1.

Tétel:

S a koordinátarendszer síkja:

$P(x_0, y_0, z_0)$ az S sík egy pontja, $\underline{n}(a,b,c)$ pedig S egy normálvektora.

$Q(x,y,z)$ pont akkor van S síkban, ha

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$$

Biz:

$$Q \in S \iff \underline{n} \perp \overrightarrow{PQ} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \iff$$

$$0 = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) \iff ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$$

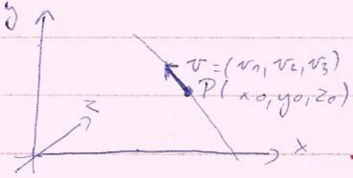
– Def: Az $\underline{n} = (a,b,c)$ normálvektorú $P(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő sík egyenlete:
$ax + by + cz = \text{konst.}$, ahol $\text{konst} = ax_0 + by_0 + cz_0$.

Egyenes egyenletrendszerei:

$P(x_0, y_0, z_0)$ a $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$$Q \in e \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}: \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \lambda \underline{v} \iff (x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(v_1, v_2, v_3)$$

$$x = x_0 + \lambda v_1$$
$$y = y_0 + \lambda v_2$$
$$z = z_0 + \lambda v_3$$



$$\lambda = \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

/ Ha egy koordinátája 0, pl. $v_3 = 0$ akkor $z = z_0$

Ha x tengellyel párhuzamos, akkor $\lambda = \frac{x - x_0}{v_1}$ $y = y_0$ és $z = z_0$ /

Def: A V halmazt $\mathbb{R}$ feletti vektortérnek mondjuk, ha

$(V, +)$ kommutatív csoport $\forall u, v, w \in V$-re igaz:

$$u + (v + w) = (u + v) + w$$

$$u + v = v + u$$

$$\underline{0} \in V: u + \underline{0} = u \qquad \underline{0} = \text{nullvektor}$$

$$u + (-u) = \underline{0}$$

skalárral való szorzásra $\forall \lambda, \kappa \in \mathbb{R}$, $\forall u, v \in V$

$$(\lambda + \kappa)u = \lambda u + \kappa u$$

$$\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$$

$$(\lambda \kappa)u = \lambda(\kappa u)$$

$$1 \cdot u = u$$

Példák:
- $\mathbb{R}$ (és minden test) vektortér önmaga felett
- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvények $\mathbb{R}$ felett vektorteret alkotnak
  $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ és $(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)$
  nullvektor a 0 leképezés, ellentett a (-1)-szerese

Köv. (1) $\lambda \cdot \underline{0} = \underline{0}$ Biz.: $\underline{0} = \underline{0} + \underline{0}$

$\lambda \cdot \underline{0} = \lambda(\underline{0}+\underline{0}) = \lambda\cdot\underline{0} + \lambda\cdot\underline{0} \quad | + -(\lambda\underline{0})$

$\underline{0} = -(\lambda\underline{0}) + \lambda\underline{0} = \lambda\cdot\underline{0}$

(2) $0 \cdot v = \underline{0}$

$0 = 0 + 0$

$0 \cdot v = (0+0)v = 0v + 0v \quad | -(0\cdot v)$

$\underline{0} = 0v$

(3) $(-1)v = -v$

$\underline{0} = 0v = (1-1v) = v + (-1)v \quad | -v$

$-v = -v + \underline{0} = -v + (v + (-1)v) = (-v+v) + (-1)v$

$-v = \underline{0} + (-1)v = (-1)v$

(4) $\lambda \cdot v = \underline{0}$ ha $\lambda = 0$ vagy $v = \underline{0}$

Tegyük fel hogy:

$\lambda \cdot v = \underline{0}$ és $\lambda \neq 0$

$\underline{0} = \frac{1}{\lambda}\underline{0} = \frac{1}{\lambda}(\lambda \cdot v) = (\frac{1}{\lambda}\lambda) v = v$

2.

Def: A $W \subseteq V$ részhalmaz a V valós vektortér altere, ha W is valós vektortér a V vektortér műveleteire. Jele: $W \leq V$

W altér ha $\Leftrightarrow$ (1) $u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$
(2) $v \in W \Rightarrow \lambda \cdot v \in W$ $\}$ $\forall u, v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Def: Legyen V valós vektortér. A $v_1, v_2 \dots v_n$ vektorok lineáris kombinációja a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$

generált altér = generátuma jele: $\langle u_1, u_2 \dots u_l \rangle$

Def: $v \in V$ vektort generálja a V vektortér U részhalmaza, ha v előáll U véges sok vektorának lineáris kombinációjából.

/ $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ /

$\langle U \rangle$ = U részhalmaz generálta vektorok halmaza

Def: U-t a W generátorrendszerének hívjuk, ha $U \subseteq V$ halmaz generálja a $W \leq V$ alteret, ha minden vektorát generálja, azaz ha $W \subseteq \langle U \rangle$, ezentúl $U \subseteq W$ is teljesül.

Lineáris függetlenség: $v_1, v_2, \dots v_n$ vektorrendszer lin. ftlen, ha csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő a $\underline{0}$-t

/ egyik v_i sem áll elő a maradék vektorok lineáris kombinációjából /

3.

