

A Számítástudomány alapjai

2. pótZH javítókulcs (2015. 12. 07.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.

Természetesen az ismertettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, rész-megoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

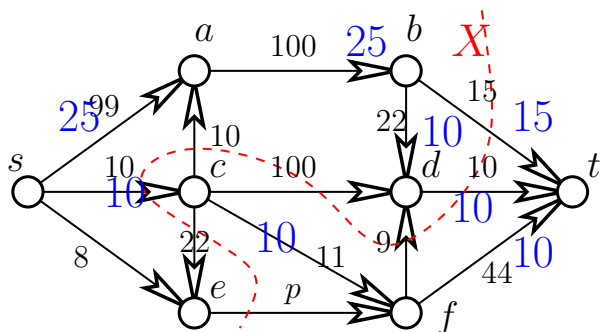
- Legyenek a G gráf csúcsai a kocka csúcsai, és két csúc között pontosan akkor fusson él, ha e két csúc a kocka ugyanazon élének végpontjai. Határozzuk meg a G gráf komplementerének kromatikus számát, $\chi(\overline{G})$ -t.

A \overline{G} gráf kiszínezhető 4 színnel, pl. úgy, hogy a kocka felső lapjának csúcsait 4 különböző színre színezzük, és az alsó lap minden csúcsának a felette levő csúc színét adjuk. (3 pont)

Másrészt 4 szín feltétlenül szükséges \overline{G} színezéséhez, hiszen G egy olyan páros gráf, aminek mindkét színosztályában 4 – 4 csúc van (a színosztályok csúcsai egy-egy szabályos tetraédert alkotnak), és G egy színosztálya a komplementerben klikk, tehát már egy színosztály négy csúcsának kiszínezéséhez is legalább 4 szín szükséges. (5 pont)

Azt kaptuk, hogy 4 szín elegendő, de 3 nem, tehát $\chi(\overline{G}) = 4$. (2 pont)

- Határozzuk meg a fenti hálózatban az ef él p kapacitásának összes olyan értékét, amire a maximális st -folyam nagyság pontosan 42.



Először $p = 0$ -ra kerestünk maximális folyamot az órán tanult növelő utas algoritmussal. Az ábrán látható, 35 nagyságú folyamot kaptuk, ahol a késsel írt nagyobb számok az adott élen folyó folyam-mennyiséget jelzik. (Amelyik élen nincs ilyen szám, ott 0 folyam folyik.) (3 pont)

A segédgráfban elérhető pontox X halmaza olyan st -vágást indukál az *eredeti* hálózatban, amelynek kapacitása $c(X) = 35 + p$. (2 pont)

Mivel egy 42 nagyságú st -folyamhoz az szükséges, hogy minden st -vágás kapacitása legalább 42 legyen, ezért ilyenkor $p \geq 7$. (2 pont)

Ha $p = 7$, akkor az ábrán látható folyam még növelhető 7-tel a *seft* úton javítva, tehát $p = 7$ esetén a maximális folyam nagyság az X által indukált 42 kapacitású vágás miatt pontosan 42. (1 pont)

Ha azonban $p > 7$, akkor az említett *seft* úton 7-nél több folyam is küldhető, így a maximális folyam nagyság 42-nél bizonyosan nagyobb lesz. (1 pont)

A válasz tehát az, hogy kizárólag $p = 7$ esetén lesz a maximális st -folyam nagyság pontosan 42. (1 pont)

- Tegyük fel, hogy $G = (A, B; E)$ egyszerű, páros gráf A színosztályában 99 csúc van, ezek bármelyikének a fokszáma legalább 33, de A -ban van 66 olyan csúc, amelyek bármelyikének foka legalább 66. Sőt, A tartalmaz 33 olyan csúcsot is, amelyek mindegyikéből legalább 99 él indul. Mutassuk meg, hogy G -nek van A -t fedő párosítása.

