cdot f' = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}$: $\text{umi}^{\alpha} \cdot \text{umi}$ $-\int f^{-1} \cdot f' = \ln|\ |$
- $\int F \cdot g = FG - \int f \cdot G$: polinom $\cdot$ (híres $\circ$ lineáris)

	e, sin típusok		log, tan, arc típusok	→ álszorzat
F	polinom ↓ f	g híres ↓ G	F híres ↓ f	g polinom ↓ G	g = 1 helyettesítéssel

- $\int (g' \circ f) \cdot f' = g \circ f$: umi $\cdot$ (híres $\circ$ nemlineáris)

$\int e^f \cdot f' = e^f$ ↳ $\int (g' \circ f) \cdot f' \cdot h = (g \circ f) \cdot h - \int (g \circ f) \cdot h'$

$\int \ln f \cdot a^f \cdot f' = a^f$

$\int \frac{1}{f} \cdot f' = \ln|f|$ ←

$\int$ tan, arc deriváltak

Törtek

- darabolás számláló szerint
- szorzattá alakítás $\left(\frac{b}{a^{\alpha}} = b a^{-\alpha} \ \& \ \frac{b}{a} = b \cdot \frac{1}{a} \right)$

Rac tf

0. $C \frac{1}{f} \cdot f'$ & $f^{\alpha} \cdot f'$ ellenőrzés

I. 1. polinomosztás maradékkal
   2. nevező gyökképlete (másodfokú tagok $D<0$)
   3. új nevezők meghatározása : $P^n Q^m \dots \to \frac{A_1}{P} + \frac{A_2}{P^2} + \dots + \frac{B_1x + C_1}{Q} + \frac{B_2x + C_2}{Q^2} + \dots$
   4. keresztszorzás (számlálók egyenlősége) : lin. egyenletrendszer . figyelj, hogy A_2 , A_1P , QP^2

II. Alaptörtek (kiemeléssel)
   ↳ elsőfokú $\int \frac{1}{x+a} = \ln|x+a|$ & $\int \frac{1}{(x+a)^n} = \frac{(x+a)^{1-n}}{1-n}$

↳ másodfokú $\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n} = k_1 \int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n} + k_2 \int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n} \to k_3 \int \frac{1}{(1+t^2)^n}$

$\ln|ax^2+bx+c|$ $\quad$ $\frac{(ax^2+bx+c)^{1-n}}{1-n}$

ahol $n \geq 2$ esetben
$\int \frac{1}{(1+t^2)^n} = \frac{t}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \cdot \int \frac{1}{(1+t^2)^{n-1}}$

rekurzívan, amíg $\int \frac{1}{1+t^2} = \arctan(t)$

Gyökös (klasszikus)

$$\int \frac{ax+b}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}} = k_1 \int \frac{2\alpha x+\beta}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}} + k_2 \int \frac{1}{\sqrt{\pm 1 \pm g^2}} = k_1 \frac{\sqrt{ax^2+\beta x+\gamma}}{1/2} + k_2 \frac{\mathrm{arc}\begin{Bmatrix}\sin\\ \mathrm{sh}\\ \mathrm{ch}\end{Bmatrix} g}{g'}$$

teljes négyzet & kiemelés

Helyettesítéses

$\int f(x)\,dx = \int f(x) \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt$ $\quad$ x be, elvégez, x vissza

1. $\sqrt{ax^2+bx+c}$: $\sqrt{1-A^2}$ $\quad A=\sin t$ // $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
   $\sqrt{B^2+1}$ $\quad B=\mathrm{sh}\,t$ helyettesítéssel
   $\sqrt{C^2-1}$ $\quad C=\mathrm{ch}\,t$

2. e^x helyettesítés $\to$ Rac tf.

3. $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x \to$ Rac. tf.
   $t=\tan\frac{x}{2}$ $\quad x=2\arctan t$ $\quad \frac{dx}{dt}=\frac{2}{1+t^2}$
   $\sin t = \frac{2t}{1+t^2}$ $\quad \cos t = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

4. $\sqrt[n]{ax+b} := t \to$ Rac. tf.

5. $x^{\frac{p_1}{q_1}}, x^{\frac{p_2}{q_2}} \dots : t = x^{\frac{1}{\mathrm{lkkt}(q_1,q_2,\dots)}} \to$ Rac. tf.

Trigonometria

(sin & cos ill. sh & ch) // Osborne képlet: 1. lecseréljük $\sin, \cos \to \mathrm{sh}, \mathrm{ch}$
2. $\mathrm{sh} \cdot \mathrm{sh}$ alakok előjelét megváltoztatjuk (nem kell belső képlettel bajlódni)

$\int \sin^\alpha x \cos^\beta x$ $\to$ mindkettő ps: $\sin^2 x \mapsto \cos^2 x \mapsto \cos 2x$
$\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ $\quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$\to$ egyik pn (legyen α): $\int f^\alpha g^\beta = \int f^{\alpha-1} \cdot f \cdot g^\beta = \int (1-g^2)^{\frac{\alpha-1}{2}} \cdot f \cdot g^\beta$

felbontás & mind $f \cdot g^\gamma$ alakú

$\to$ mindkettő 1:

$2\sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$

$2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$

$2\sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

$\to$ mindkettő ps hozzuk közös típusra

$\int \frac{\sin^\alpha x}{\cos^\beta x}$ & $\int \frac{\cos^\alpha x}{\sin^\beta x}$

a) $\alpha = \beta \pm 2 \to \int \tan/\cot^\beta \cdot \frac{1}{\cos/\sin^2 x}$

b) $\int \frac{f^\gamma}{g^1} = \int \frac{f^{\gamma-2}}{g} - \int f^{\gamma-2} \cdot g$