Def: A $\{b_1, b_2 \dots b_n\}$ vektorrendszer a V vektortér <u>bázisa</u>, ha lin. ftlen és V generátorrendszere.

Tétel: A $\{b_1, b_2 \dots b_n\}$ pontosan akkor bázisa V-nek, ha $\forall v \in V$ egyértelműen áll elő a b_i-k lin. komb.-jaként.

Biz. Tegyük fel, hogy $\{b_1, b_2, \dots b_n\}$ bázis. V minden vektora előáll lin. komb.-ként, hisz a bázis generátorrendszer. Belátni: lin. komb. felírása egyértelmű

$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i = \sum_{i=1}^{n} K_i b_i$ két különböző felírás

$\underline{0} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - K_i) b_i$ b_i függetlensége miatt

$\lambda_i - K_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = K_1,\ \lambda_2 = K_2 \dots$

Tegyük fel V bármely eleme előállítható $b_1, b_2 \dots b_n$ lin. komb.-ként generátor rendszert alkotnak ✓ csak a lin. ftn-ségét kell bizonyítani: Ha lin. összefüggőek lennének az ellentmondás lenne $b_k = 1 \cdot b_k$

Def: A V vektortér <u>dimenziója</u> a V egy tetszőleges B bázisának elemszáma

<u>Kicserélési tétel</u>. Ha $F = \{f_1, f_2 \dots f_n\} \subseteq V$ ftn és $G = \{g_1, g_2 \dots g_k\} \subseteq V$ generálja V-t, akkor tetszőleges f_i-hez $(i = 1, 2 \dots n)$ létezik g_j $(j = 1, 2 \dots k)$ úgy, hogy $F \setminus \{f_i\} \cup \{g_j\}$ független.

<u>Biz</u> indirekten $\exists$ olyan f_i, amihez nem található g_j

pl.: g_1 sem jó $f_1 \dots f_{i-1}, f_{i+1} \dots f_k, g_1$ lin. öf.

$f_1 \dots f_{i-1}, f_{i+1} \dots f_k$ lin ftlen

$g_1 \in \langle f_1 \dots f_{i-1}, f_{i+1} \dots f_k \rangle$

g_2 — " — $\Rightarrow g_2 \in \langle f_1 \dots f_{i-1}, f_{i+1} \dots f_k \rangle$

$g_m \in \langle$ — " — $\rangle$

$f_1 \dots f_{i-1}, f_{i+1} \dots f_k$ generátor rendszer

$f_i \in \langle f_1 \dots f_{i-1}, f_{i+1}, \dots f_k \rangle$

$\lightning$ $f_1 \dots f_k$ lin. ftlen.

Köv.: Ha $f_1, f_2, \dots f_n$ lin. ftlen és $g_1, g_2 \dots g_k$ vektorok generálják V-t, akkor $n \leq k$

Biz. a becserélt g_j-k mindegyike különböző, hogy megtartsa F a függetlenségét

Köv.: Vektortér bármely két bázisa azonos elemszámú.

Biz.: B_1 és B_2 a V vektortér bázisai:

B_1 ftlen és B_2 generátorrendszer $\Rightarrow |B_1| \leq |B_2|$

megcserélve $|B_2| \leq |B_1|$

4.

Def.: <u>lépcsős alakúnak</u> nevezünk egy együttható mátrixot, ha
1) minden sorában az első nemnulla elem 1 (vezéregyes)
2) bmely vezéregyesre igaz, h tetszőleges felette álló sorban van a vizsgált vezéregyestől balra vezéregyes

Def: lépcsős alakban a vezéregyesek fölött is 0-k állnak, = <u>redukált lépcsős alak</u>
egyértelműen megoldható, ha csak 1 megoldása van
Azokat az ismeretleneket, melyekhez nincs az oszlopban vezéregyes, szabad paramétereknek nevezzük. Ha a kibővítő oszlopban van vezéregyes, tilos sornak nevezzük.

<u>Elemi sorekvivalens átalakításai:</u>
(1) Két sor felcserélése
(2) $\lambda \neq 0$ végigszorzása egy sornak
(3) 2 sor elemenkénti összeadása
(4) csupa 0 sor elhagyása

} lin. egyrsz. megoldáshalmaza nem változik

Gauss-elimináció:
1. Ha $M^1 = \underline{0}$ elhagyjuk
2. E'-jük el, hogy $M_1 = 1$ legyen
3. kinullázni az 1-es alatti elemeket
4. sor, oszl. elhagyása, G-e. a következő sorra

Lin. egyr. akkor oldható meg, ha a (redukált) lépcsős alakja nem tartalmaz tilos sort.
A szabad paraméterek értékének tetszőleges megválasztásához létezik egyértelmű megoldása.
Lin. egy. létezik és egy. megoldása van, ha legalább annyi egyenlet van mint ahány ismeretlen.

