2023. jan 11. vizsga mo

2023. január 13., péntek 11:10

1) Az M1 autópálya szélén hetente átlagosan két elhagyatott autót találnak. A talált autók felén már nincsenek rajta a kerekek. Mi a valószínűsége, hogy

a január első hetében egy kocsit sem találtak, akkor a második héten sem fognak? (3p)

b az idén elsőnek megtalált kerék nélküli autóra több, mint 8 napot kellett várni? (3p)

c a mai nap végéig bezárólag (jan. 11) több, mint 4 kocsit találtak? (3p)

d nem lesz meg a 6. kocsi még januárban? (3p)

a.) $X \sim \text{Poisson}(2)$ $\quad t = 1$

Az első és a második hét független egymástól

$$P(X=0) = \frac{(2\cdot 1)^0}{0!} e^{-2\cdot 1} = \underline{\underline{e^{-2}}}$$

(Felfoghatod exponenciálisnak is.)

b.) $Y \sim \text{Exp}(1)$ (heti 1 kerék nélküli $\Rightarrow \lambda = 1$)

$$P\left(Y > \frac{8}{7}\right) = 1 - \left(1 - e^{-8/7}\right) = e^{-8/7}$$

c.) $X \sim \text{Poisson}(2)$ $\quad t = \frac{11}{7}$

$$P(X > 4) = 1 - \sum_{0}^{4} e^{-\frac{2\cdot 11}{7}} \cdot \frac{\left(\frac{22}{7}\right)^k}{k!}$$

d) Nem lesz meg a 6. kocsi: 0, 1, 2, 3, 4, 5 db kocsi januárban

$X \sim \text{Poisson}(2)$ $\quad t = \frac{31}{7}$

$$P(X \le 5) = \sum_{k=0}^{5} e^{-\frac{62}{7}} \cdot \frac{\left(\frac{62}{7}\right)^k}{k!}$$

(Felfoghatod Erlangnak is.)

2) A BME-n bevett gyakorlat, hogy kisebb termet adnak, mint ahányan az előadásra jelentkeznek, azzal számolva, hogy maximum az emberek 75%-a fog bejárni. Tegyük fel, hogy ez olyannyira igaz, hogy minden egyes embernél (egymástól függetlenül) 0,75 az esélye, hogy bemegy az előadásra. Ekkor ha 400 embernél 300 fős termet adnak, akkor mi a valószínűsége, hogy kicsi lesz a terem?

a Mi a bent lévők eloszlása? Add meg az eloszlás nevét és paramétereit, írd fel formulával a megoldást! (4p)

b Közelítsd a megfelelő eloszlással az eredményt, itt is add meg a nevet, paramétereket és a végeredményt. (5p)

a) $X \sim \text{Binom}(n = 400,\ p = 0{,}75)$

$E(X) = 400 \cdot 0{,}75 = 300$

$D(X) = \sqrt{400 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25} = 5\sqrt{3}$

$$P(X > 300) = \sum_{k=301}^{400} \binom{400}{k} \cdot 0{,}75^{k} \cdot 0{,}25^{400-k}$$

FOLYTONOSSÁGI KORREKCIÓ

b) $P(X > 300) \sim P(W > 300{,}5) = P\left(Z > \frac{300{,}5 - 300}{5\sqrt{3}}\right) =$

$= 1 - \Phi(0{,}0577) = 0{,}4769$

3) A legújabb statisztikák alapján a cégek 2%-a megy csődbe egy éven belül. Matematikusok kifejlesztettek egy modellt, ami bizonyos adatok alapján előrejelzi, hogy egy cég csődbe megy-e. Ha egy cég ténylegesen egy éven belül csődbe ment, a modell az esetek 90%-ában előrejelezte. Ha a cég nem ment csődbe egy éven belül, a modell 5%-ban mégis úgy jelezte, hogy csődbe megy.

a Mi a valószínűsége, hogy csődöt jelez a modell? (3p)

b Mi a valószínűsége, hogy ha a mi cégünknél csődöt jelzett, akkor tényleg csődbe megyünk egy éven belül? (3p)

c Tegyük fel, hogy sok cégre alkalmazzák (egymástól függetlenül) a modellt. Mi a valószínűsége, hogy a 3. lesz az első olyan, amelyiknél csődöt jelez a modell? És annak, hogy a k.? Add meg az eloszlás nevét is! (4p)