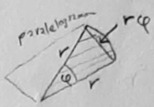
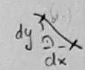
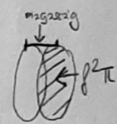
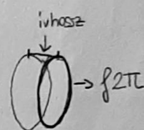
c) $\int \frac{f}{g^\gamma} = \pm \frac{g^{1-\gamma}}{1-\gamma}$

d) $\int \frac{1}{g^\gamma} = \int \frac{f^2}{g^\gamma} + \int \frac{1}{g^{\gamma-2}}$

$\int f(\mathrm{lin}) \cdot g(\mathrm{lin})$ ahol f & g: $e^x, a^x, \sin x, \cos x, \mathrm{sh}\,x, \mathrm{ch}\,x$

↳ 2 parc integrálás azonos kinevezéssel, majd egyenlet

Hat integrálás

	$f(x)$	$y(t), x(t)$		
Görbe alatti terület	$\int_a^b f\,dx$	$\int_\alpha^\beta y\,x'\,dt$		→ görbék közötti terület 1. zh-ek 2. $\left\lvert\int_{x_0}^{x_1} f-g\,dx\right\rvert$
Szektorterület	$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r\,d\varphi$			
Ívhossz	$\int_a^b \sqrt{1+(f')^2}\,dx$	$\int_\alpha^\beta \sqrt{(y')^2+(x')^2}\,dt$		
Forgástest térfogata	$\pi\int_a^b f^2\,dx$	$\pi\int_\alpha^\beta y^2 x'\,dt$		
Forgástest felszíne	$2\pi\int_a^b f\sqrt{1+(f')^2}\,dx$	$2\pi\int_\alpha^\beta y\sqrt{(y')^2+(x')^2}\,dt$		

Abszolútértékes

$$\int_a^b |f|\,dx = \int_a^{zh1} \pm f\,dx + \dots + \int_{zhn}^b \pm f\,dx$$

Helyettesítéses

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(x)\frac{dx}{dt}\,dt$$

$x=\varphi(t)$

$t=\varphi^{-1}(x)$

DE EHELYETT
- →t, határ, →x
- Newton–Leibniz

Becslés $I=\int_a^b f(x)dx$ $\quad \mathcal{X}=\frac{1}{b-a}$

a) kiszámolás

b) $m \leq \mathcal{X} \leq M$: B–W miatt $f'(x)=0$ és $f(a), f(b)$ lehet

c) $f \leq g \rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$ // $f<g$ is

könnyebb integrálok

d) $\int_{-a}^{a} \rightarrow$ ps & pn fuek

PERDEF

$s_F = \sum m_k \Delta x_k \rightarrow h=\sup\{s_F\}$

$S_F = \sum M_k \Delta x_k \rightarrow H=\sup\{S_F\}$

$\rightarrow H=h=\int$

Hat. int. feltétele
- korlátos
- véges pont kivételével folytonos

Hatlan. int. feltétele
- nincs elsőfajú szakadás

__Integrálfv__ $\rightarrow$ ~ normál fv-analízis szabályai

$$I(x)=\int_h^g f(x)\,dx \qquad F(x)=\int_0^x f(x)\,dx \qquad \frac{dI}{dx}=I'(x)=F'(g)-F'(h)=f(g)\cdot g'-f(h)\cdot h'$$

$$\frac{dI}{dg}=\frac{dI}{dx}\cdot\frac{dx}{dg} \qquad \text{ill. } \frac{dI}{dh}=\frac{dI}{dx}\cdot\frac{dx}{dh}$$

adott $F(x)=\int_0^x f(x)\,dx$

ekkor ha f folytonos x_0-ban $\rightarrow F'(x_0)=f(x_0)$

„tartományosdi": • összeadásra visszavezetni $\int_0^a + \int_a^b$

• „szélelemek" vizsgálata: deriválható $\Leftrightarrow$ folytonos & bal derivált = jobb derivált & véges //technically

paritás:

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\,dt \underset{t=-u}{=} \int_0^x f(-u)(-1)\,du \; ? \begin{matrix} -F(x) \\ F(x) \end{matrix}$$

__Improprius__ // A der táblában az intervallumok végei egységesen lecsapva.

1. nemkorlátos pontok, szakadások, ∞-ek meghatározása
2. $\lim\limits_{\substack{\omega \to a\pm \\ \pm\infty}} \int$ hatlan $\rightarrow$ paraméteres beh $\rightarrow$ határérték
3. „kétvégű": ne a bontós módszerrel, hanem kétparaméterrel
4. ha __cáfolsz__, elég __tetszőleges rész intervallumról__ bemutatni, hogy __divergens__ (nem kell $\pm\infty$)

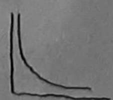
$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}: \begin{matrix} \text{div } \alpha \geq 1 \\ \text{konv } \alpha < 1 \end{matrix} \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}: \begin{matrix} \text{div } \alpha \leq 1 \\ \text{konv } \alpha > 1 \end{matrix}$$

(Tehát épp fordítva, $\frac{1}{x}$ a határ és ő div.)

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha} \text{ div}$$

5. csak a konvergencia megállapításához ill. becsléshez jók az $\frac{1}{x^\alpha}$-ok

I. megsejtés: $\frac{1}{x}$-nél gyorsabban/lassabban simul a tengelyhez



II. divergenshez __egy div. becslés__

konvergenshez __felső & alsó konvergens__ becslés kell

Diffegyenletek (közönséges)

Df-re FIGYELJ!

$\ln|x|$ speckó jelentés

Feladattípusok:

- ált mo (+ sing/reg mo)
- kezdetiérték-probléma (megoldás C-re)
- bizonyítás:
  - $f(x,y)=0$ → ált implicit deriválás, beh.
  - $y=f(x)$ → deriválás, beh.
  - $x=f(t)$, $y=g(t)$
    - egymásból kifejezés
    - $\frac{da}{db}=\frac{1}{\frac{db}{da}}$
    - $\frac{da}{db}\frac{db}{dc}=\frac{da}{dc}$
- egyértelműség vizsgálata ↔ reg/sing
- adott egyenest érintő: 1. meredekség → x_0 3. → y_0
- iránymező rajzolás: 1. ált mo. 2. mindenfelé C-vel felvenni
- izoklína: $y'=f(x,y)=K$
- szélsőérték: ahol $y'=0$ & $y''\neq 0$ (implicit deriválással)
- inflexió: ahol $y''=0$ & $y'''\neq 0$

1. rendű mo.