5.

permutáció: kölcsönös leképezés / függvény ami 1 és n között számok mindegyikéhez 1 és n közötti számot rendel úgy, hogy minden 1 és n közötti szám pontosan egy másik számhoz van hozzárendelve/

k, l elemek inverzióban állnak, ha $\sigma(k), \sigma(l)$ és k, l elemek nagyságrendje fordított
<u>inverziószám</u> az inverzióban álló számpárok száma

Def.: <u>determináns:</u> összes bástyaelhelyezés szerinti szorzatokat a megfelelő előjellel összeadni

A egy $n \times n$-es mátrix　　　　　　Biz

(1) $\det(A) = \det(A^T)$　　　a szorzatok és az irányok is maradnak (főátlóra tükröz)

(2) A felső△mátrix, $\det(A)$ = főátló elemeinek szorzata

(3) A egy oszlopa/sora csupa $\cdot 0$　$\det(A) = 0$

(4) ——— " ——— -t λ-val szorozva a determináns is λ szorosa lesz (szorzatból kiemel-hetünk λ-t)

(5) sor/oszlop felcserélése a det (-1)-szerese lesz　(minden sorban megváltozik a paritás)

(6) A két sora/oszlopa =, a $\det(A) = 0$　((5)-ös)

(7) A egy sorának λ-szorosát hozzáadjuk egy másik sorhoz, $\det(A)$ nem változik

<u>Kifejtési tétel:</u>

Tetszőleges i, j esetén teljesül, hogy

i sor szerinti kifejtés $\leftarrow$ $\det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + A_{in} \cdot A_{in}$

j oszlop szerinti kifejtés $\leftarrow$ $\det A = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \ldots + a_{nj} \cdot A_{nj}$

<u>Áldetermináns:</u>

pl.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \cancel{4} & \cancel{5} & \cancel{6} \\ \cancel{7} & 8 & 9 \end{pmatrix}$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} = -1 \cdot (-6) = \underline{\underline{6}}$

Def: Ha $A, B \in \mathbb{R}^{\overset{\text{sor}}{n} \times \overset{\text{oszlop}}{k}}$, akkor <u>összeadhatóak</u>, ami elemenkénti összeadást jelent

$(A+B)_i^j = A_i^j + B_i^j$　　　$A+B = B+A$ kommutatív,　$(A+B)+C = A+(B+C)$ asszociatív

Def: $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ és $B \in \mathbb{R}^{k \times l}$ <u>összeszorozhatóak</u>　$A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times l}$　sorvektorok oszlopvektorok skalárisan

általában nem igaz $A \cdot B = B \cdot A$

$A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$　és $(A+B)C = AC + BC$　és $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

és $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$

<u>Determináns szorzástétele:</u>　$A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$　　　de! $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

6.

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

(1) $(A \mid \underline{0})$ lin. egy. rsz. egyértelműen megoldható

(2) $A \cdot x = \underline{0}$ „mátrixegyenlet" egyértelműen megoldható

(3) $\begin{pmatrix} \text{———} \\ a_n \ldots a_n \end{pmatrix}$ A oszlopai lin. ftlenek. egyértelmű megoldás $\rightarrow$ $\det A \neq 0$　　A^T

(4) $\det(A) \neq 0$

(5) A sorai lin. ftlenek $\Leftrightarrow$ A^T oszlopai lin. ftl. $\Leftrightarrow$ $\det A^T \neq 0 \Leftrightarrow \det A \neq 0$

Lin. egy. leírása mtx-al:　$A \in \mathbb{R}^{k \times n}$

1) $(A \mid b)$ kibővített együtthatómx-nak egyértelmű megoldása van
2) Egyértelműen létezik $x \in \mathbb{R}^n$, amire $Ax = b$
3) $b \in \langle A^1, \ldots A^n \rangle$ és $\langle A^1 \ldots A^n \rangle$ lin. függetlenek
4) $\dim\langle A^1, \ldots A^n, b \rangle = \dim\langle A^1 \ldots A^n \rangle = n$
5) $r(A) = r(A \mid b) = n$

Def: B^n egy $n\times n$-es mátrix az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix **balinverze**, ha $B\cdot A = I_n$

$A \cdot J = I_n$ $\qquad$ I_n = egységmátrix $\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}$

~~Ha~~ $B = B\cdot I_n = B\cdot(AJ) = (BA)J = I_n J = J$

Def: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ A-nak az $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mx **inverze**, ha $A\cdot X = E = X\cdot A$

Jele: $X = A^{-1}$ $\qquad$ $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 1$

Biz: $A\cdot x = E$ / det

$\det(A\cdot x) = \det E$

$\underbrace{\det A}_{\substack{\Downarrow \\ \det A \neq 0}} \cdot \det X = 1$

$$\left(A \,\middle|\, \begin{matrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{matrix}\right) \Rightarrow \text{Gauss-elimináció sorokon} \left(\underbrace{\begin{matrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{matrix}}_{\det(A)\neq 0} \,\middle|\, \overset{\substack{X \\ \|}}{A^{-1}}\right)$$

7.

Def: A **oszloprangja/sorrangja** r, ha A oszlopai/sorai közül kiválasztható r db úgy, hogy ezek lin. fgtlenek, de $(r+1)$ már nem. Jele $s(A)$ / $\sigma(A)$

Def: A **determinánsrangja** r, ha A-ból választható $r\times r$-es nemnulla determinánsú négyzetes részmátrix, de $(r+1)\times(r+1)$-es nem. Jele: $d(A)$

Tétel: $\sigma(A) = s(A) = d(A) = r(A)$ $\qquad$!

