AN(2)V 06.06.08.

1) Feladat (15 pont).

(1) Milyen alakú megoldása létezik az n-ismeretlenes, elsőrendű, homogén lineáris, konstans együtthatós differenciálegyenlet rendszernek ?
6p Állítását bizonyítsa be!
(A sajátérték, sajátvektor fogalmát is adja meg!).

(2) Határozza meg az alábbi differenciálegyenlet rendszer általános megoldását:
9p

$$\frac{dx}{dt} = -x + y\,, \qquad \frac{dy}{dt} = 16x - y$$

Ⓣ Ha λ sajátértéke $\underline{\underline{A}}$-nak és $\underline{s}$ egy a λ-hoz tartozó sajátvektor ($\underline{\underline{A}}\,\underline{s} = \lambda\,\underline{s}$), akkor 1

$\underline{x} = e^{\lambda t}\underline{s}$ 1 megoldása az $\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}$ (H) 1 differenciálegyenlet-rendszernek.

Ⓑ

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t}s_1 \\ e^{\lambda t}s_2 \\ \vdots \\ e^{\lambda t}s_n \end{bmatrix}^{\bullet} = \begin{bmatrix} \lambda e^{\lambda t}s_1 \\ \lambda e^{\lambda t}s_2 \\ \vdots \\ \lambda e^{\lambda t}s_n \end{bmatrix} = \lambda e^{\lambda t}\underline{s} = e^{\lambda t}\boxed{\lambda \underline{s}} = e^{\lambda t}\boxed{\underline{\underline{A}}\,\underline{s}} = \underline{\underline{A}}e^{\lambda t}\underline{s} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}$$ 1 1 1

$\dot{x} = -x + y$ $\qquad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 16 & -1 \end{bmatrix}$ $\qquad |\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 16 & -1-\lambda \end{vmatrix}$

$\dot{y} = 16x - y$

$(1+\lambda)^2 - 16 = 0$, 2 $\quad 1+\lambda = \pm 4 \quad \lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = -5$ 1

$(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}})\underline{s} = \underline{0}$ 1 $\quad \lambda_1 = 3 \quad \begin{matrix} -4s_1 + s_2 = 0 \\ 16s_1 - 4s_2 = 0 \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow \underline{s}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ 2

$\lambda_2 = -5 \quad \begin{matrix} 4s_1 + s_2 = 0 \\ 16s_1 + 4s_2 = 0 \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow \underline{s}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ 1

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_1 e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + c_2 e^{-5t}\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$ 2

AN(2)V.06.06.08.

2) Feladat (08 pont).

Teljes indukcióval igazolja, hogy az alábbi rekurzív egyenlőtlenség megoldásai O(n) nagyságrendűek:

$$f(n) \le 2f(n/3) + O(n)$$

$(f(n) \ge 0,\ f(1), f(2)$ adott, $f(x)$ lineáris interpolációval definiált.)

$f(n) \le 2 f\left(\frac{n}{3}\right) + Cn$, 1 $\quad C > 0$ adott.

Be kell látni, hogy $f(n) \le Kn$, $\forall n$ 1
$\exists K > 0$.

(i) $\begin{matrix} f(1) \le K \\ f(2) \le 2K \end{matrix}\Big\}$ kell, hogy fennálljon. 2

(ii) Tegyük fel, hogy $f(m) \le Km$ 2
$\forall\ m < n$, $m, n \in \mathbb{N}$

$\Downarrow$

(iii) $f(n) \le 2 f\left(\frac{n}{3}\right) + Cn \underset{\text{indukciós feltevés}}{\le} 2K\frac{n}{3} + Cn$ 2

$\le Kn$ 1, ha $C \le \frac{K}{3}$ 1

Tehát $K \ge C \cdot 3$ és $\left\{\begin{matrix} K \ge f(1) \\ K \ge 2f(2) \end{matrix}\right\}$ feltételeknek megfelelő $K > 0$-val a teljes indukciós bizonyítás elkezdhető és befejezhető, tehát

$f(n) \le Kn \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

AN(2)V. 06.06.08.

3) Feladat (15 pont).

Mit mondhatunk egy hatványsor alakban adott függvény Taylor soráról? (Milyen kapcsolat van egy analitikus függvény és Taylor sorának az együtthatói között?) Állítását bizonyítsa be!

Írja fel az

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorát és annak konvergencia sugarát! Indokoljon!

Ha $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ (2), $\forall x \in (x_0-R, x_0+R)$

akkor $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ (1), $k = 0, 1, 2, \dots$

(3) Tehát hatványsor Taylor sora önmaga. $\Rightarrow |x|<1$ (1)
$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^k + \dots$ f-nek a Taylor sora.