— primitív $\quad y'=f(x) \longrightarrow y=F(x)$

— szétválasztható

$$y'=f(x)g(y) \quad \forall y_0: g(y_0)=0 \Rightarrow y :\equiv 0 \;\&\; y :\equiv y_0$$

egyéb folytonos helyen $\quad \int \frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx$ → összegzés

— lineáris $\quad y'+f(x)y=r(x)$

$$H:\; y=Ce^{-\int f(x)dx}$$

$$I:\; y=\int \frac{r(x)}{\varphi(x)}dx\cdot\varphi(x) \quad \text{ahol } \varphi(x) \text{ H part mo-sa}$$

/szép végigvezetés

//visszahelyettesítés!

— visszavezethető beh-sel

- $y'=f(ax+by) \rightarrow u=ax+by \;\&\; y'$
- $y'=f\left(\frac{y}{x}\right) \rightarrow u=\frac{y}{x} \;\&\; y'$
- más: VAGY y'
  VAGY u'
  VAGY nem kell derivált (kiesik minden x)

— szukcesszív approximáció $\quad (x_0,y_0)$-ban

$$y'=f(x,y) \Rightarrow \begin{cases} \varphi_0(x)=y_0 \\ \varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi_{n-1}(t))\,dt \end{cases}$$

$\downarrow$

$\varphi(x)$, ami tényleg mo (x_0,y_0)-ban

1. rendű lin. konst eü. diffrendszer $\quad \underline{\dot{x}}=A\underline{x}+\underline{f}(t)$

— $H:\; \underline{x}=e^{\lambda t}\underline{s}$ mo (λ sajátérték, $\underline{s}$ sajátvektor)

(→ sajátérték-feladat)

- komplex $\lambda=a+bi$ → komplex $\underline{s}$
  $\underline{x}$ helyett $\mathrm{Re}\,\underline{x}$ & $\mathrm{Im}\,\underline{x}$
- m-szeres: m db független $\underline{s}$ jön ki megoldásként

Lin. rekurzió $\quad f(n)=\sum^{k} a_i f(n-i)$

1. K: $q^k=\sum^{k} a_i q^{k-i}$
2. m-szeres gyök: $q^n \ldots n^{m-1}q^n$
   m-szeres komplex gyök: $z^n+\bar{z}^n \ldots n^{m-1}(z^n+\bar{z}^n)$
   $i(z^n-\bar{z}^n) \ldots n^{m-1}i(z^n-\bar{z}^n)$

ígyː $f(n)=c_1q_1^n+c_2q_2^n+\ldots$

3. kezdetiértékek $\{y_0=f(x_0)\}$ e. rendszerből konkrét $c_1 \ldots c_k$

2. rendű mo.

- $f(x, y', y'') = 0 \rightarrow y' = p(x) \quad y'' = p'(x)$

  spec $\neg y'$: akkor is

- $f(y, y', y'') = 0 \rightarrow y' = p(y) \quad y'' = \frac{dp}{dy} \cdot p(y)$

Ha van peremfeltétel, alkalmazd. Anélkül is kurvanehéz.

N. rendű mo. (áll. eü lineáris) $L_n[y] = \sum_0^n a_i y^{(i)} = r(x)$

- H:

  1. K: $\sum_0^n a_i \lambda^i = 0$ mo.
  2. k-szoros gyökhöz tartozik: $e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda x}$

     k-szoros nemvalós gyökpárhoz tartozik: $e^{ax}\cos bx \dots x^{k-1} e^{ax} \cos bx$
     $(a \pm bi)$
     $e^{ax}\sin bx \dots x^{k-1} e^{ax} \sin bx$

//visszafejtés is feladat lehet

- I: (kísérletezés) 1. bontsuk ilyen tagokra $(r(x))$ 2. ez lesz a próbafüggvény tag $(p(x))$

//$r(x) = p(x)$

$\sum^m a_i x^i e^{ax}$ — $\sum^m A_i x^i$

$\sum^m a_i x^i e^{ax} \sin bx / \sum^m a_i x^i e^{ax} \cos bx$ — $\sum^m B_i x^i e^{ax} \sin bx + \sum^m C_i x^i e^{ax} \cos bx$

// $a = 0$ / $m = 1$ / $b = 0$ szélsőhelyzetek

3. Külső rezonancia: homogénben b-szoros, próbafüggvényben k-szoros
   a) $b \geq k \rightarrow$ egyetlen, $b+1$es tag kell
   b) $b < k \rightarrow [b; k]$ minden tag
4. eleget differenciáljunk
5. beh.
6. azonos típusok $\rightarrow$ lin. e-rendszer $\rightarrow y_{i,p}$

- helyettesítéssel : figyelve, hogy ha $x \rightarrow t$

$$y' \rightarrow \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

$$y'' \rightarrow \frac{d}{dx}\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \left(\frac{d}{dt}\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\frac{dt}{dx} = \dots = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$$

Sorok $\sum_{n}^{\infty} a_k$

KONV/DIV + HIBA

Ált

- véges sok elhagyásával $\sum^{\infty} a_n \sim \sum^{\infty} b_n$ (egyidejűleg konvergens)
- $\lim a_k = 0$ szükséges feltétel (DIV vizsgálat határértékkel)
- Cauchy $\forall \varepsilon > 0\ \exists M: n > M \Rightarrow |a_{n+1} + \dots + a_{n+k}| < \varepsilon$, $k \in \mathbb{N}^+$ (DIV ált. vizsgálat)
- DIV bizonyításnál akár ∞ tagot is elhagyhatunk
- abs konv >> konv → POZITÍV TAGÚ vizsgálat
- $\sum c a_k = c \sum a_k$ $\quad \sum a_k + b_k = \sum a_k + \sum b_k$

Feladat

- ha nem megy, írd fel.