A Hall-tétel szerint G -nek pontosan akkor van A -t lefedő párosítás, ha a Hall-feltétel teljesül az A színosztályra, azaz ha $|N(X)| \geq |X|$ áll az A minden X részhalmazára. (3 pont)

Ezt kell tehát ellenőriznünk. Ha $1 \leq |X| \leq 33$, akkor X tetszőleges pontjának van 33 szomszédja, tehát $|N(X)| \geq 33 \geq |X|$. (2 pont)

Ha $33 < |X| \leq 66$, akkor X tartalmazza a 66 db legalább 66-fokú pont valamelyikét, ezért $|N(X)| \geq 66 \geq |X|$. (2 pont)

Ha pedig $X > 66$, akkor X tartalmazza a 99 pontú A színosztály 33 db legalább 99 fokú csúcsának egyikét, azaz $|N(X)| \geq 99 \geq |A| \geq |X|$. (2 pont)

A Hall-feltételt tehát minden esetben teljesül, így G -nek bizonyosan van A -t fedő párosítása. (1 pont)

4. Tegyük fel, hogy G olyan összefüggő, síkbarajzolt gráf, amelynek 14 tartománya van, minden csúcsának fokszáma 3 vagy 6, és a harmadfokú csúcsok száma kétszerese a hatodfokúakénak. Hány csúcsa és hány éle van G -nek?

Legyen n_3 ill. n_6 a G gráf harmad- ill. hatodfokú csúcsainak száma. Ekkor a szokásos jelölésekkel $n = n_3 + n_6$, (1 pont)

az feladatbeli feltétel miatt $n_3 = 2 \cdot n_6$ és $t = 14$, (1 pont)

az Euler-formulából pedig $n + t = e + 2$, hiszen G öf és SR. (2 pont)

A fokszámösszegekről tanultak szerint $2e = 3n_3 + 6n_6$, (1 pont)

és az így kapott öt egyenletből már meg tudjuk határozni az öt ismeretlent. Pl. $2e = 3n_3 + 6n_6 = 6n_6 + 6n_6$, azaz $e = 6n_6$. Ezt az Euler formulába behelyettesítve $3n_6 + 14 = 6n_6 + 2$, azaz $3n_6 = 12$, vagyis $n_6 = 4$. Innen $n_3 = 2n_6 = 8$ és $e = 6n_6 = 24$ adódik. (4 pont)

A feladat kérdésére a válasz tehát $n = n_3 + n_6 = 12$, $e = 24$. (1 pont)

Szükségtelen annak a kérdésnek a vizsgálata, hogy valóban létezik-e a feladatban megkívánt tulajdonságokkal rendelkező gráf, hiszen éppen azt igazoltuk, hogy ha van olyan gráf, aminek létezését a feladat állítja, akkor n és e csak a megoldásban kapott értéket veheti fel. Egyébként van ilyen gráf, és ez mutatja azt is, hogy korrekt érveléssel nem kaphatunk más választ. (Ha ugyanis nem létezne ilyen gráf, azaz a feladat az üreshalmaz eleméről szólna, akkor az is igazolható lenne, hogy a feladatban szereplő gráfnak -7 db éle és $\sqrt{2}$ db csúcsa van.) Abból azonban, hogy találunk egy olyan gráfot, amelyet a feladat körülír, még nem következik, hogy minden ilyen gráfnak ugyanannyi csúcsa és éle van. Minden esetre, aki csak annyi értékelhető munkát végez, hogy talál egy ilyen gráfot (tekintettel arra, hogy ez nem teljesen triviális), az kapjon összesen 2 pontot.

5. Határozzuk meg az $n = \binom{12}{6}$ pozitív osztóinak számát!

Tudjuk, hogy ha $n = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$, akkor n pozitív osztóinak száma $d(n) = \prod_{i=1}^k (\alpha_i + 1)$. (3 pont)

Ezért elég meghatározni az n kanonikus alakját, (2 pont)

Mivel $n = \binom{12}{6} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3} = 11 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$, (3 pont)

az n osztóinak száma $d(n) = (2 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 24$. (2 pont)

6. Melyik az a legnagyobb m modulus, amelyre a $42x \equiv 2015(m)$ lineáris kongruenciának megoldása az $x = 3$?

A kongruencia fennállása azt jelenti, hogy $m \mid 2015 - 42x$, (3 pont)

így mivel $x = 3$ megoldás, az $m \mid 2015 - 42 \cdot 3 = 2015 - 126 = 1889$ oszthatóságnak kell teljesülnie. (3 pont)

A legnagyobb olyan m számot keressük tehát, amire $m \mid 1889$ teljesül, azaz 1889 legnagyobb osztója a kérdésre a válasz. (2 pont)

Ez pedig nem más, mint az $m = 1889$. (2 pont)