Szóbeli vizsgakérdések

2008. június 2.

1. Ismertesse az elektromágneses tér forrásmennyiségeit és a köztük lévő kapcsolatot!

   I: áram; **J**: áramsűrűség

   Q: töltés; ϱ, σ, q: térfogati, felületi és vonali töltéssűrűség

   $$I = \oint_A \mathbf{J} d\mathbf{A} = -\frac{dQ}{dt}$$

   $$Q = \int_V \varrho dV = \int_A \sigma dA = \int_L q dl$$

2. Ismertesse az elektromágneses tér intenzitásvektorait és a köztük lévő kapcsolatot!

   E: elektromos térerősség

   B: mágneses indukció

   $\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$

3. Ismertesse az elektromágneses tér gerjesztettség vektorait és a köztük lévő kapcsolatot!

   D: villamos fluxussűrűség

   H: mágneses térerősség

   $$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}; \qquad \oint_A \mathbf{D} d\mathbf{A} = \int_V \varrho dV$$

   $$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B} \qquad \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_A \mathbf{J} d\mathbf{A}$$

4. Ismertesse az elektromágneses tér térjellemzőire vonatkozó folytonossági és peremfeltételeket!

   $\mathrm{div}\mathbf{J} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$ (töltésmegmaradás)

   $\mathbf{E}_{2t} - \mathbf{E}_{1t} = 0$

   $\mathbf{H}_{2t} - \mathbf{H}_{1t} = K$ (felületi áramsűrűség)

   $\mathbf{B}_{2n} - \mathbf{B}_{1n} = 0$

   $\mathbf{D}_{2n} - \mathbf{D}_{1n} = \sigma$ (felületi töltéssűrűség)

5. Ismertesse a Maxwell egyenletek integrális és differenciális alakjait!

   I. $\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_A \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) d\mathbf{A}$ $\qquad$ $\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$

   II. $\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{A}$ $\qquad$ $\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

   III. $\oint \mathbf{B} d\mathbf{A} = 0$ $\qquad$ $\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$

   IV. $\oint \mathbf{D} d\mathbf{A} = \int_V \varrho dV$ $\qquad$ $\mathrm{div}\mathbf{D} = \varrho$

   $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, $\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_b)$

6. Ismertesse az elektrodinamika felosztását!

   (a) időtől független $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$

   rot$\mathbf{E} = 0$ (II.) div$\mathbf{D} = \varrho$ (IV.) -elektrosztatika

   rot$\mathbf{H} = \mathbf{J}$ (I.) div$\mathbf{B} = 0$ (III.) -magnetosztatika

   (b) kvázistacionárius $\left(\left|\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right| \ll |\mathbf{J}|\right)$

   (c) időtől függő

7. Ismertesse az elektromágneses térben az energiasűrűségre és az energiaáramlásra vonatkozó összefüggéseket!

   Poynting-tétel: $-\left(\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) = \mathrm{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{EJ}$

   Energiasűrűség: $w = \frac{1}{2}\mathbf{ED} + \frac{1}{2}\mathbf{HB} = \frac{1}{2}\varepsilon\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2}\mu\mathbf{H}^2$

   Poynting-vektor: $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$

   Energiatétel: $-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \left(\frac{1}{2}\varepsilon\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2}\mu\mathbf{H}^2\right) dV = \int\limits_V \frac{\mathbf{J}^2}{\sigma} dV + \oint\limits_A (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d\mathbf{A} - \int\limits_V \mathbf{J}\mathbf{E}_b dV$

   (a közeg EM energiája csökken, mert: hővé válik, elsugároz, de növekszik, ha az áram a beiktatott tér irányába folyik)

8. Ismertesse az elektrosztatika Poisson egyenletét és megoldását!

   rot$\mathbf{E} = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{E} = -\mathrm{grad}\Phi$

   $\Delta\Phi = -\frac{\varrho}{\varepsilon}$

   $\Phi(p) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\limits_V \frac{\varrho(s)}{r_{p,s}} dV_s$ (a térfogatelemek pontszerű töltésként viselkednek)

9. Ismertesse az áramlási tér alapösszefüggéseit!

   Stacionárius áramlási tér: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

   rot$\mathbf{E} = 0$ (II.)

   div$\mathbf{J} = 0$ (I.)