PERDEF $\lim s_n$

LÁNCBAFEJTÉS minden a_k-t kettébontani (ált. − / csoportosítás)

GEOM SOR

$$\sum_{0}^{\infty} q^k \; (1+q+\dots) \begin{cases} \frac{1}{1-q} & : |q| < 1 \\ +\infty & : q \geq 1 \\ \text{div} & : q \leq -1 \end{cases}$$

$$\sum_{n}^{\infty} q^k = q^n \sum_{0}^{\infty} q^k$$

LEIBNIZ

- alternál
- $\searrow$
- $\lim a_k = 0$

tipik $(-1)^n$, cos stb.

$$|H| = |s - s_n| \leq |a_{n+1}|$$

POZITÍV $a_k > 0$

- Konvergens $\Leftrightarrow \{s_n\}$ korlátos
- n^α konvergens $\Leftrightarrow \alpha < -1$ // ~ integrálás — tipik $\frac{1}{n^\alpha}$
- $\sum a_k \sim \sum a_{(2^l)} \cdot 2^l$ ha $a_k \searrow$ — tipik log

POZITÍV KRITÉRIUMOK $a_n > 0$

- MAJORÁNS $0 < a_n \le c_n$, $\exists \sum^{\infty} c_n$ $\Rightarrow$ KONV

<u>tipik</u> a többség törtek, amiben $+/-$ van

- MINORÁNS $0 \le d_n \le a_n$, $\nexists \sum^{\infty} d_n$ $\Rightarrow$ DIV

- HÁNYADOS

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1 \iff \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow$ KONV

$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \;/\; \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow$ DIV

<u>tipik</u> $n!, k^n, n^4, n^n$ tényezőkből képzett tört (kevés +)

- GYÖK

$\sqrt[n]{a_n} \le q < 1 \iff / \limsup \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow$ KONV

$\sqrt{a_n} \ge 1 \quad / \limsup \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow$ DIV

<u>tipik</u> sok hatvány, a kitevő gyakran nemlineáris & e-s

- INTEGRÁL

kell egy f, ami illeszkedik

$$\sum^{\infty} a_n \sim \int_1^{\infty} f\,dx$$

<u>tipik</u> ha tudod integrálni, használd

- HIBA $s \approx s_n$
  - a) Leibniz $|H| < |a_{n+1}|$
  - b) integrálásnál $|H| \le \int_n^{\infty} f\,dx$
  - c) majoráns, hányados, gyökös $\Rightarrow$ úgy, hogy majoráljuk mértani sorral

$$|H| = \sum_{n+1}^{\infty} a_k \le \sum_{n+1}^{\infty} cq^k$$, ami kiszámolható

INYENCSÉGEK

- Cauchy-szorzat: rajzolj táblázatot. tipik konv/csoportosítás
- végtelen módosítások:
  - $+$ zárójel $\Rightarrow$ konv sérülhet
  - $-$ zárójel $\Rightarrow$ div sérülhet
  - csere $\Rightarrow$ absz konvnak még az értéke is marad; felt konv bármivé átcsoportosítható

- $a_n \sim b_n \iff \lim \frac{a_n}{b_n} = 1$

$a_n \sim b_n \Rightarrow \sum a_n \sim \sum b_n$

<u>tipik</u> transzcendens fvek, $\Rightarrow$ határértékek

Függvénysorozatok $f_n(x) \to f(x)$

- „konstansmódszer" ; $x = c$, sőt $u(x) = c$
- ekonv & folytonos => f folytonos // tipikusan cáfoláshoz

Függvénysorok $\sum f_n(x) \to f(x)$ $r_n = |s - s_n|$

- $r_n \to 0$ mindenhol, közös ε-nal <=> ekonv / tipikusan $|r_n| \leq \ldots \leq a_n < \varepsilon$ növelgetéssel igazolható, ahol a_n már x-től f_n (pl. $x = \ldots$nél helyettesítés)

- ekonv => mindenhol konv

  ekonv => („problémás helyen" is) $\lim\limits_{x_0} r_n = 0$

- Weierstrass-majorálás:

  $\exists b_n : |f_n(x)| \leq b_n$, $\sum b_n$ konv => ekonv (& abs konv)

- abs konv => konv

- folytonos tagok, ekonv => folytonos összeg & intható összeg

  // $\sum \lim = \lim \sum$ ill. $\int \sum = \sum \int$

- folytonos tagok, $\sum f_k$ konv, $\sum \frac{d}{dx} f_k$ ekonv => deriválható összeg

  // $\frac{d}{dx} \sum = \sum \frac{d}{dx}$

Hatványsorok $\sum a_n (x-x_0)^n \to f(x)$

Konvergenciatartomány

- $R = \dfrac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$ $\left(\frac{1}{0} = +\infty, \frac{1}{+\infty} = 0\right)$ ill. (ha létezik) $R = \dfrac{1}{\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$ (–||–)

  //mindenhol jó, mert limsup CSAK $\sum a_n u^n$ alakúnál!

- mindig $(-R, R)$ alakú:
  - 0-ban mindig konv
  - x_0-ban konv $\to$ $(-|x_0|, |x_0|$ - ban konv)
  - x_0-ban div $\to$ $x < -|x_0|$ & $|x_0| < x$ -ben div

  széleken külön vizsgálat kell ($\pm R$ beh $\to$ numerikus sor)

- „konvban”:
  - ekonv
  - abszkonv
  - konv
  - folytonos

  (zárt intervallumon) $\Rightarrow$ $\int \sum = \sum \int$ (zárt intervallumon)

  $\frac{d}{dx} \sum = \sum \frac{d}{dx}$ (R megegyezik, de szélek nem)

- (mindig ellenőrizd!)

