Indoklás nélküli eredményközlést nem fogadunk el, a dolgozat időtartama 90 perc.

1. *(12 pont)* Oldja meg az $y' + y = 2e^{3t}$, $y'(0) = -1$ kezdeti érték problémát Laplace-transzformációval!

2. *(12 pont)* Oldja meg az $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$ differenciálegyenletet!

3. *(12 pont)* Számítsa ki a $v(x, y, z) = (x, xy, xyz)$ vektorfüggvény görbementi integrálját arra a zárt görbére, amelyet az xy-síkbeli $y = x^2$ parabola $(0, 0, 0)$ és $(1, 1, 0)$ közötti íve, majd az ehhez hozzáfűzött $(1, 1, 0)$-től $(0, 0, 0)$-ig menő egyenes szakasz alkot!

4. *(12 pont)* Számítsa ki a $v(x, y, z) = (xz + y, yz + x^2, 2z^2)$ vektormező felületi integrálját az $x^2 + y^2 = z$ egyenletű paraboloid és a $z = 1$ sík által határolt zárt felületre, kifelé irányított normálvektorral!

5. *(4+4+4 pont)* **(a)** Potenciálos-e a $v(x, y) = (3x^2y^2 + e^y, xe^y + 2x^3y + 4y)$ vektormező? Ha igen, határozza meg a potenciálfüggvényét!

(b) Igazak-e az alábbi állítások? (Válaszát indokolja!)

(b1) Ha $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ kétszer folytonosan differenciálható, akkor $\nabla \cdot (\nabla f) = 0$.

(b2) Ha $u : \mathbf{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbf{R}, r \mapsto \frac{1}{|r|}$, akkor $\nabla u(r) = -\frac{r}{|r|^3}$.

iMSc feladat. *(10 pont)* Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható függvény. Fejezze ki az $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, r \mapsto \Delta(f(|r|)|r|^2)$ függvényt az f első és második deriváltjával, ahol $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ a Laplace-operátor! Vizsgálja meg a problémát a 0-ban is!

—

1. MO. $sY - y(0) + Y = \frac{2}{s-3} \rightsquigarrow Y = \frac{y(0)}{s+1} + \frac{2}{(s-3)(s+1)} = \frac{y(0)}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-3} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} \rightsquigarrow y(t) = (y(0) - \frac{1}{2})e^{-t} - \frac{1}{2}e^{3t}$. Ha $y'(0) = -1$, akkor a differenciálegyenletet $x = 0$-ra felírva: $-1 + y(0) = 2 \rightsquigarrow y(0) = 3$, tehát: $y(t) = \frac{5}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{3t}$.

2. MO. $u = y/x$-szel ($y' = u'x + u$). $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0 \rightsquigarrow 1 + u^2 - 2u(u'x + u) = 0 \rightsquigarrow 1 - u^2 = 2uxu'$. $u = \pm 1$ konstans megoldások. Szeparálva: $\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{2u}{1-u^2}du \rightsquigarrow \ln|x| + C = -\ln|1 - u^2|$. Innen $y = \pm x$ és $\ln|x| + C = -\ln|1 - y^2/x^2|$.

3. MO. Legyen a görbe ∂T, amit körülhatárol az xy síkban T. Stokes-tétellel. $\operatorname{rot} v(x, y, z) = (xz, -yz, y)$, a felületre merőleges komponens: y.

$$\int_{\partial T} v\, dr = \int_T \operatorname{rot} v\, df = \int_{x=0}^{1} \int_{y=x^2}^{x} y\, dydx = \int_0^1 \left[y^2/2\right]_{y=x^2}^{x} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 - x^4 dx = \frac{1}{2}\left[x^3/3 - x^5/5\right]_0^1 = \frac{1}{15}.$$

4. MO. Legyen a tartomány V, a határa pedig ∂V. Gauss-tétellel. $\operatorname{div} v = 6z$.

$$\int_{\partial V} v\, df = \int_V \operatorname{div} v\, dV = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \int_{z=r^2}^{1} 6zr\, dzdrd\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} [3z^2r]_{z=r^2}^{1} drd\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} 3r - 3r^5 drd\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[3\frac{r^2}{2} - \frac{r^6}{2}\right]_0^1 d\varphi = 2\pi.$$

5. MO. **(a)** $\operatorname{rot} v = \partial_x v_2 - \partial_y v_1 = 0$, tehát potenciálos. $u(x, y) = \int 3x^2y^2 + e^y\, dx + C(y) = x^3y^2 + xe^y + C(y)$. $\partial_y u(x, y) = 2x^3y + xe^y + C'(y) = xe^y + 2x^3y + 4y$, ahonnan $C(y) = 2y^2$, tehát $u(x, y) = x^3y^2 + xe^y + 2y^2 + c$.

(b1) Hamis, $f(x, y) = x^2$ Laplace-a $\nabla \cdot \nabla x^2 = 2 \neq 0$.

(b2) Igaz. Az összetett függvény deriválási szabálya miatt: $\nabla|r|^{-1} = -1 \cdot |r|^{-2} \cdot \frac{r}{|r|} = -r|r|^{-3}$.

iMSc. MO. $r \neq 0$-ban: $\nabla(f(|r|)|r|^2) = f'(|r|)r|r| + 2f(|r|)r = r(f'(|r|)|r| + 2f(|r|))$. Világos, hogy $f(|r|)|r|^2$ gradiense a 0-ban pedig nulla (definíció szerint kiszámítva). Megint $r \neq 0$ esetén:

$$\begin{aligned}\nabla r(f'(|r|)|r| + 2f(|r|)) &= 3(f'(|r|)|r| + 2f(|r|)) + r(f''(|r|)\frac{r}{|r|}|r| + f'(|r|)\frac{r}{|r|} + 2f'(|r|)\frac{r}{|r|}) \\ &= 3f'(|r|)|r| + 6f(|r|) + f''(|r|)|r|^2 + f'(|r|)|r| + 2f'(|r|)|r| \\ &= f''(|r|)|r|^2 + 6f'(|r|)|r| + 6f(|r|).\end{aligned}$$

Az origóban pedig nem mindig létezik Laplace-a, pl. $f(x) \equiv 1$ esetén nem.