Biz: $s(A) = \sigma(A^T) = d(A^T) = d(A) = \sigma(A)$

1) négyzetes mátrixoknál $\det(A) = \det(A^T)$

2) $s(A) = d(A)$ mert $\sigma(A) = \dim\langle A^1, A^2 \dots\rangle = \dim\langle (A^T)_1, (A^T)_2 \dots\rangle = s(A^T) = d(A^T) = d(A) = s(A)$

3) $r(A) \to$ vezéregyesek száma, $o(A) \geq r$ vezéregyest tartalmazó oszlopok

$o(A) = r \Leftarrow o(A) \leq r$ $\mathbb{R}^r$-ben nincs r-nél több lin. ftlen oszlopvektor

$r(A)$ meghatározása: Gauss-elim., RLA-kon vezéregyesek száma

$A \xrightarrow[\text{átalakítások/ESA}]{\text{elemi sorekvivalens}} A'$ $\Rightarrow$ $A'_1, A'_2 \in \langle A_1, A_2 \dots\rangle$ $\quad \langle A'\rangle \leq \langle A\rangle$

/előáll lin. komb-ként/ $\quad A_1, A_2 \in \langle A'_1, A'_2 \dots\rangle$ $\quad \langle A\rangle \leq \langle A'\rangle$

$\Rightarrow \langle A\rangle = \langle A'\rangle$ és $s(A') = s(A)$

/ $r(A) = \dim\langle a_1, a_2 \dots a_n\rangle$ /

Def: ~~Ha $A: U \to V$~~ U, V valós vektorterek között ható $A: U \to V$ függvény egy **lin. leképezés**, ha

① $A(u+v) = A(u) + A(v)$ $\qquad \forall u, v \in U$

② $A(\lambda u) = \lambda A(u)$ $\qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in U$

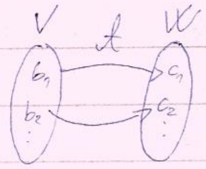
lineáris transzformáció: azonos terek között ható lineáris leképezés

Tul.: $A(\underline{0}) = \underline{0}$ ($\underline{0}$ ∈ U, $\underline{0}$ ∈ V)   Biz: $A(\underline{0}) = A(\underline{0}+\underline{0}) = A(\underline{0}) + A(\underline{0})$
$\underline{0} = A(\underline{0})$

Példák: síkvektoron az x tengelyre vetítés
— " — origó körüli nyújtva forgatás

8.

Def: $A: V \to W$ lin. leképezés



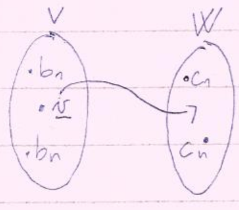
$B = \{b_1, b_2 \dots b_n\}$ bázis V-ben
$C = \{c_1, c_2 \dots c_m\}$ bázis W-ben

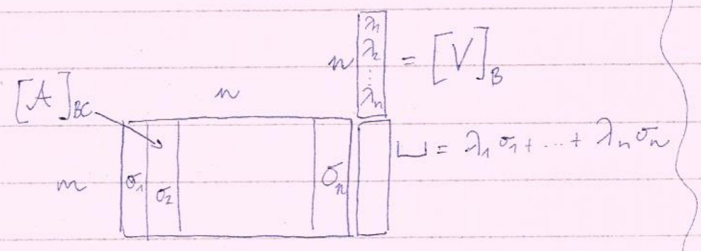
A lin. lek. mx-a a B, C bázisok szerint az az $(m \times n)$-es mx, aminek i. oszlopa $[A(b_i)]_C$ $A(b_1) = 2c_1 + (-7c_2) + \dots + \pi c_m$

$[A]_{BC}$ i. oszlopa: $[A(b_i)]_C$

Tétel: $A: V \to W$ lin. lek.
$B = \{\ \}$, $C = \{\ \}$ $[A]_{BC}$ $[A(v)]_C = [A]_{BC} \cdot [v]_B$ nem kell

Biz.



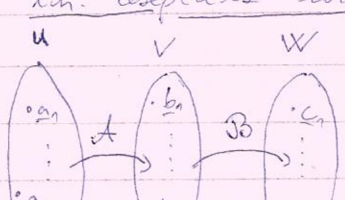


$[v]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ $\underline{v} = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$

$[A(\underline{v})]_C = [A(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n)] = \dots = \dots = [\lambda_1 A(b_1) + \lambda_2 A(b_2) + \dots + \lambda_n A(b_n)]_C =$

$= [\lambda_1 A(b_1)]_C + [\lambda_2 A(b_2)]_C + \dots + [\lambda_n A(b_n)]_C = \lambda_1 \underbrace{[A(b_1)]_C}_{\sigma_1} + \dots + \lambda_n \underbrace{[A(b_n)]_C}_{\sigma_n}$

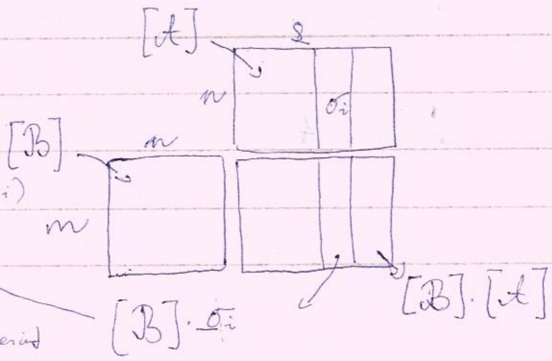
Tétel: lin. leképezések szorzata / egymás után alkalmazzuk azokat /



$A: U \to V$, $B: V \to W$ } lin. lek.

