

# Bevezetés a számításelméletbe 2. tétel sor

Zsolt Hegyi

A tétel sor Fleiner Tamás jegyzetei, a "Számítástudomány alapjai" című könyv (Katona Gyula Y., Recski András), valamint Szeszlér Dávid fantasztikus előadásai alapján készült.

Álljon itt egy névsor azokról, akik a megjegyzéseikkel, támogatásukkal és munkájukkal érdemben részt vettek e tétel sor létrehozásában illetve javításában:

Bálint Ádám, Bereczki Márk, Bognár Márton, Bokros Bálint, Braun Márton, a CrySyS labor munkatársai, Hanusch Róbert, az IRC-s baráti társaságom, Kormány Zsolt, a KSZK reszort tagjai, Müller András, Nagy "Sid" Jenő, Rostás Balázs.

**Kellemes vizsgázást!**

## Tartalomjegyzék

1. tétel	2
2. tétel	4
3. tétel	6
4. tétel	8
5. tétel	10
6. tétel	11
7. tétel	13
8. tétel	14
9. tétel	16
10. tétel	18
11. tétel	19
12. tétel	20
13. tétel	22
14. tétel	23
15. tétel	25
16. tétel	26
17. tétel	28

# 1. tétel

**FAKTORIÁLIS** Definíció: Az  $n(n-1)(n-2)\dots\cdot 2\cdot 1$  szorzatot  $n$  **faktoriálisának** nevezzük. Definíció szerint  $0! = 1$ .  
Jel:  $n!$

**PERMUTÁCIÓ** Definíció: Az  $n$  elem összes lehetséges sorrendjének a száma  $n!$  és ezt hívjuk **permutációnak**.

**ISMÉTLÉSES PERMUTÁCIÓ** Definíció:  $k_1$  darab első típusú elem, ...,  $k_n$  darab  $n$ -edik típusú elem lehetséges sorbarendezésének a száma a  $k_1 + k_2 + \dots + k_n$  **isméltéses permutációi**. Számuk:

$$\frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}$$

**VARIÁCIÓ** Definíció:  $n$ -ből  $k$  elem összes lehetséges sorrendben való kiválasztása az  $n$  elem  $k$ -ad osztályú (isméltés nélküli) **variációja**, ezek száma:

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ha  $k = n$ , akkor permutációról beszélünk.

**ISMÉTLÉSES VARIÁCIÓ** Definíció:  $n$  elemből  $k$  tagú sorozatok kiválasztása, ahol egy-egy elem többször is szerepelhet, az  $n$ -elem  $k$ -ad osztályú **isméltéses variációja**. Ezeknek a száma:

$$n^k$$

**KOMBINÁCIÓ** Definíció: Egy  $n$  elemű halmaz  $k$  elemű részhalmazainak a száma:  $n$  elem  $k$ -ad osztályú **kombinációja**. Száma:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

Az  $\binom{n}{k}$  a binomiális együttható.

**ISMÉTLÉSES KOMBINÁCIÓ** Definíció:  $n$  elemből  $k$  kiválasztása, ha a sorrend nem számít, de az elemek többször is szerepelhetnek:  $n$  elem  $k$ -ad osztályú **isméltéses kombinációi**. Számuk:

$$\binom{n+k-1}{k}$$

**BINOMIÁLIS TÉTEL** Tétel: Tetszőleges valós  $x$ ,  $y$ -ra és nemnegatív egész  $n$ -re:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \dots + \binom{n}{n}y^n$$

PASCAL HÁROMSZÖG: A háromszög csúcsán álljon az  $\binom{0}{0}$  együttható. Alatta álljon az  $\binom{1}{0}$  illetve a  $\binom{1}{1}$  együttható. A piramis  $(k - 1)$ -edik sorában álljanak a  $\binom{k}{0}, \binom{k}{1} \dots \binom{k}{k-1}, \binom{k}{k}$  együtthatók. A legutóbbi állítás alapján a Pascal-háromszög minden sorának a sorösszege:  $2^{i-1}$ . Ez abból is belátható, hogy minden sor összege kétszerese az előzőnek, ugyanis az együtthatókat úgy is meg lehet kapni, hogy az új elem a felette álló két együttható összegéből áll össze.

BINOMIÁLIS ÖSSZEG Tétel: Minden  $n$  nemnegatív számra

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

## 2. tétel

**GRÁF** Definíció: Egy **gráf** rendezett pár,  $G = (V, E)$ , ahol  $V$  egy nem üres halmaz,  $E$  pedig az ebből a halmazból képezhető párok egy halmaza,  $V$  elemeit **pontoknak** v. **csúcsoknak** nevezzük,  $E$  elemeit pedig **éleknek**. A csúcsok számát  $v(G)$ -vel jelöljük, az éleket pedig  $e(G)$ -vel. A gráf csúcshalmazát  $V(G)$ -vel, az élhalmazt pedig  $E(G)$ -vel jelöljük.