$\Downarrow$

f meghatározása: $f = \int_0^x \sum \frac{d}{dx} = \frac{d}{dx} \sum \int_0^x$

// $\sum$ szinte mindig geom

$\int / \frac{d}{dx}$ ránézésre

kis pofázás: $f \cdot x$ / $\frac{f}{x}$

Klasszikus helyettesítés

$\sum a_n [g(x)]^n = \sum a_n u^n$ $u = g(x)$

a konv sugarat $|u| < R$ alakban kapod meg, tehát $|g(x)| < R$ (ebből találd ki)

széleken $u = \pm R$ alakban vizsgáljuk (egyszerűbb)

Taylor-sorfejtés

Ha x_0 környezetében konvergál a hatványsor, akkor az az x_0-beli Taylor-sor & eű

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

(és f analitikus x_0-ban)

Az n-edrendű polinom n-edrendben érinti & eű.

Hiba

$$R_n = f(x) - T_n(x)$$

ha analitikus ; $(x-x_0)^n \gg R_n(x)$

Lagrange-maradéktag : $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ ahol $\xi \in (x_0, x)$ vagy fordítva

→hiba : $\left.\right|_{x_0}^{x} \in [a,b]$ mellett választjuk a „legrosszabb" x-t és ξ-t : $|H| = |R_{n+1}(x)| <$ becslésünk

Alapsorok

$$\frac{1}{1-x} = \sum_0^\infty x^n \qquad |x|<1$$

ha lehet, ez szebb

$$(1+x)^\alpha = \sum_0^\infty \binom{\alpha}{n} x^n \qquad |x|<1$$

$$\binom{\alpha}{0} = 1 \qquad \binom{\alpha}{k} = \frac{\overbrace{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}^{k\,db}}{k!}$$

$$\binom{-1}{k} = (-1)^k$$ // a többi is könnyen kiszámolható

$$\sin x = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos x = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\mathrm{sh}\, x = \sum_0^\infty \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \mathrm{ch}\, x = \sum_0^\infty \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$e^x = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$$

$x \in \mathbb{R}$

Rac tf

- félbontás után // nem mindent old meg
  - polinom : maga & $x \in R$
  - $\frac{A}{(x+a)^\alpha} = \frac{A}{(x_0+a)^\alpha}\left(\frac{x-x_0}{x_0+a}+1\right)^{-\alpha}$
  - $\frac{A}{B+(x-x_0)^\alpha} = \frac{A}{B}\left(1+\frac{(x-x_0)^\alpha}{B}\right)^{-1}$

Más:
- kis piszkálás: $f \cdot x$ / $\frac{f}{x}$ stb.
- $\int \frac{d}{dx}$ / $\frac{d}{dx} \int$: ha könnyebbnek látszik deriválni / integrálni //
- trigon azonosságok

Felhasználás számoláshoz

— numerikus sor összegéhez: „visszafüggvényesítünk" & helyettesítünk

— deriválthoz: $\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} = a_k$ az $(x-x_0)^k$-hoz tartozó tag

— $x \ll 1$: $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$

— $\sqrt[\alpha]{a} = \sqrt[\alpha]{b^\alpha} \cdot \sqrt[\alpha]{\frac{a}{b^\alpha}} = b \cdot \sqrt[\alpha]{1+c}$ ahol $|c| < 1$

— $(1+x)^\alpha$ hibabecsülhető, ha $\binom{\alpha}{k}$ vált előjelű, mert biztosan Leibniz:

$$|H| < \left|\binom{\alpha}{k+1} x^{n+1}\right|$$

MINDIG INDOKOLNI KELL AZ ÉRVÉNYESSÉGET

// f végtelenszer diffható $(-R,R)$-n
minden deriváltnak van közös korlátja $(-R,R)$-n $\Bigg\}$ $f = \sum_0^\infty \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ mindenhol $(-R,R)$-n

Fourier-sor

trig. részletösszeg: $\Phi_n = \frac{a_0}{2} + \sum_1^n \left[a_k \cos\frac{2k\pi x}{p} + b_k \sin\frac{2k\pi x}{p}\right]$

„Fourier-sorolható": p szerint periodikus & integrálható egy p széles intervallumon (I)

$\exists f''$
f Fourier-sorolható } ⇒ Fourier-sora egyenletesen konvergens

Φ_n egyenletesen konvergens & összege f ⇒ $a_k = \frac{2}{p}\int_I f \cos\frac{2k\pi x}{p}\,dx$ & $b_k = \frac{2}{p}\int_I f \sin\frac{2k\pi x}{p}\,dx$ ill. $a_0 = \frac{2}{p}\int_I f\,dx$

korlátos
véges sok monoton részre bontható a periódus,
2 szélsőben lehet szakadás } ⇒ folytonos helyeken $\Phi(x) = f(x)$
szakadási helyeken $\Phi(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$

- érdemes paritást vizsgálni, hogy keveset kelljen integrálni
- egyenletes konvergencia cáfolás: összeadandók folytonosak, de az összeg már nem
- $ps \cdot ps = ps$ $\square$; $pn \cdot ps = pn$ $\square$; $pn \cdot pn = ps$ O } ps függvényeket pedig elég $\int_0^{p/2}$-n integrálni & kettővel szorozni; pn függvények integrálja pedig 0
- egyenletes konvergencia bizonyítás Weierstrass-sal:

$$\left| a_k \cos\frac{2k\pi x}{p} + b_k \sin\frac{2k\pi x}{p} \right| \leq c_k \quad \text{ahol } \sum^{\infty} c_k \text{ konvergens}$$

- $\sin k\pi = 0$
  $\cos k\pi = (-1)^k$

- ha azt kérik, hogy egy numerikus sort számolj ki belőle, keress egy megfelelő x-et & helyettesítsd be