U-ban bázis $A = \{a_1, \dots a_k\}$ ...

$[B \circ A]_{AC} = [B]_{BC} \cdot [A]_{AB}$



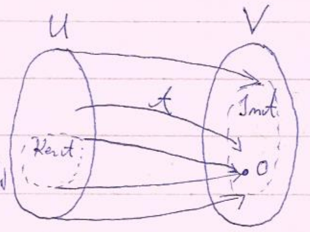
$[B]_{BC} \cdot \underline{\sigma_i} = [B]_{BC} \cdot [A(a_i)]_B$ $\underline{v} = A(a_i)$

|| Tétel

$[B(A(a_i))]_C = \underbrace{[(B \circ A)(a_i)]_C}_{[B \circ A]_{AC} \text{ i. oszlopa def. szerint}}$

A lineáris leképezést egyértelműen meghatározzák a báziselemek képei.
Pontosabban: Ha U és V valós vektorterek, az $u_1, u_2 \dots u_n$ vektorok az U bázisát alkotják és $v_1, v_2 \dots v_n$ tetszőleges V-beli vektorok, akkor pontosan egy olyan $\mathcal{A} \in Hom(U,V)$ lineáris leképezés létezik, amire $\mathcal{A}(u_i) = v_i \ \forall i$.

9.



Def: $\mathcal{A}: U \to V$ lineáris leképezés

<u>magtere</u>: $Ker\mathcal{A} := \{u \in U : \mathcal{A}(u) = \underline{0}\}$ U-beli vektorok amik a nullvektorba képződnek

<u>képtere</u>: $Im\mathcal{A} := \{\mathcal{A}(u) : u \in U\}$ előállnak U-beli vektor képeként

<u>Példák</u>: x tengelyre vetítésnél képtér az x, magtér az y tengely
origón áthaladó tengelyre tükrözésnél a képtér a teljes sík, magtér pedig az origót tart.

<u>Dimenziótétel</u>: $\dim Im\mathcal{A} + \dim Ker\mathcal{A} = \dim U$ $\qquad U \to V$

$\dim U$ véges

Biz: $B' := \{b_1, b_2 \dots b_k\}$ a $Ker\mathcal{A}$ vektortér egy bázisa
B' független az U vektortérben $\to$ U bázisa $B = \{b_1, b_2 \dots b_k, b_{k+1}, \dots b_n\}$
$\dim Ker\mathcal{A} = k$ és $\dim U = n$
igazolni: $\dim Im\mathcal{A} = n-k$
megmutatni: $\mathcal{A}(b_{k+1}), \mathcal{A}(b_{k+2}) \dots \mathcal{A}(b_n)$ vektorok az $Im\mathcal{A}$ tér egy bázisa
ezek a vektorok generálnak minden $Im\mathcal{A}$-beli vektort + ftlenek?
$\mathcal{A}(u)$ a képtér egy tetszőleges vektora
$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$ $\quad u$ előállítása B bázisban
$\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathcal{A}(b_i) = \sum_{i=k+1}^n \lambda_i \mathcal{A}(b_i)$
mert $\mathcal{A}(b_1) = \mathcal{A}(b_2) = \dots = \mathcal{A}(b_k) = \underline{0}$ $\quad \Rightarrow$ generátorrendszer
$u := \sum_{i=k+1}^n \lambda_i b_i \in Ker\mathcal{A}$
$u = \sum_{i=1}^k \mu_i b_i = \sum_{i=k+1}^n \lambda_i b_i$
$\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \dots = \lambda_n = 0$ $\quad \Rightarrow$ a rendszer ftlen $\Rightarrow$ $Im\mathcal{A}$ tér bázisa

10.