**HUROKÉL, TÖBBSZÖRÖS ÉL** Definíció: Ha az  $e \in E$  a  $v_1, v_2$  párnak felel meg, akkor **hurokélnak** nevezzük azon éleket, melynek két végpontja ugyanazon pont (tehát  $v_1 = v_2$ ). Ha két nem különböző nem hurokélnak végpontjai azonosak, akkor a két élet **párhuzamos** v. **többszörös élnak** nevezzük.

**EGYSZERŰ GRÁF** Definíció: Azokat a gráfokat, melyek nem tartalmaznak hurokéleket és többszörös éleket, **egyszerű gráfnak** nevezzük.

**KOMPLEMENTER GRÁF** Definíció: Egy  $G$  gráf **komplementerén** azt a  $\bar{G}$  gráfot értjük, amelyet akkor kapunk, ha a  $G$ -t a  $K_{v(G)}$  részgráfjának tekintjük és  $\bar{G}$ -ben azon pontpárok vannak összekötve, amelyek  $G$ -ben nincsenek.

**IZOMORFIA** Definíció:  $G = (V, E)$  és  $G' = (V', E')$  gráfok **izomorfak**, ha van olyan egyértelmű megfeleltetés (bijekció), hogy  $G$ -ben pontosan akkor szomszédos két pont, a  $G'$ -ben a nekik megfelelő pontok szomszédosak, és a szomszédos pontpárok esetén ugyanannyi él fut közöttük.

**RÉSZGRÁF** Definíció: A  $G' = (V', E')$  gráf a  $G = (V, E)$  **részgráfja**, ha a  $V' \subseteq V$ ,  $E' \subseteq E$  valamint egy pont és egy él pontosan akkor illeszkedik egymásra  $G'$ -ben, ha a  $G$ -ben is illeszkedők.

**FESZÍTŐ RÉSZGRÁF** Definíció:  $G' = (V', E')$  gráf a  $G = (V, E)$  **feszítő részgráfja**, ha  $G'$  részgráfja  $G$ -nek és  $V' = V$ .

**FESZÍTETT RÉSZGRÁF** Definíció: Ha  $E'$  pontosan azokból az  $E$ -beli élekből áll, amelyeknek két végpontja  $V'$ -ben van, és az  $E'$  az összes ilyen élet tartalmazza, akkor  $G'$  a  $G$  gráf  $V'$  által feszített részgráfja.

**ÉLSOROZAT, ÚT, KÖR** Definíció: Egy  $(v_0, e_1, v_1 \dots v_{k-1}, e_k, v_k)$  sorozatot **élsorozatnak** nevezzük, ha  $e_i$  a  $v_{i-1}$ -et és  $v_i$ -t összekötő él. Ha  $v_0 = v_k$ , akkor az élsorozat zárt. Ha a csúcsok mind különbözőek, akkor egy **útról** beszélünk. Ha a csúcsok mind különbözőek és az élsorozat zárt, akkor pedig egy **körrel**.

**ÖSSZEFÜGGŐSÉG** Definíció:  $G$  gráf **összefüggő**, ha bármely 2 csúcs között létezik élsorozat vagy út.

**KOMPONENS** Definíció:  $G$  gráf komponense olyan  $H$  feszített részgráfja  $G$ -nek, amire teljesül, hogy  $H$  összefüggő és bárhogy egy további csúcsot hozzáteszünk, már nem összefüggő feszített részgráfot kapunk.

**FA** Definíció: Az összefüggő körmentes gráfokat **fáknak** nevezzük. Amennyiben körmentes egy gráf, de nem összefüggő (tehát több fából áll), akkor azt **erdőnek** nevezzük.

FA FOKSZÁMA Tétel: Minden legalább 2 pontú fában van legalább 2 egy fokszerű pont.

Tekintsük a fában található leghosszabb utat, legyen ez  $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ , ekkor beláthatjuk, hogy  $v_1$  és  $v_k$  végpontok egyfokúak lesznek. T.f.h  $v_k$  nem egy fokszerű, tehát belőle vezet még el a fa valamely pontjába. Az út többi pontjába nem vezethet, mivel a fa definíció alapján körmentes, és új pontba sem vezethet, mivel akkor egy hosszabb utat kapnánk, amivel ellentmondást kapunk.

FA ÉLEINEK SZÁMA Tétel:  $n$  pontú fa éleinek száma  $n-1$ .

Bizonyítás: Teljes indukcióval.  $n = 2$ -re az állítás triviálisan teljesül. T.f.h. az állítás igaz minden  $n < n_0$ -ra. Az előző tétel szerint minden  $n_0$  fában van egy fokszerű pont, ezt hagyjuk el. Ha elhagyjuk ezt a pontot és a hozzá tartozó élet, akkor mivel a maradék  $n_0 - 1$  fára már igaz az állítás, látható, hogy az  $n_0$  pontú eredeti fának  $n_0 - 1$  éle van.