Fourier - trafó

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, dt \, d\omega \qquad \text{ha} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx < \infty$$

Ezért

$$\mathcal{F}[f(x)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} \, dt = F(\omega) \qquad \text{„trafó"}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} \, d\omega = f(x) \qquad \text{„inverz trafó"}$$

- $F(\omega)$ korlátos, folytonos, és $\lim_{\omega \to \pm\infty} F(\omega) = 0$
- $f(x) = \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[f]] = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]]$

Átalakítások

$f(x)$ & $g(x)$ F-trafható

- linearitás : $\mathcal{F}[(\alpha f + \beta g)(x)](\omega) = \alpha \mathcal{F}[f(x)](\omega) + \beta \mathcal{F}[g(x)](\omega)$
- dilatáció : $\mathcal{F}[f(\frac{x}{a})](\omega) = |a| \cdot \mathcal{F}[f(x)](a\omega)$
- eltolás : $\mathcal{F}[f(x-x_0)](\omega) = e^{-i\omega x_0} \cdot \mathcal{F}[f(x)](\omega)$
- moduláció : $\mathcal{F}[(e^{i\omega_0 x} \cdot f)(x)](\omega) = \mathcal{F}[f(x)](\omega - \omega_0)$
- diff 1 : $\mathcal{F}[(x^n \cdot f)(x)](\omega) = i^n \cdot \frac{d^n}{dx^n} \mathcal{F}[f(x)](\omega)$
- diff 2 : $\mathcal{F}[(f^{(n)})(x)](\omega) = (i\omega)^n \cdot \mathcal{F}[f(x)](\omega)$

Konvolúció

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) \, dt$$

- $f * g = g * f$
- $\mathcal{F}[(f*g)(x)](\omega) = \mathcal{F}[f(x)](\omega) \cdot \mathcal{F}[g(x)](\omega)$

Többváltozós fvek – HATÁRÉRTÉK

$\underline{x}_k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ Pontsorozat

$$\underline{x}_k \to \underline{a} \iff \forall x_{k_i} \to a_i$$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Operátor/leképezés/vektor-vektor $\underline{f}(f_1 \dots f_m)$ ahol $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\lim\limits_{\underline{x}_0} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{a} \iff \forall \lim\limits_{\underline{x}_0} f_i(\underline{x}) = a_i$. Jellemezhető mátrixszal (csakúgy mint a deriváltja)

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Skalár-vektor

$\lim\limits_{\underline{x}_0} f(\underline{x}) = a \iff \lim\limits_{\underline{0}} f(\underline{u}) = a \overset{\#}{\iff}$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \underline{u} \in D_f \cap \dot{K}_{\underline{0},\delta} \Rightarrow f(\underline{u}) \in K_{a,\varepsilon}$ • $\underline{a}$ torlódási pont

$\underline{u} = \underline{x} - \underline{x}_0$

(Utóbbit tárgyaljuk itt)

$f(\underline{x}), g(\underline{x})$ folytonos $\Rightarrow$ $f+g, \ \lambda f, \ f \cdot g$ folytonos

$f(\underline{x}), g(\underline{x})$ folytonos $\Rightarrow$ $f \circ g$ folytonos

$f(\underline{x}) = x_i$ fv folytonos $\Rightarrow$ Racf $(x_1 .. x_n)$ folytonos, ha nevező $\neq 0$

Bizonyításhoz és **cáfoláshoz** alt definíció

$x_n := \varrho_n \cos\varphi_n$

$y_n := \varrho_n \sin\varphi_n$

ahol $\varrho_n \to 0$

φ_n tetszőleges

Ekkor $\exists \lim\limits_{\underline{0}} f(x,y) = \exists \lim\limits_{\varrho_n \to 0} f(x_n, y_n)$. Ez már „egyváltozós".

Alt kihasználjuk, hogy $\sin\varphi_n$ & $\cos\varphi_n$ korlátos ill. $\sin^2\varphi_n + \cos^2\varphi_n = 1$

Minden helyen működnie kell. Vess be minden határértékes tudást.

Cáfoláshoz két eltérő út találásával

- $\lim\limits_{x \to 0} (x, mx)$. Ha nem esik ki m, önmagában is elég. $x = 0$, $m = 0$, $m = 1$ helyeken érdemes
- $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} f(x,y) \neq \lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f(x,y)$
- $\dfrac{x^n y^m}{x^{nc} + y^{mc}}$: 1. $x_k := \dfrac{1}{k^{c/n}}$, $y_k := \dfrac{1}{k^{c/m}}$ véges határértékre hozza ki

  2. „egyenes irányában" 0

Gyakori a $+\infty$ találása. Cáfoláshoz ekkor ált 0 eredményt kell valahogyan kihozni.
De próbálkozhatunk az alt definícióval is.

Többváltozós fvek — ANALÍZIS

Bolzano

D öf & folytonos $\Rightarrow$ $f(\underline{a})$ & $f(\underline{b})$ között minden értéket felvesz D-n

Weierstrass

D kompakt & folytonos $\Rightarrow$ felveszi inf & supr-át :
(korlátos & kompakt értékkészlet)

- D_f szélein
- deriválással pot szélsőértékhelyeken
- ahol nem deriválható

Heine

D kompakt & folytonos $\Rightarrow$ e folytonos

Lagrange

D konvex & $\exists$ grad f & $\underline{a}$ belső pont $\Rightarrow$ $\forall \underline{b} \in D$ van $\underline{c}$ pont az $\underline{a}$ & $\underline{b}$ közötti szakaszon ahol $f(\underline{b}) - f(\underline{a}) = df(\underline{c}, \underline{b} - \underline{a})$