$\mathcal{A}: V \to V$ <u>lin. transzformáció</u> $\qquad \mathcal{A}(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{v}$

$\underline{v} \neq \underline{0}$ <u>sajátvektora</u> $\mathcal{A}$-nak, ha $\mathcal{A}(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{v}$ (valamilyen $\lambda \in \mathbb{R}$-re)

$\lambda \in \mathbb{R}$ <u>sajátértéke</u> $\mathcal{A}$-nak, ha $\mathcal{A}(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{v}$ valamilyen $\underline{v} \neq \underline{0}$-ra

Def: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v \in \mathbb{R}^n$ egy oszlopvektor, és $\lambda \in \mathbb{R}$ egy skalár. A $\underline{v}$ az A mx λ sajátértékhez tartozó sajátvektorának mondjuk, ha $\underline{v} \neq \underline{0}$ és $A \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}$

8: Lineáris leképezések szorzata:

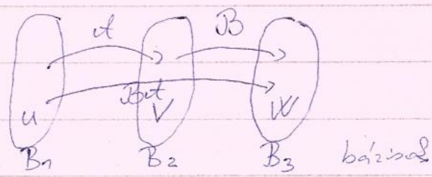
Tn) $\mathcal{A} \in Hom(U,V)$, $\mathcal{B} \in Hom(V,W)$ $\quad \mathcal{B}\cdot\mathcal{A} : U \to W$

$(\mathcal{B}\mathcal{A})(u) := \mathcal{B}(\mathcal{A}(u)) \quad \forall u \in U$ (egymás után alkalmazzuk azokat)

lineáris leképezés szorzata is lineáris leképezés

lineáris leképezések szorzatának mátrixa azonos a leképezések mátrixainak szorzatával.

Biz: Ha $u, v \in U$ és $\lambda \in \mathbb{R}$



$(\mathcal{B}\mathcal{A})(u+v) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(u+v)) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(u) + \mathcal{A}(v)) =$

$= \mathcal{B}(\mathcal{A}(u)) + \mathcal{B}(\mathcal{A}(v)) = (\mathcal{B}\mathcal{A})u + (\mathcal{B}\mathcal{A})(v)$

$(\mathcal{B}\mathcal{A})(\lambda u) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\lambda u)) = \mathcal{B}(\lambda \mathcal{A}(u)) = \lambda \mathcal{B}(\mathcal{A}(u)) = \lambda(\mathcal{B}\mathcal{A})(u)$

$[\mathcal{B}\mathcal{A}]^{B_1}_{B_3}$ j. oszlopa $\quad B_1$ bázisbeli b_j vektor képének B_3 szerinti koordinátavektora

$(\mathcal{B}\mathcal{A})(b_j) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(b_j))$

$$[\mathcal{B}\mathcal{A}]^{B_1}_{B_3} = [\mathcal{B}]^{B_2}_{B_3} \cdot [\mathcal{A}]^{B_1}_{B_2}$$

Tétel: $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \lambda$ s.é.-e M-nek $\iff M - \lambda E$ $\quad \lambda E = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$

$\det(M - \lambda E) = 0$

Biz: $\exists \underline{v} \neq \underline{0} : \quad M\cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}$

$M \cdot \underline{v} = (\lambda \cdot E)\cdot \underline{v}$

$\exists \underline{v} \neq 0 : (M - \lambda E)\cdot \underline{v} = 0 \longrightarrow \left(M - \lambda E \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right)$ $\quad Ax = b \iff (A|b)$

(∞ sok megoldás) $\iff \neq 0$ megoldás

$\det(M - \lambda E) = 0$

Pl.:

$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 7 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (3-\lambda)(4-\lambda) - 0\cdot 7 = 0$

$\lambda = 3$ vagy $\lambda = 4$

11.

$\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $\qquad i^2 = -1$

$z = \underbrace{a}_{Re(z)} + \underbrace{b\cdot i}_{Im(z)}$

$Re(z)$ valós rész, $Im(z)$ képzetes rész

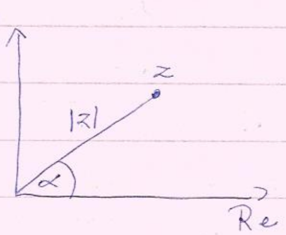
Alapműveletek: $z = a + b\cdot i \qquad w = c + d\cdot i$

$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a+c) + (b+d)i$

$z - w = (a + bi) - (c + di) = (a-c) + (b-d)i$

$z \cdot w = (a + bi)\cdot(c + di) = ac + adi + bci + bd\underbrace{i^2}_{-1} = (ac - bd) + (ad + bc)i$

$$\frac{z}{w} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \cdot i$$



Hossz $|z|$ a z komplex szám távolsága az origótól

$$z = |z| \cdot (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$$
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Def: $z = a + bi$ konjugáltja: $\overline{z} = a - bi$

$$|z|^2 = z \cdot \overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$$

Műveletek trigonometrikus alakban: $z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ $w = s(\cos\mu + i \cdot \sin\mu)$

$$z \cdot w = r \cdot s \cdot (\cos(\varphi+\mu) + i \cdot \sin(\varphi+\mu))$$
$$\frac{z}{w} = \frac{r}{s} \cdot [\cos(\varphi+\mu) - i \cdot \sin(\varphi+\mu)]$$
$$z^n = r^n [\cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi)]$$

pl.: $(\sqrt{3} - i)^{300} = \left[2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{5\pi}{6}\right)\right]^{300} = 2^{300}\left(\underbrace{\cos 250\pi}_{1} + i \cdot \underbrace{\sin 250\pi}_{0}\right) = 2^{300}$

n-edik gyökvonás:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)\right] \qquad k = 0,1,2 \ldots n-1$$