Az  $F$  gráf a  $G$  gráf feszítőfája, ha  $F$  fa, és részgráfja  $G$ -nek.

FESZÍTŐFA LÉTEZÉSE Tétel: Minden összefüggő  $G$  gráf tartalmaz feszítőfát.

Ha  $G$ -ben van kör, akkor hagyjuk el a kör egy tetszőleges élet, ha a maradék gráfban még mindig van kör, akkor annak is hagyjuk el egy tetszőleges élet, folytatjuk, amíg körmentes lesz a gráf. Ha már nincsen több kör, akkor nézzünk rá, hogy mit kaptunk - az összefüggőség nem sérül, mivel körök egy-egy élet hagyunk el, és pontot se hagyunk el - tehát amit kaptunk, az láthatóan  $G$  gráf feszítőfája.

### 3. tétel

<http://cs.bme.hu/bsz2/bfs.pdf>

A BFS-algoritmus futása során a következőket tartjuk nyilván:

- $b(i)$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ): az  $i$ -ediként bejárt csúcs
- $t(v)$  ( $v \in V$ ):  $v$  távolsága  $s$ -től
- $m(v)$  ( $v \in V, v \neq s$ ):  $v$ -t megelőző csúcs az algoritmus által megtalált,  $s$ -ből  $v$ -be vezető legrövidebb úton
- $j$ : az eddig bejárt csúcsok száma
- $k$ : a jelenleg aktív csúcs sorszáma a  $b(1), b(2), \dots$  sorozatban.

BFS Algoritmus: Bemenete a BFS algoritmusnak: Egy  $G$  gráf és egy  $s \in V$  csúcs.

**Az algoritmus:**

- **0.**  $j = 1, k = 1, b(1) = s, t(s) = 0$ , minden  $v \neq s$ -re  $t(v) = *$
- **1.** HA a  $b(k)$  csúcsnak van olyan  $v$  szomszédja, amelyre  $t(v) = *$ , AKKOR:
  - $j = j + 1$
  - $b(j) = v$
  - $t(v) = t(b(k)) + 1$
  - $m(v) = b(k)$
  - Vissza az **1.** lépéshez.
- **2.**
  - Ha  $k = j$ , akkor **STOP**.
  - $k = k + 1$
  - Vissza az **1.** lépéshez.

Az algoritmus lineáris futásidőjű, tehát  $c \cdot e$  lépésszámú.

**BFS-FA Definíció:** A BFS algoritmus futtatása után kapott  $F$  feszítőfát nevezzük **BFS fának**.  $F$  összefüggő, ha az eredeti bemeneti gráf is összefüggő volt, valamint  $F$  nem tartalmaz kört (a fa definíciója miatt). Az is megfigyelhető, hogy bármely  $v \in V$  csúcsra az  $s$ -et  $v$ -vel összekötő  $F$ -beli út a legrövidebbek egyike az  $s$ -ből a  $v$ -be vezető  $G$ -beli utak közül.

**Kruskal Algoritmus:** Bemenet:  $G$  gráf és az élekhez tartozó  $w$  súlyfüggvény. Az éleket rendezzük sorba úgy, hogy a legalacsonyabb költségűek legyenek először a sorban. A sorban kezdjük előre haladni. Ha az él bevétele esetén a kapott gráf körmentes marad, akkor vegyük be. Ezt addig ismétljük, amíg van izolált pont, vagy amíg az élsorozat végére nem érünk. A kapott gráf a  $G$  gráf minimális költségű feszítőfája.

Ezt az eljárást **mohó algoritmusnak** nevezzük, mivel a végrehajtás során minden lépésben az éppen akkor a legjobbnak tűnő lehetőséget választjuk ki.

**MINIMÁLIS SÚLYÚ FESZÍTŐFA Definíció:** Legyen  $G$  gráf és annak éleihez rendelt  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$  súlyfüggvény. A gráfnak azon feszítőfáját, melyre ez a súlyfüggvény minimális, a gráf **minimális súlyú feszítőfájának** nevezzük.

Tétel: A Kruskal-algoritmus minimális súlyú feszítőfát talál.

Két állítást kell bizonyítanunk - azt, hogy feszítőfát ad az algoritmus, és azt, hogy az minimális. Kezdjük az elsővel. Legyen  $G$  egy összefüggő, súlyozott gráf (tehát van súlyfüggvény hozzárendelve) és  $F$  legyen egy részgráfja, amit az algoritmus produkál.  $F$ -ben nem lehet kör, mivel az algoritmus egy fát épít.  $F$  nem lehet nem összefüggő sem, mivel az első él (amit az algoritmus talál), ami összeköt két független komponenst  $F$ -ben még nem hozhat létre kört. Tehát  $F$  feszítőgráf.