   $\mathbf{J} = \sigma(E + E_b)$

   Az elektrosztatika és a stacionárius áramlási tér közötti analógiák:

elektrosztatika	stacionárius áram
$\mathbf{E}$	$\mathbf{E}$
$\mathbf{D}$	$\mathbf{J}$
ε	σ
Q	I
C	G

   Különbség: $\sigma = 0$ létezik (ideális szigetelő), de $\varepsilon = 0$ nem.

10. Ismertesse a elektrosztatika Laplace egyenletét és a peremfeltételeket!

    $\Delta\Phi = 0$

    Dirichlet-peremfeltétel: Φ adott

    Neumann-peremfeltétel: $\dfrac{\partial\Phi}{\partial n}$ adott

11. Ismertesse az elektrosztatikus feladatok megoldását a helyettesítő töltések módszerével!

    Ha egy töltéselrendezés ugyanazokat a peremfeltételeket biztosítja, mint az eredeti peremfeltételek, akkor a töltések által keltett tér is megegyezik az eredetivel. A fémfelületet alkalmasan választott töltések ekvipotenciális felületével helyettesítjük.

12. Ismertesse az elektrosztatikus feladatok megoldását az integrálegyenletek módszerével!

    Tekintsünk két ismert felületű $(A_1, \mathbf{A}_2)$, és potenciálú $(\Phi_1,\ \Phi_2)$, de ismeretlen töltéselrendezésű $(\sigma_1,\ \sigma_2)$ elektródát! σ_1 és σ_2 kielégítik az alábbi egyenleteket, ahol P és Q a két felület egy-egy tetszőleges pontja:

    $$\Phi_1 = \Phi(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\limits_{A_1}\frac{\sigma_1}{r_P}dA_1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\limits_{A_2}\frac{\sigma_2}{r_P}dA_2$$

    $$\Phi_2 = \Phi(Q) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\limits_{A_1}\frac{\sigma_1}{r_Q}dA_1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\limits_{A_2}\frac{\sigma_2}{r_Q}dA_2,$$ ahol r_P és r_Q az aktuális felületelem P-től, ill. Q-tól való távolsága

    Az egyenletek minden $P \in A_1$ és $Q \in A_2$ pontra teljesülnek, hiszen a potenciál a fém felületén állandó. Ha mindkét felületet véges részfelületre bontjuk, és ezeken a felületi töltéssűrűséget (σ) állandónak tekintjük, akkor az integrálok helyett szummát írhatunk, és az egyenletek numerikusan megoldhatók.

13. Ismertesse a véges differenciák módszerét!

    Ha $\varrho = 0$, akkor $\oint \mathbf{E}d\mathbf{A} = 0$ (IV.) A vizsgált (kétdimenziós) tartományt négyzetráccsal fedjük le, és a rácspontokban keressük a potenciált. Minden pontnál csak a négy szomszédját vesszük figyelembe, és feltesszük, hogy köztük az elektromos tér homogén. Minden rácspontra: $\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i-1,j} + \Phi_{i,j+1} + \Phi_{i,j-1} - 4\Phi_{i,j} = 0$, kivéve a perem azon pontjain, ahol Dirichlet-feltételt írtunk elő.

14. Ismertesse a részkapacitások fogalmát és meghatározásának módját!

    Több ismert töltésű elektróda esetén a potenciálok a töltéseknek lineáris függvényei: $\underline{\Phi} = \underline{\underline{p}} \cdot \underline{Q}$

    $$\begin{aligned}
    \Phi_1 &= p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 + \ldots + p_{1n}Q_n \\
    \Phi_2 &= p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 + \ldots + p_{2n}Q_n \\
    &\vdots \\
    \Phi_n &= p_{n1}Q_1 + p_{n2}Q_2 + \ldots + p_{nn}Q_n \qquad p_{ij} = p_{ji}
    \end{aligned}$$