Pl.: $\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1}\left[\cos\left(\frac{0}{3} + k\frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{0}{3} + k\frac{2\pi}{3}\right)\right] \qquad k = 0,1,2$

$$1 \cdot (\cos 0 + i \cdot \sin 0) = 1$$
$$1 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$
$$1 \cdot \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

n-edik egységgyökök: $\sqrt[n]{1}$

$$\cos\left(k\frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(k\frac{2\pi}{n}\right) \qquad k = 0 \ldots n-1$$

12.

ismétlés nélküli variáció: $V(n,k) = n \cdot (n-1) \ldots (n-k+1)$ Hány befutó?

faktoriális: $n!$ permutáció / sorbarendezés

ismétléses variáció n^k

ismétléses permutáció: $\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \ldots}$

kombináció: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ pl: lottóhúzás $C(n,k)$

Egyszerű összefüggések:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Pascal △

0\. sor $\binom{0}{0}$ 1

1\. sor $\binom{1}{0}\binom{1}{1}$ 1 1

2\. sor $\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$ 1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

Binomiális tétel

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

Biz:

$$(a+b)^6 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$$

$$\underbrace{\binom{6}{2}}a^2b^4$$

↳ ahányféle képpen 6 zárójelből 2 választható (amiből "a"-t választok)

$G = (V, E)$ egyszerű gráf ha $V \neq \emptyset$ és $E \subseteq \binom{V}{2} := \{\{u,v\} : u,v \in V, u \neq v\}$

E elemei bizonyos kételemű részhalmazai

V(E) élek

V(G) csúcsok

hurokél: 2 végpontja megegyezik

G gráf ∀ v csúcsának foka a v végpontú élek száma.

Ha G véges, a fokszámösszeg az élszám kétszerese

teljes gráf: bármely 2 pont össze van kötve (egyszer)

G gráf részgráfja egy olyan gráf, melynek csúcs és élhalmazai részhalmazai G-nek.

H részgráf feszített részgráfja G-nek, ha vesszük G bizonyos szögpontjait és minden köztük futó élt. / H bmely 2 csúcsára igaz, hogyha szomszédosak H-ban, szomszédosak G-ben/

13.

G₁ és G₂ gráfok izomorfak

kölcsönösen egyértelmű megfelelés a pontok között, úgy, hogy tetsz. $u, v \in V(G_1)$ esetén u-ból pontosan annyi él vezet v-be, G_1-ben, mint $\varphi(u)$-ból $\varphi(v)$-be G_2-ben.

G gráf összefüggő, ha bmely 2 pontja között vezet séta.

séta: élsorozat, minden éle különböző

körséta: séta, kiindulópont = végpont

út: séta, csúcsai különbözőek

kör: út, csak a kezdő és végpontja egyezik meg

komponens: ekvivalenciareláció ekvivalenciaosztálya

$K \subseteq V(G)$ a G gráf komponense, ha bmely $u, v \in K$ között létezik G séta, de nem létezik $u-v$ séta ha $u \in K$, $v \in V(G) \setminus K$

erdő: G gráf körmentes
fa: összefüggő és erdő

Egyszerű tulajdonságok: G egy n pontú, körmentes gráf akkor öfüggő, ha $n-1$ éle van
G bármely élét elhagyva szétesik
új élt behúzva kör keletkezik

minden legalább 2 pontú F fának van legalább 2 levele

feszítőfa: olyan F részgráf, amire F fa és $V(G) = V(F)$
öf. gráf részgráfja, ami fa, ezek feszítőfák.
1. G összefüggő
2. G körmentes
3. G-nek $n-1$ éle van

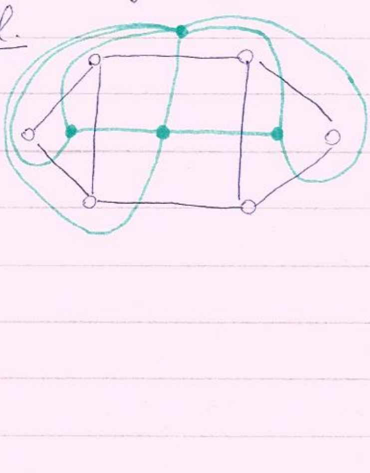
14.

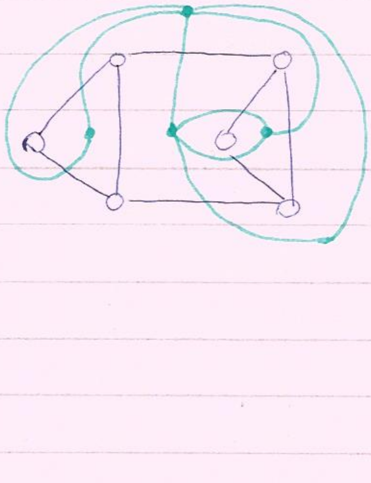
síkbarajzolás: síkot tartományokra osztja
Tétel: G gráf pontosan akkor síkbarajzolható, ha gömbre rajzolható

Euler formula: Ha egy összefüggő, n-pontú e-élű gráf t tartománnyal síkbarajzolható, akkor $n+t = e+2$
Biz. Ha G öf., akkor $k=1$ $\quad n+t = e+k+1 = e+1+1 = e+2$

Kuratowski-tétel: A G gráf pontosan akkor síkbarajzolható, ha nem tartalmaz sem $K_{3,3}$-mal, sem K_5-tel topologikusan izomorf részgráfot.
Biz. ha G sr, akkor minden H részgráfja sr. Ha H sr és K topologikusan izomorf H-val, akkor K is sr. Így $K=K_5$ ill $K=K_{3,3}$ nem lehetséges, ha G sr volt.