A következő állítást teljes indukcióval bizonyítjuk be. Legyen  $H$  egy élhalmaz, amit az algoritmus a futása során generál, a minimális súlyú feszítőfának ezt a  $H$  élhalmazt tartalmaznia kell, hiszen ebben vannak minimális súlyú élek. Az első lépésnél az állítás igaz, hiszen  $H$  üres, és minden gráfnak részgráfja az üres gráf. A  $k$ -adik lépésnél vegyük az állítást igaznak és legyen  $T$  a minimális súlyú feszítőfa, ami tartalmazza  $H$ -t. Ha az algoritmus által kiválasztott következő él,  $e$ , szintúgy benne van a  $T$ -ben, akkor az állítás szintúgy igaz a  $H + e$  élhalmazra. Különben  $T + e$  élhalmazban létezik egy  $C$  kör, és ezen kívül még létezik egy olyan  $f$  él, ami befejezi a  $C$  kört, de nem része  $H$ -nak. (Ha nem létezne  $f$ , akkor  $e$ -t már nem vehettük volna be, mivel kört produkált volna  $H + f$ -ben). Ekkor  $T - f + e$  szintúgy egy fa, és azonos az összsúlya  $T$ -jével, hiszen  $T$ -nek minimális az összsúlya, és  $f$ -nek a súlya nem lehet kisebb, mint  $e$ -nek, hiszen akkor  $e$  helyett az  $f$  élet választotta volna az algoritmus. Tehát  $T - f + e$  egy minimális súlyú feszítőfa. Ezek alapján az indukciós feltevést bebizonyítottuk, és az állítás igaz, amikor  $H$  egy feszítőfává válik, ami csak akkor igaz, ha  $H$  egy minimális súlyú feszítőfa.

Alkalmazás: Pontok - városok, élek - utak, súly - hossz; Villamos hálózatok, Kirchhoff-törvények, áramkört elemekhez súlyokat párosítunk

## 4. tétel

**SÍKBARAJZOLHATÓSÁG** Definíció:  $G$  **síkbarajzolható** gráf, ha lerajzolható úgy (a síkba), hogy az élei a csúcsokon kívül sehol máshol ne keresszezzék egymást.

**TARTOMÁNYOK** Definíció:  $G$  síkbarajzolt gráf **tartományain** azon síkrészeket értjük, melyeket közrefognak az élek. Csak síkbarajzolt gráfok esetén beszélhetünk ezekről!

**GÖMBRE RAJZOLHATÓSÁG** Tétel:  $G$  gráf pontosan akkor síkbarajzolható, ha gömbre rajzolható.

Bizonyítás: Egy síkban lévő gráf leképezhető gömbfelületre oly módon, hogy ezt a gömbfelületet valamelyik pontjával a síkra helyezzük, ezt a pontot tekintjük a déli pólusként, és az északi pólusból egyeneseket húzunk a gráf pontjaiba. Ezeknek a vonalaknak van metszéspontja a gömbön, ezek szolgáltatják a kívánt vetítést. Ez az ún. sztereografikus projekció. Ezt visszafelé is meg lehet ismételni.

**EULER-FORMULA** Tétel: Ha egy összefüggő síkbeli gráfnak  $n$  csúcsa,  $e$  éle és  $t$  tartománya van (beleértve a külső tartományt is), akkor eleget tesz az Euler-formulának:

$$n + t = e + 2$$

Bizonyítás: Tekintsük a gráf egy  $C$  körét (ha van) és ennek egy  $a$  élét. A  $C$  kör a síkot két részre osztja. Ezeket egyéb élek további tartományokra oszthatják, de mindkét részben van egy olyan tartomány, melynek  $a$  a határa. Ha  $a$ -t elhagyjuk, a két tartomány egyesül, azaz a tartományok száma eggyel csökken. A csúcsok száma nem változik, tehát  $a$  elhagyásával az  $n - e + t$  érték nem változik. Ezt az eljárást addig folytassuk, amíg a gráfban nem marad kör. Ekkor viszont már csak egy feszítőfa maradt. Elég az állítást erre belátni, ami triviális, hiszen  $t = 1$  és  $e = n - 1$ .

**BECSLÉS AZ ÉLEK SZÁMÁRA** Tétel: Ha  $G$  egyszerű, síkbarajzolható gráf és pontjainak a száma legalább 3, akkor az előbbi jelölésekkel:

$$e \leq 3n - 6$$

Bizonyítás: Vegyük  $G$  tetsz. síkbarajzolását és jelöljük az egyes tartományokat határoló élek számát  $c_1, c_2, \dots, c_t$ -vel. Mivel a gráf egyszerű, ezért minden tartományát legalább 3 él határolja, tehát  $c_i \geq 3$ . Nyilvánvaló, hogy egy élhez legfeljebb 2 tartomány tartozik, tehát ha összegezzük a tartományokat határoló élek számát minden tartományra, akkor legfeljebb  $2e$ -t kaphatunk. Tehát:

$$3t \leq c_1 + c_2 + \dots + c_t = \sum_{i=1}^t c_i \leq 2e$$

Az Euler-formulát felhasználva:

$$3(e - n + 2) \leq 2e$$

Ebből átrendezéssel megkapjuk az eredményt.