$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$

$f(x_0) = a_0$ (1)

$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \dots$ (1)

(T) Hatványsor összegének deriváltja tagonkénti deriválással kapható (2)

$f'(x_0) = a_1$ (1)

$f''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2\cdot a_3(x-x_0) + 4\cdot 3 a_4 (x-x_0)^2 + \dots$ (1)

$f''(x_0) = 2a_2$ (1) ... stb. $\overset{T.I.}{\Rightarrow} f^{(k)}(x_0) = k!\, a_k$ (1)

Tehát $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

AN(2)V. 06.06.08.

4) Feladat (22 pont).

$$f(x,y) = \arctan\frac{y}{x}, \qquad x_0 = 1,\ y_0 = -1$$

$\boxed{12}$ (1) Hol differenciálható az f függvény?
Írja fel az f függvény $P(x_0, y_0)$-hoz tartozó érintősíkjának az egyenletét!

(2) Mely irányban maximális az f függvény P-beli iránymenti deriváltja? Mennyi ez a maximális iránymenti derivált?

(3) Legyen

$$g(t) = f(x(t), y(t)),\ \text{ahol } x(t) = t^2 + t + e^t,\ y(t) = t^5 + t^4 - t - 1$$

$$g'(0) = ?$$

(1) $\boxed{12}$

$f'_x = \dfrac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\dfrac{-y}{x^2}\right) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$ (2), $f'_x(P) = \frac{1}{2}$ (1)

$f'_y = \dfrac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{x}{x} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ (2), $f'_y(P) = \frac{1}{2}$ (1)

Mivel f'_x és f'_y folytonos, ha $x \neq 0$ (1) (a fv is értelmezett)
$\Rightarrow f$ diffható, ha $x \neq 0$. (2)

$f'_x(P)(x-x_0) + f'_y(P)(y-y_0) - (z-z_0) = 0$ (1)

$z_0 = \mathrm{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ (1)

$\frac{1}{2}(x-x_0) + \frac{1}{2}(y-y_0) - (z+\frac{\pi}{4}) = 0$ (1)

AN(2)V. 06.06.08.

(4) folytatása.

(2) Az iránymenti derivált $\underline{e} \parallel \operatorname{grad} f|_P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \parallel (1, 1)$ (1)
$\boxed{4}$ irányban a legnagyobb és értéke $|\operatorname{grad} f|_P| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) (1)

(3) $\dot{g}(t) = f'_x(x(t), y(t)) \cdot \dot{x}(t) + f'_y(x(t), y(t)) \cdot \dot{y}(t)$ (2)

$\boxed{6}$ $t=0 \quad x(0)=1, \quad y(0)=-1$ (1), $\quad \dot{x}(t) = 2t+1+e^t, \quad \dot{x}(0)=2$ (1)

$\dot{y}(t) = 5t^4+4t^3-1, \quad \dot{y}(0) = -1$ (1)

$\dot{g}(0) = f'_x(P) \cdot \dot{x}(0) + f'_y(P)\dot{y}(0) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2}(-1) = \frac{1}{2}$ (1)

AN(2)V.06.06.08.

***6) Feladat (10 pont).**

Számolja ki az alábbi nevezetes integrált:

$$\oint_{|z-z_0|=R} \frac{1}{z-z_0}\, dz$$

$$\int_{A\,\ell}^{B} f(z)\,dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t))\,\dot{z}(t)\,dt, \quad (2) \qquad a = z_0$$

L: $z(t) = a + re^{jt}$ $(= (a_1 + r\cos t) + j(a_2 + r\sin t))$; (2) $\quad \dot{z}(t) = jre^{jt}$ (1)

$$\oint_L \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + re^{jt} - a}\, jre^{jt}\, dt = \int_0^{2\pi} j\, dt = 2\pi j$$ (1) (2) (1) (1)

***5) Feladat (15 pont).**

(1) Számolja ki az alábbi improprius integrált:

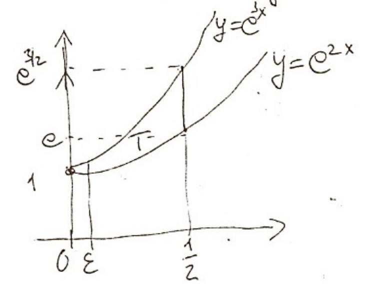
$$\int_0^{1/2} \int_{e^{2x}}^{e^{3x}} \frac{e^{4x}}{xy}\, dy\, dx = ?$$

(2) Cserélje fel az integrálás sorrendjét:

$$\int_0^{1/2} \int_{e^{2x}}^{e^{3x}} f(x,y)\, dy\, dx$$

ahol $f(x,y)$ mindenütt folytonos függvény.