    A töltésekre megoldva: $\underline{Q} = \underline{\underline{c}} \cdot \underline{\Phi}$

    $$\begin{aligned}
    Q_1 &= c_{11}\Phi_1 + c_{12}\Phi_2 + \ldots + c_{1n}\Phi_n \\
    Q_2 &= c_{21}\Phi_1 + c_{22}\Phi_2 + \ldots + c_{2n}\Phi_n \\
    &\vdots \\
    Q_n &= c_{n1}\Phi_1 + c_{n2}\Phi_2 + \ldots + c_{nn}\Phi_n \qquad c_{ij} = c_{ji}
    \end{aligned}$$

Ez a potenciálkülönbségekkel felírva: ($C_{i0} = c_{i1} + c_{i2} + \ldots + c_{in}$, $C_{ij} = -c_{ij}$)

$$Q_1 = C_{10}\Phi_1 + C_{11}(\Phi_1 - \Phi_1) + C_{12}(\Phi_1 - \Phi_2) + \ldots + C_{1n}(\Phi_1 - \Phi_n)$$
$$Q_2 = C_{20}\Phi_2 + C_{21}(\Phi_2 - \Phi_1) + C_{22}(\Phi_2 - \Phi_2) + \ldots + C_{2n}(\Phi_2 - \Phi_n)$$
$$\vdots$$
$$Q_n = C_{n0}\Phi_1 + C_{n1}(\Phi_n - \Phi_1) + C_{n2}(\Phi_n - \Phi_2) + \ldots + C_{nn}(\Phi_n - \Phi_n)$$

C_{i0}: földkapacitás, C_{ij}: főkapacitás, $C_{ij} = C_{ji}$

15. Ismertesse a stacionárius áram mágneses terére vonatkozó összefüggéseket, a vektorpotenciál bevezetését!

    Homogén közegben:

    rot$\mathbf{B} = \mu\mathbf{J}$, (I.)

    div$\mathbf{B} = 0$; $\Rightarrow$ $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$ ($\mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{A} + \text{grad}\psi)$, mert rot grad$\psi = 0$)

    Ha div$\mathbf{A} = 0$ (Coulomb-mérték), akkor rot$\mathbf{B}$ = rot rot$\mathbf{A}$ = grad div$\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A} = -\Delta\mathbf{A} = \mu\mathbf{J}$ (vektoriális Poisson-egyenlet)

    $$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int\limits_V \frac{\mathbf{J}}{r}dV$$

16. Ismertesse a Biot-Savart törvényt, az ön- és kölcsönös indukció együttható számítását!

    $$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi}\oint\limits_L \frac{d\mathbf{l}\times\mathbf{r}_0}{r^2}$$ ($\mathbf{r}_0$: r irányú egységvektor)

    Véges hosszú egyenes szakasz esetén $|\mathbf{H}| = \dfrac{I}{4\pi R}(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)$

    $$W_m = \frac{\mu}{8\pi}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{V_i}\int\limits_{V_j}\frac{\mathbf{J}_i\mathbf{J}_j}{r_{ij}}dV_i dV_j$$

    Önindukciós együttható: $L = \dfrac{\phi}{I}$

    Kölcsönös indukciós együttható: $L_{21} = \left.\dfrac{\phi_{21}}{I_1}\right|_{I_2=0}$, ahol $\phi_{21} = \displaystyle\int\limits_A \mathbf{B}_1 d\mathbf{A}_2$

    Kölcsönös indukció vonalas áramlás esetén (Neumann-képlet): $L_{ij} = \dfrac{\mu}{4\pi}\displaystyle\oint\limits_{L_i}\oint\limits_{L_j}\dfrac{d\mathbf{l}_j d\mathbf{l}_i}{r_{ij}} = L_{ji}$

17. Ismertesse a távíróegyenleteket és megoldásukat szinuszos gerjesztés esetén!

    $$-\frac{\partial u}{\partial x} = Ri + L\frac{\partial i}{\partial t} \;\rightarrow\; -\frac{dU}{dx} = (R + j\omega L)I = Z_s(j\omega)I$$
    $$-\frac{\partial i}{\partial x} = Gu + C\frac{\partial u}{\partial t} \;\rightarrow\; -\frac{dI}{dx} = (G + j\omega C)U = Y_p(j\omega)U$$
    $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (RC + LG)\frac{\partial u}{\partial t} + RGu \;\rightarrow\; \frac{d^2U}{dx^2} = \gamma^2 U$$
    $$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (RC + LG)\frac{\partial i}{\partial t} + RGi \;\rightarrow\; \frac{d^2I}{dx^2} = \gamma^2 I \qquad \text{(Helmholz-egyenletek)}$$