**BECSLÉS AZ ÉLEK SZÁMÁRA** Tétel: Ha  $G$  egyszerű, síkbarajzolható gráf és minden köre legalább 4 hosszú, valamint legalább 4 pontja van, akkor:

$$e \leq 2n - 4$$



Minden tartományt legalább 4 él határol. Az előző biz. gondolatmenete alapján  $4t \leq 2e$  és ez alapján megkapjuk a képletet.

BECSLÉS MINIMÁLIS FOKSZÁMRA Tétel: Ha  $G$  egyszerű, síkbarajzolható gráf, akkor

$$\delta = \min d(v) \leq 5$$

azaz a minimális fokszám legfeljebb 5.

Bizonyítás: Feltehetjük, hogy a gráf pontjainak a száma legalább 3. T.f.h.  $\delta \geq 6$ . Mivel a fokszámok összege egyenlő az élszámok kétszeresével,  $6n \leq 2e$ . Az élszám-bebecslés alapján azonban  $2e \leq 6n - 12$ , ezzel ellentmondásra jutottunk, mivel  $6n \not\leq 6n - 12$ .

## 5. tétel

KURATOWSKI-GRÁFOK Tétel: A Kuratowski-gráfok, tehát a  $K_5$  és a  $K_{3,3}$  nem rajzolhatóak síkba.

Bizonyítás: Ha  $K_5$  síkbarajzolható volna, akkor teljesülne rá az élbecslés tétel. Azonban  $K_5$  pontjainak száma 5, éleinek száma 10 és  $10 \not\leq 3 \cdot 5 - 6 = 9$ , tehát  $K_5$  nem síkbarajzolható. A  $K_{3,3}$  minden körének hossza legalább 4. Ha volna 3 hosszú kör, legalább 2 "kút" vagy "ház" között kellene annak mennie, ami nem lehetséges. Így tehát a 2. élbecslés alkalmazható.  $K_{3,3}$  pontjainak a száma 6, éleinek száma 9 és  $9 \not\leq 2 \cdot 6 - 4 = 8$ , tehát  $K_{3,3}$  nem síkbarajzolható.

Érdeemes megjegyezni, hogy ezeknek a topologikus izomorf megfelelőit (tehát ha egy él helyett 2 hosszú út van) se lehet síkba lerajzolni. Ezeket úgy tudjuk konstruálni, hogy egy él helyett vagy egy új, 2-fokú csúccsal helyettesítünk, vagy egy 2-fokú csúcsot egy éllel.

TOPOLOGIKUS IZOMORFIA Definíció: A  $G$  és  $H$  gráfok **topologikusan izomorfak**, ha a fentebb említett transzformációk ismételt alkalmazásával izomorf gráfokba transzformálhatóak.

KURATOWSKI-TÉTEL Tétel: Egy gráf akkor és csak akkor síkbarajzolható, ha nem tartalmaz olyan részgráfot, amely topologikusan izomorf lenne  $K_{3,3}$ -al vagy  $K_5$ -el. **A bizonyítás a szükségességre fentebb található.**

FÁRY-WAGNER TÉTEL Tétel: Ha  $G$  egy egyszerű, síkbarajzolható gráf, akkor létezik olyan síkbeli ábrázolása is, melyben minden él egy egyenes szakasszal rajzoltunk le.

DUÁLIS Definíció: Egy  $G$  gráf **duálisát** úgy kapjuk meg, hogy  $G$  tartományaihoz rendelünk pontokat ( $G^*$  pontjai) és  $G^*$ -ban akkor kötünk össze két pontot, ha a megfelelő  $G$ -beli tartományoknak van közös határvonala.

A duális gráfban tehát  $n^* = t$  és  $t^* = n$ , valamint  $e^* = e$ . A párhuzamos élekből "soros él", hurokélekből pedig elvágó él lesznek.

ELVÁGÓ ÉLHALMAZ Definíció:  $G$  összefüggő gráf,  $x \in E(G)$ .  $x$  elvágó élhalmaz, ha  $(V(G), E(G) \setminus x) = G'$  és  $G'$  nem összefüggő.  $x$  vágás, ha  $x$  elv. élhalmaz, de semelyik részhalma sem az.