$$\int_0^{1/2} \int_{e^{2x}}^{e^{3x}} \frac{e^{4x}}{xy}\, dy\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^{1/2} \int_{e^{2x}}^{e^{3x}} \frac{e^{4x}}{xy}\, dy\, dx =$$ (1) (1)



$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^{1/2} \frac{e^{4x}}{x} \left[\ln y\right]_{y=e^{2x}}^{y=e^{3x}} dx =$$ (2)

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^{1/2} \frac{e^{4x}}{x} \left(\underbrace{\ln e^{3x} - \ln e^{2x}}_{3x-2x}\right) dx =$$ (1)

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^{1/2} e^{4x}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{4}\left[e^{4x}\right]_\varepsilon^{1/2} =$$ (1)

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}e^{4\varepsilon} = \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}$$ (1) (1)

$$I = \int_1^e \int_{\frac{\ln y}{3}}^{\frac{\ln y}{2}} f(x,y)\, dx\, dy + \int_e^{e^{3/2}} \int_{\frac{\ln y}{3}}^{\frac{1}{2}} f(x,y)\, dx\, dy$$ (1) (2) (1) (1) (1) (1) (1)

AN(2) V. 06.06.08.

***7) Feladat (15 pont).**

(2) (1) Írja le a Cauchy integrál formulát!

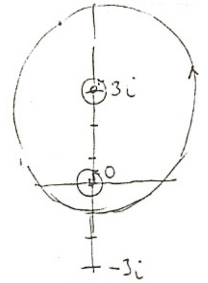
(13) (2) Határozza meg a

$$\oint_{|z-3i|=4} \frac{\sin(z-i)}{(z^2+9)z}\,dz = ?$$

integrált, ahol a görbét pozitív irányban egyszer járjuk körbe!

(T) (2)

> Ha f reguláris az egyszeresen összefüggő T tartományon, akkor minden T-beli egyszerű zárt görbére:
>
> $$\oint_L f(z)\,dz = 0 \qquad (\neg B)$$



$$I = \oint_{|z-3i|=\frac{1}{10}} f(z)\,dz + \oint_{|z|=\frac{1}{10}} f(z)\,dz = \text{(2)}$$

$$= \oint_{|z-3i|=\frac{1}{10}} \frac{\overbrace{\frac{\sin(z-i)}{(z+3i)z}}^{\text{reg}}}{z-3i}\,dz \;\text{(2)}\; + \oint \frac{\overbrace{\frac{\sin(z-i)}{z^2+9}}^{\text{reg.}}}{z}\,dz \;\text{(1)}$$

Szing: $3i, -3i, 0$.
$0, 3i$ esik a tartományba.
(1)

$$= 2\pi i \left.\frac{\sin(z-i)}{z(z+3i)}\right|_{z=3i} \text{(2)} + 2\pi i \left.\frac{\sin(z-i)}{z^2+9}\right|_{z=0} \text{(1)}$$

$$I = 2\pi i\left(\frac{\sin 2i}{3i\cdot 6i} + \frac{\sin(-i)}{9}\right) \text{(1)} = 2\pi i\left(\frac{i\,\mathrm{sh}\,2}{-18} + \frac{i\,\mathrm{sh}(-1)}{9}\right) \text{(2)}$$

$$\frac{\pi\,\mathrm{sh}\,2}{9} + \frac{2\pi\,\mathrm{sh}\,1}{9} \quad \text{(1)}$$

AN(2)V.06.06.08

***8) Feladat (10 pont).**

Hol differenciálható és hol reguláris az $f(z) = e^{\bar{z}z}$ függvény?

$f(z) = e^{x^2+y^2}$, $\quad \mathrm{Re}\, f(z) = u(x,y) = e^{x^2+y^2}$ (1)

$\mathrm{Im}\, f(z) = v(x,y) = 0$ (1)

$u'_x = 2x\cdot e^{x^2+y^2} \qquad u'_y = 2y\,e^{x^2+y^2}$ (1)

$v'_x = 0 \qquad v'_y = 0$

Az u és v parciális deriváltjai folytonosak $\Rightarrow$
u és v tot. diffható. (2)
C-R d.e.r. $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v_x$ (2) $\Big\} \Rightarrow f$ diffható.

$2x\,e^{x^2+y^2} = 0 \Rightarrow x = 0$
$2y\,e^{x^2+y^2} = 0 \Rightarrow y = 0$ $\Big\} \Rightarrow (0,0)$-ban f diffható (2)

másutt nem diffható $\Rightarrow (0,0)$-ban nem reguláris (1)