Legyen $G=(V,E)$ síkbarajzolt gráf, legyen V^* G lapjainak halmaza.
$G^* = (V^*, E^*)$ a G duálisa, ahol $E^* = \{e^* : e \in E\}$ és e^* az e-t határoló tartományokat összekötő él
Pl.

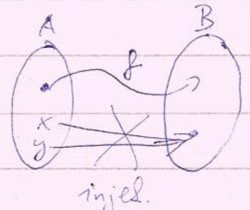




15.

Def: A, B halmazok <u>egyenlő számosságúak</u>, ha $\exists f: A \to B$ kölcsönösen egyértelmű fv. Jele $|A| = |B|$

Ha $\exists\ A \to B$ injekció, akkor $|A| \leq |B|$



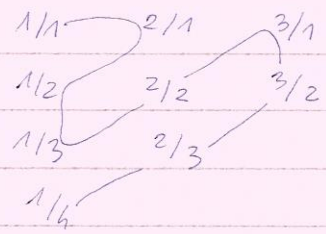
<u>Cantor – Bernstein tétel:</u> Ha $|A| \leq |B|$ és $|B| \leq |A|$ akkor $|A| = |B|$

Def: A számossága kisebb, mint B számossága / $|A| < |B|$ / ha $|A| \leq |B|$ és $|A| \neq |B|$

$$\begin{array}{l} \mathbb{N}: 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4 \ \dots \\ \quad\ \ \updownarrow\ \ \updownarrow\ \ \updownarrow\ \ \ \updownarrow\ \ \ \updownarrow \\ \mathbb{Z}\ \ \ 0\ \ 1\ \ {-1}\ \ 2\ \ {-2}\ \dots \end{array} \qquad |\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$$

Def: A halmaz <u>megszámlálhatóan végtelen</u>, ha $|A| = |\mathbb{N}|$ Jele: $|A| = \aleph_0$
„sorozatba rendezhető"

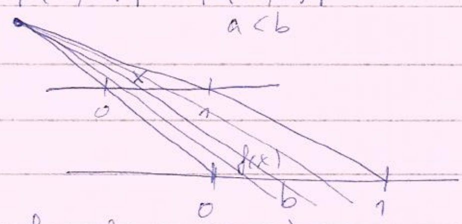
$|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$ Biz.:



$|\mathbb{R}| \neq |\mathbb{N}|$ $\qquad \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q} \mid \mathbb{R}$

Def: A halmaz <u>kontinuum számosságú</u>, ha $|A| = |\mathbb{R}|$ jele $|A| = c$

Pl. $|(0,1)| = |(a,b)|$ $a < b$



f: $f(x) = (b-a)x + a$

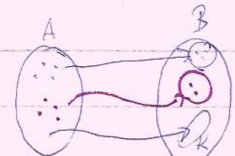
<u>Cantor tétele:</u> $|A| < |P(A)|$

Hatványhalmaz $P(A) = \{ H \text{ halmaz} : H \subseteq A \}$

$A = \{1,2,3\}$ $\quad P(A) = \underbrace{\{ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \dots \{2,3\}, \dots \{1,2,3\} \}}_{8 \text{ elem}}$

$|A| \leq |P(A)|$: $f: A \to P(A)$, $x \to \{x\}$ $\quad\mid\quad$ $|A| \neq |P(A)|$
indirekt: tfh $\exists f: A \to P(A)$ kölcs. egyért.

$x \in A$: x kék ha $x \notin f(x) \subseteq A$
x piros, ha $x \in f(x) \subseteq A$



$K = \{ x \in A : x \text{ kék} \}$

$K \subseteq A$, $K \in P(A) \Rightarrow \exists k \in A: f(k) = K$

→ k kék $\Rightarrow k \notin f(k) \Rightarrow k \notin K$ ↯ k „hiányzik"

→ k piros $\Rightarrow k \in f(k) \Rightarrow k \in K$ ↯ k „feleslegesen" K-ban

$|P(\mathbb{N})| = |\{0,1 \text{ sorozatok}\}| = |\mathbb{R}| = c$; $P(\mathbb{N})$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$\{2,4,15\}$	0	0	1	0	1	0	0	0			...
{prímek}	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	...
{páros}	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	...

$\aleph \Rightarrow |P(\mathbb{N})| = |\{0,1 \text{ sorozatok}\}|$

Biz: $|\{0,1 \text{ sorozatok}\}| \leq |(0,1)|$ $f: \{0,1 \text{ sor}\} \to (0,1)$ inj.

0, 011101

$|(0,1)| \leq |\{0,1 \text{ sorozatok}\}|$ $g: (0,1) \to \{0,1\}$ inv. lató

$x = 0,271$