VÁGÁSOK ÉS KÖRÖK Tétel:  $G$  összefüggő és síkbarajzolt, ekkor ha  $C$  kör a  $G$ -ben, a  $C^*$  vágás lesz  $G$  duálisában,  $G^*$ -ban és fordítva, ha  $C$  vágás  $G$ -ben, a  $C^*$  kör lesz a  $G^*$ -ban.

FA DUÁLISON BELÜL Tétel:  $G$  összefüggő, egyszerű gráf,  $F$  ezen belül feszítőfa. A  $G^*$  duálison belül ez az  $F$  a saját komplementereként fog megjelenni.

## 6. tétel

**EULER-ÚT ÉS KÖR** Definíció: A  $G$  gráf **Euler-körének** nevezünk egy zárt élsorozatot, ha az élsorozat pontosan egyszer tartalmazza  $G$  összes élét. Ha az élsorozat nem feltétlenül zárt, akkor **Euler-útról** beszélünk.

**EULER-KÖR LÉTEZÉSE** Tétel:  $G$  összefüggő gráfban akkor és csak akkor létezik Euler-kör, ha  $G$  minden pontjának fokszáma páros.

Először lássuk be, hogy ha van a gráfban E-kör, akkor minden pont foka páros. Induljunk el a gráf tetszőleges pontjából és járjuk körbe az E-kör mentén. Minden pontban ugyanannyiszor mentünk be, mint ahányszor kimentünk, a ki-bemenések száma a pont fokszáma. Ez biztosan páros. Másik irány jegyzet 29. oldal, baszódjon meg ez a bizonyítás.

**EULER-ÚT LÉTEZÉSE** Tétel: Egy összefüggő  $G$  gráfban akkor és csak akkor létezik Euler-út, ha a páratlan fokszámú pontok száma 0 vagy 2.

Az előző tétel bizonyítása alapján, ebben az esetben ha 0 a páratlan fokszámú pontok száma, akkor Euler-körrel is beszélhetünk, ha 2, akkor az élsorozat nem zárt, a két végpontnak lesz eltérő a fokszáma, mivel ezt úgy tudjuk képezni, hogy a két végpontot összekötő élt elhagyjuk.

**HAMILTON-ÚT ÉS KÖR** Definíció: Egy  $G$  gráfban Hamilton-körnek nevezünk egy  $H$  kört, ha  $G$  minden pontját pontosan egyszer tartalmazza. Egy utat pedig Hamilton-útnak nevezünk, ha  $G$  minden pontját pontosan egyszer tartalmazza.

**SZÜKSÉGES FELTÉTEL A H-KÖR (ÚT) LÉTEZÉSÉHEZ** Tétel: Ha a  $G$  gráfban létezik  $k$  olyan pont, melyeket elhagyva a gráf több mint  $k$  komponensre esik, akkor nem létezik a gráfban H-kör. Ha több mint  $k+1$  komponensre esik, akkor nem létezik a gráfban H-út se.

Indirekt t.f.h. van a gráfban H-kör, ez legyen  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  és legyen  $(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k})$  az a  $k$  pont, amelyet elhagyva a gráf több mint  $k$  komponensre esik. Az elhagyott pontok közötti "ívek" biztosan összefüggő komponenseket alkotnak. Pl. a  $(v_{i_1+1}, v_{i_1+2}, \dots, v_{i_2-1})$  is összefüggő lesz, hiszen két szomszédos pontja között az eredeti H-kör éle fut. Mivel épp  $k$  ilyen ívet kapunk, ezért nem lehet több komponens  $k$ -nál (kevesebb lehet, mivel különb. ívek közt futhatnak élek). U.a. bizonyítjuk útra. Ha egy H-útból elhagyunk  $k$  pontot, legfeljebb  $k+1$  öf. ív marad.

**ELÉGSÉGES FELTÉTEL - ORE TÉTEL** Tétel: Ha az  $n$  pontú  $G$  egyszerű gráfban minden olyan  $x, y \in V(G)$  pontpárra, amelyre  $x, y \notin E(G)$  (nem szomszédosak), teljesül az, hogy  $d(x) + d(y) \geq n$ , akkor a gráfban van H-kör.

Indirekt t.f.h. a gráf kielégíti a feltételt, de nincs benne H-kör. Vegyünk hozzá a gráfhoz éleket úgy, hogy továbbra se legyen benne H-kör. Ezt egészen addig csináljuk, amíg már akárhogyan is veszünk hozzá egy éleket, lesz a gráfban H-kör. Az így kapott  $G'$  gráfra továbbra is teljesül a feltétel, hiszen új élek behúzásával "rossz pontpárt" nem lehet létrehozni. Biztosan van két olyan pont, hogy  $x, y \notin E(G')$ . Ennek a behúzásával már lesz  $G' + x, y$ -ban H-kör, tehát  $G'$ -ben van H-út. Legyen ez  $P = z_1, z_2, \dots, z_n$  ahol  $z_1 = x$  és  $z_n = y$ . Ha  $x$  szomszédos a  $P$  út valamely  $z_k$  pontjával, akkor  $y$  nem lehet összekötve  $z_{k-1}$ -el, mert akkor az egy H-kört adna. Így tehát  $y$  nem lehet összekötve legalább  $d(x)$  ponttal, ezért

$$d(y) \leq n - 1 - d(x)$$

ami viszont ellentmondás, hisz  $x, y \notin E(G)$ .