Szélsőértékkeresés

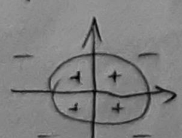
- Szükséges feltétel: az ott értelmezett iránymenti / parciális / totális deriváltak mind 0-k.
  $\Rightarrow$ leszűkül az „extremális" pontokra & a nemderiválható pontokra
- $\underline{H}$-t összerakjuk (másodrendű parciális deriváltakból)
  // a második derivált létezését pl. folytonossággal indokolni kell
  $\text{grad} f(\underline{a}) = \underline{0}$ & H poz definit $\Rightarrow$ lok min
  $\text{grad} f(\underline{a}) = \underline{0}$ & H neg definit $\Rightarrow$ lok max
  H indefinit $\Rightarrow$ nem lehet szélsőérték

poz definit : $\forall D_k > 0$
neg definit : $\forall (-1)^k D_k > 0$
indefinit : nem $\forall D_k \geq 0$, nem $\forall (-1)^k D_k \geq 0$

nyeregpont : extremális, de indefinit $\underline{H}$

- Ha elakadunk egy extremális pontnál, figyeljük a környezet előjelét.
  Ha mindenhol azonos / legfeljebb 0, akkor szélsőérték.
  Egyébként nem.
- A nemderiválható pontoknál is sajnos előjeleket kell nézni (szerencsére ezekből kevés van)

Rajzoljunk!



Lineáris regresszió

$y = mx + b$: $r = \sum (mx_i + b - y_i)^2$ minimális

k db x_i & y_i pár $\quad m = \dfrac{k \sum x_i y_i - \sum x_i \cdot \sum y_i}{k \sum x_i^2 - \sum x_i \cdot \sum x_i} \quad b = \dfrac{\sum y_i - m \sum x_i}{k}$

Többváltozós fvek — DERIVÁLÁS

3

Parciális x_i szerint $\frac{\partial}{\partial x_i} f$

- $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_1 \dots x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1} \dots x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h}$

- Nem létezhet, ha nem folytonos a pontban
- Konstansmódszerrel egyváltozós fv, ahol hagyományosan megállapítható a derivált

Gradiens grad$f$

- $\lim\limits_{\underline{h} \to \underline{0}} \left[f(\underline{a} + \underline{h}) - f(\underline{a}) - \text{grad} f(\underline{a}) \cdot \underline{h} \right] = 0$

  Ehhez egy próbát kell találni, ami csak $(f'_{x_1}, \dots, f'_{x_n})$ lehet.

- Nem létezhet, ha bármely parciális/iránymenti derivált $\nexists$
- Nem létezhet, ha nem folytonos a pontban
- Ha $K_{\underline{a}}$-ban $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}$ $\forall i$-re + ezek folytonosak $\underline{a}$-ban $\Rightarrow \exists \text{grad} f(\underline{a})$

Értéke: $g(\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \underline{e}_i$

- $\exists \text{grad} f \Rightarrow$
  - $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i} = \text{grad} f \cdot \underline{e}_i$
  - $\exists \frac{\partial f}{\partial \underline{e}} = \text{grad} f \cdot \underline{e}$
  - $\exists df(\underline{a}, \underline{h}) = \text{grad} f(\underline{a}) \cdot \underline{h}$ (differenciál)

    $df \approx f(\underline{a} + \underline{h}) - f(\underline{a})$

Jelentése:

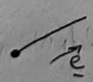
— a maximális iránymenti derivált iránya $\frac{\text{grad} f}{|\text{grad} f|}$, nagysága $|\text{grad} f|$

— $\perp$ a szintalakzatra

— a nagyobb paraméterű szintvonal felé mutat (ha grad$f \neq 0$). $\mathbb{R}^n$-beli vektor

Iránymenti derivált $\frac{df}{d\underline{e}}$ ahol $|\underline{e}| = 1$

- $\lim\limits_{t \to +0} \dfrac{f(\underline{a} + t \cdot \underline{e}) - f(\underline{a})}{t}$

Fontos csak  kell értelmezve legyen & folytonosság sem kell

Többváltozós fvek – MAGASABBRENDŰ DERIVÁLÁS

4

N-szer deriválható : (n−1)-szer deriválható a környezetben & (n−1)-edik deriváltjának parciális deriváltjai léteznek a pontban

N-szer folytonosan deriválható : $\forall$ n-edrendű parc deriváltja $\exists$ és folytonos (csak intervallumon!)

2-dik derivált : Hesse-mátrix

$$\underline{\underline{H}}\ (n\times n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

Ez mindig szimmetrikus és

$$d^2 f(\underline{a},\underline{h}) = \underline{h}^T \cdot \underline{\underline{H}}(\underline{a}) \cdot \underline{h} = h_1^2 f''_{xx}(a) + 2h_1h_2 f''_{xy}(a) + h_2^2 f''_{yy}(a)$$

N-edrendű differenciál: $d^n f(\underline{a},\underline{h}) = d\left[d^{n-1} f(\underline{a},\underline{h})\right](\underline{a},\underline{h})$

Young (általánosított): f n-szer folytonosan diffható

$\Rightarrow$ az n-edrendű parciális deriváltak megegyeznek, ha csak a deriválás sorrendjében térnek el

Többváltozós fvek — VEKTOR–VEKTOR FVEK

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\underline{f}(f_1 \dots f_n)$ deriválható $\Leftrightarrow$ $\exists \operatorname{grad} f_i(\underline{a})$ $\forall i$-re

$$\Longleftrightarrow \lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \frac{|\underline{f}(\underline{a}+\underline{h}) - \underline{f}(\underline{a}) - \underline{\underline{A}}\cdot\underline{h}|}{|\underline{h}|} = 0$$

$$\underline{f}' = \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} f_1' \\ \dots \\ f_m' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \to \frac{\partial f_i}{\partial \underline{x}}$$

Ha $m=n$ ún. Jacobi-mtx.

$$\downarrow \frac{\partial \underline{f}}{\partial x_i}$$

ill. $\left.\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{e}}\right|_{\underline{x}} = \left.\underline{f}'\right|_{\underline{x}} \cdot \underline{e}_{(\text{oszlopvektor})}$