    Megoldásuk:

    $$U(x) = U_0^+ e^{-\gamma x} + U_0^- e^{+\gamma x}; \quad u(x,t) = u^+ + u^- = U_0^+ e^{j\omega t - \gamma x} + U_0^- e^{j\omega t + \gamma x}$$

$$I(x)=\frac{U_0^+}{Z_0}e^{-\gamma x}-\frac{U_0^-}{Z_0}e^{+\gamma x};\quad i(x,t)=i^++i^-=\frac{U_0^+}{Z_0}e^{j\omega t-\gamma x}-\frac{U_0^-}{Z_0}e^{j\omega t+\gamma x}$$

$$Z_0=\sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}};\quad \gamma=\sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)}=\alpha+j\beta;\quad v=\frac{\omega}{\beta};\quad \lambda_g=\frac{2\pi}{\beta}$$

18. Ismertesse a lezárt távvezetékeken a reflexió tényező, a bemeneti impedancia fogalmát!

$$r(z)=\frac{U_2^-}{U_2^+}e^{-2\gamma z}=\frac{U^-(z)}{U^+(z)}=\frac{Z(z)-Z_0}{Z(z)+Z_0}$$

$$Z_{be}=\frac{U_1}{I_1}=Z_0\frac{Z_2\cosh\gamma h+Z_0\sinh\gamma h}{Z_0\cosh\gamma h+Z_2\sinh\gamma h}$$

19. Ismertesse speciális lezárások esetén az ideális távvezetéken kialakuló áram- és feszültségviszonyokat, állóhullámokat!

$$U(z)=U_2^+\left(e^{+j\beta z}+r_2e^{-j\beta z}\right)$$

$$I(z)=\frac{U_2^+}{Z_0}\left(e^{+j\beta z}-r_2e^{-j\beta z}\right)$$

(a) hullámimpedanciával: $Z_2=Z_0;\ r_2=0;\ Z_1=Z_0$

(b) rövidzárral: $Z_2=0;\ r_2=-1;\ Z_1=Z_{be,rz}=jZ_0\tan\beta h$

$$u(z,t)=\mathrm{Re}\left\{2jU_2^+\sin\beta z e^{j\omega t}\right\}=2U_2^+\sin\beta z\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$i(z,t)=\mathrm{Re}\left\{2\frac{U_2^+}{Z_0}\cos\beta z e^{j\omega t}\right\}=2\frac{U_2^+}{Z_0}\cos\beta z\cos\left(\omega t\right)$$

(c) szakadással: $Z_2\to\infty;\ r_2\to+1;\ Z_1=Z_{be,sz}=-jZ_0\cot\beta h$

$$u(z,t)=\mathrm{Re}\left\{2U_2^+\cos\beta z e^{j\omega t}\right\}=2U_2^+\cos\beta z\cos\left(\omega t\right)$$

$$i(z,t)=\mathrm{Re}\left\{2j\frac{U_2^+}{Z_0}\sin\beta z e^{j\omega t}\right\}=2\frac{U_2^+}{Z_0}\sin\beta z\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$$

Ez utóbbi két esetben a feszültség és az áram két, egymáshoz képest időben negyedperiódussal, térben negyedhullámhosszal eltolt állóhullám.

20. Ismertesse az ideális távvezeték szakaszból készült rezgőrendszert és tulajdonságait!

Mindkét végén rövidrezárt távvezeték esetén állóhullám alakul ki, ha

$l=n\frac{\lambda_g}{2}$, ekkor $\lambda_g=\frac{2}{n}l$, $f=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}\frac{1}{\lambda_g}=\frac{n}{2}\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}\frac{1}{l}$

Egyik végén rövidrezárt, másik végén nyitott távvezeték esetén állóhullám alakul ki, ha

$l=(2n+1)\frac{\lambda_g}{4}$, ekkor $\lambda_g=\frac{4}{2n-1}l$, $f=\frac{2n-1}{4}\frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}\frac{1}{l}$

21. Ismertesse a síkhullámokra vonatkozó egyenleteket és tulajdonságait! Ismertesse a távvezeték analógiát!

$\mathbf{B}=\mathrm{rot}\mathbf{A}$ (III.)