ELÉGSÉGES FELTÉTEL - DIRAC TÉTEL Tétel: Ha egy  $n$  pontú  $G$  egyszerű gráfban minden pont foka legalább  $n/2$ , akkor a gráfban létezik  $H$ -kör.

Ez az előző tételből következik, hiszen ha minden pont foka legalább  $n/2$ , akkor teljesül az Ore-tétel feltétele, mivel bármely pontpárra

$$d(x) + d(y) \geq n$$

## 7. tétel

**GRÁFOK SZÍNEZÉSE** Definíció: Egy  $G$  hurokmentes gráf  $k$  színnel színezhető, ha minden csúcsot ki lehet színezni  $k$  szín felhasználásával úgy, hogy bármely két szomszédos csúcs színe különböző legyen.  $G$  **kromatikus száma**  $\chi(G) = k$ , ha  $k$  színnel meg lehet színezni  $G$ -t, de  $k - 1$ -gyel már nem. Egy ilyen színezésnél az azonos színű pontok halmazát **színosztálynak** nevezzük.

**KLIKK** Definíció:  $G$  egy teljes részgráfját **klikknek** nevezzük. A  $G$ -ben található maximális méretű klikk méretet, azaz pontszámát  $\omega(G)$ -vel jelöljük és a gráf **klikkszámának** nevezzük.

Minden  $G$  gráfra  $\chi(G) \geq \omega(G)$ .

Bizonyítás:  $G$  pontjainak kiszínezésével a maximális klikk pontjait is kiszínezzük, mégpedig különböző színekkel.  $k$  nagyságú klikk esetén legalább  $k$  szín kell.

**MYCIELSKI-KONSTRUKCIÓ** Tétel: Minden  $k \geq 2$  egész számra van olyan  $G_k$  gráf, hogy  $\omega(G_k) = 2$  és  $\chi(G_k) = k$ .

Bizonyítás:  $G_2$ -nek nyilván megfelel a 2 pontot és egy élt tartalmazó gráf. T.f.h. hogy már megkonstruáltuk a fenti tulajdonságokkal rendelkező  $G_k$  gráfot. Ebből konstruáljuk meg a  $G_{k+1}$ -et. Jelöljük  $G_k$  pontjait  $v_1, v_2, \dots, v_n$ -nel. Vegyünk fel  $n + 1$  darab új pontot,  $u_1, u_2, \dots, u_n$  és  $w$ -t, valamint az új éleket a következőképp: Minden  $u_i$ -t kössünk össze  $v_i$  minden  $G_k$ -beli szomszédjával, de magával a  $v_i$ -vel ne. Végül  $w$ -t kössük össze  $u_i$ -val (de a többi  $v$  ponttal ne). Belátjuk, hogy az így kapott  $G_{k+1}$  gráf kielégíti a feltételeket. Először lássuk be, ha  $G_k$ -ban nem volt háromszög, akkor  $G_{k+1}$ -ben sincs, azaz a klikkszáma még mindig 2. T.f.h. mégis van háromszög a  $G_{k+1}$ -ben. Ennek nyilván nem lehet mindhárom csúcsa  $G_k$ -ban, mivel ekkor volna már háromszög  $G_k$ -ban is. Ha  $w$  a háromszög egyik csúcsa, az sem jó, mivel akkor a háromszög másik két csúcsa  $u_i$  és  $u_j$  lehet, viszont ezek nem szomszédosak. Ha  $u_i$  a háromszög egyik csúcsa, akkor a maradék két csúcs csak  $v_x$  és  $v_y$  lehet. Mivel azonban  $u_i$  szomszédai megegyeznek a  $v_i$  szomszédjaival (kivéve  $w$ ), ezért  $v_i$ -vel is szomszédosnak kellett volna lennie  $v_x$  és  $v_y$ -nak, ekkor létezett volna  $G_k$ -ban is háromszög, ami ellentmondás. Ebből kijön az, hogy  $\chi(G_{k+1}) \leq k + 1$ . Színezzünk ki minden  $v_i$ -t valamilyen színnel, az  $u_i$ -ket színezzünk ugyanolyanra (mivel  $v_i$ -vel nem szomszédos) és  $w$  legyen a plusz egy szín, így jól színeztük ki  $k + 1$  színnel. T.f.h.  $\chi(G_{k+1}) = k$ . Jelöljük  $x$  pont színét  $c(x)$ -el, a színeket pedig  $1, 2, \dots, k$ -val. Azt is feltehetjük, hogy  $c(w) = k$ . Mivel  $w$  minden  $u_i$  ponttal össze van kötve, ezért az  $u_i$  pontokat a  $1, 2, \dots, k - 1$  színekkel színezzük. Megadunk egy  $c'$  színezést a  $v_i$  pontok által feszített részgráfon (Ez éppen  $G_k$ -val izomorf részgráf). Ha  $c(v_i) = k$  akkor legyen  $c'(v_i) = c(u_i)$ , különben  $c'(v_i) = c(v_i)$ , vagyis a  $k$  színűeket színezzük át a "párjuk" színére. Belátjuk, hogy  $c'$  egy jó  $k - 1$  színezése  $G_k$ -nak, ami ellentmondás.