Láncszabály $\left.(\underline{f}\circ\underline{g})'\right|_{\underline{x}} = \left.\underline{f}'\right|_{\underline{g}(\underline{x})} \cdot \left.\underline{g}'\right|_{\underline{x}}$ ill. $\left.\frac{\partial \underline{f}\circ\underline{g}}{\partial x_i}\right|_{\underline{x}} = \left.\underline{f}'\right|_{\underline{g}(\underline{x})} \cdot \left.\frac{\partial \underline{g}}{\partial x_i}\right|_{\underline{x}}$

Ami nekünk fontosabb:

- $z(t) = f(x(t), y(t))$ térgörbe

  $\left.\begin{array}{l} \exists \operatorname{grad} f \\ \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t} \text{ folytonosak} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$

- $F(x,y) = 0$ implicit fv // $y(x)$

  $\left.\begin{array}{l} \exists \operatorname{grad} F \\ \exists \operatorname{grad} y(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} = 0$

- $F(x,y,z) = 0$ implicit fv // $z(x,y)$

  $\left.\begin{array}{l} \exists \operatorname{grad} F \\ \exists \operatorname{grad} z \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{array}\right.$

Többváltozós fvek – GEOMETRIA

„Normál" térben

- $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ a sík tengelypont egyenlete
- $z = f(x)$ z körüli megforgatása: $z = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ ~ többi
- gyökvonásnál „két ág" $\pm$
- $z = (ax)^2 + (by)^2$: a $z = x^2+y^2$ paraboloid nyújtása $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$-szeresre
- $(ax)^2 + (by)^2 + (cz)^2 = 1$: az $x^2+y^2+z^2 = 1$ gömb nyújtása (ellipszoid) $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ -szeresre

Szintfelület: $F(x,y,z) = C$ (implicit) // lehetne 0 is

$F(x,y) = C$ (explicit)

Érintőfelület: $\operatorname{grad} F(\underline{P}_0) \cdot (\underline{P} - \underline{P}_0) = 0$ (implicit)

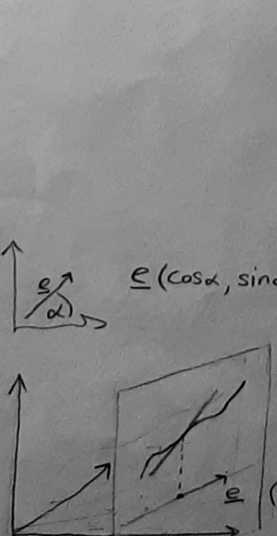
$y = \operatorname{grad} f(\underline{x}_0) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0) + f(\underline{x})$ (explicit) // értsd pl. P, P_0 síkbeli pontok
$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
y: a két harmadik változója

Iránymenti deriválthoz:

$\underline{e}(\cos\alpha, \sin\alpha)$

$\underline{e}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

Egyébként megmondja erre a síkra eső fv-ren meredekségét
→ adott irányú érintő egyeneshez jó



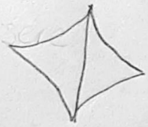
Egyenlete: $(x,y,z) = (x_0, y_0, f(x_0,y_0)) + \lambda \cdot \left(e_1, e_2, \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial \underline{e}}\right)$

Többváltozós fvek — INTEGRÁLÁS | 7

folytonos => intható

folytonos & „egy irányban intható" => két lépésben intható & felcserélhető

MINDIG RAJZOLJ. MINDIG HELYETTESÍTS. MINDIG ZH-EK.

- J-mérték: $\int_Q 1\, dQ$ // használd ki a „területaxiómákat"
- $\int_a^b \int_c^d f(x)\, g(y)\, dx\, dy = \int_a^b f(x)dx \int_c^d g(y)\, dy$
- 

  tartomány feldarabolós módszer -> normáltartományok

  + „duplázáshoz" is jó
- „sorrendcsere":
  - $\int_a^b \int_c^d f\, dx\, dy = \int_c^d \int_a^b f\, dy\, dx$
  - $\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} g\, dy\, dx = \int_a^b \left[G(y)\right]_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)}$. itt „cserét" lerajzolással lehet indokolni
- transzformáció:

POLÁR (x,y)

$dxdy = r\, d\varphi\, dr$

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

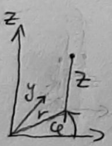
egyenes: $y = \tan\varphi_0 \cdot x$

kör: $(x-u)^2 + (y-v)^2 \leq r_0^2$

vagy $x^2+y^2-2r_0x \leq 0$ ha x tengelyen & 0-t érinti

vagy $x^2+y^2-2r_0y \leq 0$ —||—

vagy $x^2+y^2 \leq r_0^2$



HENGER (x,y,z)

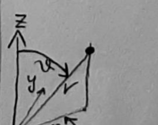
$dxdydz = r\, d\varphi\, dr\, dz$

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$z = z$

forgástest: $z = f(\sqrt{x^2+y^2})$



GÖMB (x,y,z)

$dxdydz = r^2 \sin\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta\, dr$

$x = r\cos\varphi \sin\vartheta$

$y = r\sin\varphi \sin\vartheta$

$z = r\cos\vartheta$

// máshol $-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$ lenne, értelemszerűen ott minden sin helyett cos

gömb: $x^2+y^2+z^2 \leq r_0^2$

a „határfv"-t is transzformálni kell (egyszerűen)

dlt. $\int_{\varphi(A)} f(\underline{x})\, d\underline{x} = \int_A f(\varphi(\underline{t})) \cdot |\det \text{Jacobi}\,\varphi|\, d\underline{t}$ // $\varphi(\underline{t}) = (x_1 = x_1(t_1 \dots t_n) \dots x_n)$ & abs $\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \dots \\ \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_n} \end{vmatrix}$