$P(\text{csődbe megy}) = 0{,}02$ $\quad P(\text{csődöt jelez} \mid \text{csődbe megy}) = 0{,}9$

$P(\text{csődöt jelez} \mid \overline{\text{csődbe megy}}) = 0{,}05$

a) $P(\text{csődöt jelez}) = 0{,}02 \cdot 0{,}9 + 0{,}05 \cdot 0{,}98 = 0{,}067$

TELJES VSZSÉG

b)

$$P(\text{csődbe megy} \mid \text{csődöt jelez}) = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}02}{0{,}067}$$

BAYES

c.) GEOMETRIAI $(p = 0{,}067)$

$$(1-0{,}067)^2 \cdot 0{,}067$$

$$(1-0{,}067)^{k-1} \cdot 0{,}067$$

4) Az E épületben a következő hőmérsékleteket mértük (különböző napokon): 15°,16°, 17°, 16°,18°, a hőmérséklet eloszlását normálisnak tekintjük. Adj 95% megbízhatóságú konfidenciaintervallumot az átlaghőmérsékletre, ha

a a szórás ismert, 2 C° (4p)

b a szórás ismeretlen (4p)

c A vezetőség állítja, hogy az átlaghőmérséklet az E-ben pontosan 18 fok. Vizsgáld meg ezt a hipotézist 5% szignifikanciaszinten abban az esetben, ha tudjuk a szórást! Add meg a mintánkhoz tartozó p-értéket. (6p)

$\bar{X} = 16{,}4$ $\quad z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$ $\quad t_{\frac{\alpha}{2},4} = 2{,}776$ $\quad s^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}} = 1{,}14$

a.) $$\left(\bar{X} - \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot 6}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot 6}{\sqrt{n}}\right) = (14{,}647\ ;\ 18{,}153)$$

b.) $$\left(\bar{X} - \frac{t_{\frac{\alpha}{2}}\cdot s^*}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + \frac{t_{\frac{\alpha}{2}}\cdot s^*}{\sqrt{n}}\right) = (14{,}98\ ;\ 17{,}81)$$

c.) $H_0:\ \mu = 18\,°C$ $\quad$ elfogadjuk a H_0-t mert benne van a konfidenciaintervallumban

p-érték: $$\frac{|(18-16{,}4)|\cdot\sqrt{5}}{2} = 1{,}789$$

$$2(1-\Phi(1{,}789)) = 0{,}073 > 0{,}05$$

5) Legyen X, Y együttes sűrűségfüggvénye $f(x,y) = c \cdot x^2 y$ a $0 < x < 1$, és $0 < y < \sqrt{1-x}$ tartományon (és nulla egyébként).

a Számold ki COV(X,Y)-t! (14p)

b Független-e X és Y? (Indokolj!) (1p)

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x}} c x^2 y \, dy \, dx = c \cdot \int_0^1 \left[x^2 \cdot \frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{1-x}} dx = c \cdot \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{8} \right]_0^1 = 1 \Rightarrow c = 24$$

$$f_1(x) = \int_0^{\sqrt{1-x}} 24 x^2 y \, dy = 12 x^2 (1-x) \qquad E(X) = \int_0^1 12x^3(1-x)\, dx = \left[3x^4 - \frac{12x^5}{5} \right]_0^1 = 0{,}6$$

$$f_2(y) = \int_0^{1-y^2} 24 x^2 y \, dx = 8 y (1-y^2)^3 \qquad E(Y) = \int_0^1 8y^2(1-y^2)^3 \, dy =$$

$$= \int_0^1 8y^2 - 24y^4 + 24y^6 - 8y^8 \, dy = 8 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} - \frac{1}{9} \right) = \frac{128}{315}$$

így volt érdemes paraméterezni

$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^{1-y^2} 24 x^2 y \cdot x \cdot y \, dx \, dy = \int_0^1 6y^2 \left[x^4 \right]_0^{1-y^2} dy = \int_0^1 6y^2 (1-y^2)^4 \, dy =$$

$$= \int_0^1 6y^2 (1 - 4y^2 + 6y^4 - 4y^6 + y^8) \, dy = 6 \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{5} + \frac{6}{7} - \frac{4}{9} + \frac{1}{11} \right) = \frac{256}{1155} \approx 0{,}22$$

$$\mathrm{COV}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{256}{1155} - \frac{3}{5} \cdot \frac{128}{315} \approx -0{,}022$$

Nem függetlenek.