$\mathrm{rot}\mathbf{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\mathbf{A}$ (II.) $\Rightarrow$ $\mathbf{E}=-\mathrm{grad}\Phi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$

$\frac{1}{\mu}\mathrm{rot\ rot}\mathbf{A}=\mathbf{J}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\mathrm{grad}\varphi-\frac{\partial A}{\partial t}\right)$ (I.)

Ha $\mathrm{div}\mathbf{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$ (Lorenz-mérték), akkor $\Delta\mathbf{A}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\mu\mathbf{J}$

$$\varepsilon \mathrm{div}\left(-\mathrm{grad}\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = \varrho \text{ (IV.)} \Rightarrow \Delta\Phi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\frac{\varrho}{\varepsilon}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

Ha $\varrho = 0$ és $\mathbf{E}_b = 0$, akkor szinuszos, ω körfrekvenciájú változás esetén

$\mathrm{rot}\mathbf{H} = (\sigma + j\omega\varepsilon)\,\mathbf{E}$, (I.) $\qquad \mathrm{div}\mathbf{H} = 0$ (III.)

$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$, (II.) $\qquad \mathrm{div}\mathbf{E} = 0$ (IV.)

A távvezeték-analógia: azonos alakú diffegyenletek, azonos peremfeltételek, analóg mértékegységek:

u	i	R	L	G	C
E_x	H_y	$\emptyset$	μ	σ	ε

22. Ismertesse a síkhullámok viselkedését ideális és veszteséges szigetelőben, a síkhullámok polarizációját!

    Ideális szigetelő: $\sigma = 0$

    $$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} \;\rightarrow\; Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = 377\ \Omega$$

    $\gamma = \sqrt{(j\omega\mu)(\sigma + j\omega\varepsilon)} \;\rightarrow\; \gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ (tiszta képzetes)

    Ha E_x és E_y is van: polarizáció (sík, kör, ellipszis, általános helyzetű ellipszis)

23. Ismertesse a síkhullámok viselkedését vezetőben, az áramkiszorítás jelenségét, váltakozó áramú ellenállás fogalmát!

    Jó vezető: $\sigma \gg \omega\varepsilon$. Ekkor $\gamma = (1+j)\sqrt{\pi f\mu\sigma} = \alpha + j\beta$

    Behatolási mélység: $\delta = \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi f \mu\sigma}}$

    $E_x(z) = E_x(0)e^{-\frac{z}{\delta}}$

    Váltóáramú ellenállás: $R_\sim = \dfrac{h}{b\delta\sigma}$ (h: hossz, b: szélesség v. kerület)

24. Ismertesse a Hertz dipólus elektromágneses terét!

    Hertz-dipólus: egy elemi sugárzó dipólus, melynek hossza rövid ($l \ll \lambda$), és az áram minden pontjában ugyanakkkora. Az elektromos és mágneses térerősséget gömbi koordinátákkal felírva:

    $$E_r = \frac{I_0 l}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{j}{\beta r^3}\right)\cos\vartheta e^{-j\beta r}$$

    $$E_\vartheta = \frac{I_0 l}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{j\beta}{r} + \frac{1}{r^2} - \frac{j}{\beta r^3}\right)\sin\vartheta e^{-j\beta r}$$

    $E_\varphi = 0$

    $H_r = 0$

    $H_\vartheta = 0$

    $$H_\varphi = \frac{I_0 l}{4\pi}\left(\frac{j\beta}{r} + \frac{1}{r^2}\right)\sin\vartheta e^{-j\beta r}$$

25. Ismertesse a Hertz dipólus távoli terét, az antenna jellemzőket!

(a) $\mathbf{E} \perp \mathbf{H} \perp \mathbf{v}$, mert $\mathbf{E} \parallel \mathbf{e}_\vartheta$, $\mathbf{H} \parallel \mathbf{e}_\varphi$ és $\mathbf{v} \parallel \mathbf{e_r}$

(b) $E_\vartheta = \frac{1}{2} I \frac{l}{\lambda} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cdot \frac{1}{r} \sin\vartheta$, és $H_\varphi = \frac{1}{2} I \frac{l}{\lambda} \cdot \frac{1}{r} \sin\vartheta$

(c) $\frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{H}|} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = Z_0$ valós

$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, itt $S = E_\vartheta H_\varphi$, S időátlaga: $\overline{S} = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{E_\vartheta H_\varphi^*\right\}$

$$P = \oint\limits_A \overline{S} dA = \frac{1}{2} 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 I^2 = \frac{1}{2} R_s I^2$$

Irányhatás: $D = \frac{S_{max}}{S_{atl}} = 1,5$

26. Ismertesse a TE módusú csőtápvonalra vonatkozó összefüggéseket, erővonalképet!

A z irányban terjedő hullám elektromos vektorpotenciálját ($\mathbf{Z}$) a következő alakban keressük:

$Z_x = 0, \quad Z_y = 0, \quad Z_z = F(x, y) e^{-\gamma z}$

Ebből $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + k^2 F = 0$. Ha $F(x, y) = X_x \cdot Y_y$, akkor

$F(x, y) = M \cos k_x x \cdot \cos k_y y$, ahol $k_x = \frac{m\pi}{a}$, $k_y = \frac{n\pi}{b}$, $m, n \in \mathbb{Z}^+$, de egyikük lehet 0.

$$E_x = -k_y M \cos k_x x \cdot \sin k_y y \cdot e^{-\gamma z}$$
$$E_y = k_x M \sin k_x x \cdot \cos k_y y \cdot e^{-\gamma z}$$
$$E_z = 0$$
$$H_x = j \frac{k_x \gamma}{\omega\mu} M \sin k_x x \cdot \cos k_y y \cdot e^{-\gamma z}$$
$$H_y = j \frac{k_y \gamma}{\omega\mu} M \cos k_x x \cdot \sin k_y y \cdot e^{-\gamma z}$$
$$H_x = j \frac{k_x^2 + k_y^2}{\omega\mu} M \cos k_x x \cdot \cos k_y y \cdot e^{-\gamma z}$$

27. Ismertesse a TM módusú csőtápvonalra vonatkozó összefüggéseket, erővonalképet!

A z irányban terjedő hullám mágneses vektorpotenciálját ($\mathbf{A}$) a következő alakban keressük:

$A_x = 0, \quad A_y = 0, \quad A_z = F(x, y) e^{-\gamma z}$

$F(x, y) = \mu M \sin k_x x \cdot \sin k_y y$, ahol $k_x = \frac{m\pi}{a}$, $k_y = \frac{n\pi}{b}$, $m, n \in \mathbb{Z}^+$

$$H_x = k_y M \sin k_x x \cdot \cos k_y y \cdot e^{-\gamma z}$$
$$H_y = -k_x M \cos k_x x \cdot \sin k_y y \cdot e^{-\gamma z}$$
$$H_z = 0$$
$$E_x = j \frac{k_x \gamma}{\omega\varepsilon} M \cos k_x x \cdot \sin k_y y \cdot e^{-\gamma z}$$
$$E_y = j \frac{k_y \gamma}{\omega\varepsilon} M \sin k_x x \cdot \cos k_y y \cdot e^{-\gamma z}$$
$$E_x = -j \frac{k_x^2 + k_y^2}{\omega\varepsilon} M \sin k_x x \cdot \sin k_y y \cdot e^{-\gamma z}$$

28. Ismertesse a csőtápvonalakban haladó hullám diszperziós egyenletét és a határhullámhossz fogalmát!

$$\gamma = \sqrt{k_{e,m}^2 - k_0^2} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\varepsilon\mu}$$

Határfrekvencia: $\omega_h^2\varepsilon\mu = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \; f_h = \frac{ck_{e,m}}{2\pi} = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$

Határhullámhossz: $\frac{\lambda_h}{2} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$

Fázissebesség: $v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_h}{\omega}\right)^2}}$

Csoportsebesség: $v_g = \left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega}\right)^{-1} = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_h}{\omega}\right)^2}$

$v_g \cdot v_f = c^2$