## 8. tétel

**MOHÓ SZÍNEZÉS Algoritmus:** A mohó színezés sorba rendezi a csúcsokat  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  és a  $v_i$ -hoz azon legkisebb színt rendeli, amit a  $(v_1, \dots, v_{i-1})$  szomszédokhoz még nem rendelt. A mohó színezés nem feltétlenül a legoptimálisabb színezést adja.

$\chi(G)$  ÉS  $\Delta(G)$  VISZONYA Tétel: Minden  $G$  gráfra teljesül, hogy

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Bizonyítás: A mohó színezés segítségével bizonyítjuk. Színezzük ki  $G$  pontjait  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  úgy, hogy az  $i$ -edik lépésben  $v_i$ -t olyan színre színezzük, ami nem szerepel  $v_i$  kiszínezett szomszédságában. Mivel  $v_i$ -nek legfeljebb  $\Delta(G)$  kiszínezett szomszédja lehet, és mindegyik szomszéd legfeljebb egy-egy színt zár ki, ezért  $v_i$  színezése elvégezhető a rendelkezésre álló színek valamelyikével (a kimaradó  $\Delta(G) + 1$ -edik).  $v_n$  kiszínezése után  $G$  egy  $(\Delta(G) + 1)$  színezését kapjuk meg.

Érdemes megjegyezni, hogy  $\chi(G) = \Delta(G) + 1$  abban az esetben, ha teljes gráfról vagy húr nélküli páratlan körről beszélünk.

**BROOKS-TÉTEL Tétel:** Ha  $G$  egyszerű, összefüggő, nem teljes gráf, nem páratlan hosszúságú kör, akkor  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ , tehát a kromatikus szám nem nagyobb, mint a maximális fokszám.

**INTERVALLUMGRÁF Definíció:** Legyenek  $I_1 = [a_1, b_1], I_2 = [a_2, b_2], \dots$  korlátos zárt intervallumok, és minden  $a_i, b_i$  legyen pozitív egész. Legyenek  $p_1, p_2, \dots$  egy  $G$  gráf pontjai és  $p_i, p_j$  akkor és csak akkor legyen él  $G$ -ben, ha  $I_i \cap I_j \neq \emptyset$ . Az így előálló gráfokat **intervallumgráfnak** nevezzük.

**INTERVALLUMGRÁF SZÍNEZÉSE Tétel:**  $G$  intervallumgráf, emiatt:

$$\omega(G) = \chi(G)$$

Mohó színezéssel bizonyítjuk, még hozzá úgy, hogy az intervallumokat bal végpontja szerint rendezem és ezek alapján növekvő sorrendben színezem, akkor optimális színezést kapok. T.f.h.  $k$  színnel színez a mohó algoritmus. A cél az, hogy belássuk a következőt:

$$k \leq \omega(G) \leq \chi(G) \leq k$$

. MAJD.

**PÁROS GRÁF Definíció:** Egy  $G$  gráfot **páros gráfnak** nevezzük, ha  $G$  pontjainak  $V(G)$  halmazát két részre, egy  $A$  és  $B$  halmazra tudjuk osztani úgy, hogy  $G$  minden élének egyik végpontja  $A$ -ban, a másik pedig  $B$ -ben van. Ennek jelölése:  $G = (A, B)$ . A  $K_{a,b}$ -vel jelölt teljes páros gráf olyan  $G = (A, B)$  gráf, ahol  $|A| = a$  és  $|B| = b$  és minden  $A$ -beli pont össze van kötve minden  $B$ -beli ponttal.

**PÁROSÍTÁS LÉTEZÉSE Tétel:** Egy  $G$  gráf akkor és csak akkor páros gráf, ha minden  $G$ -ben lévő kör páros.

Bizonyítás: Ha  $G$  páros gráf, és  $C$  egy kör  $G$ -ben, akkor  $C$  pontjai felváltva vannak  $A$ -ban és  $B$ -ben, így  $|V(C)|$  nyilván páros. Ha  $G$  minden köre páros hosszú, akkor megadhatjuk az  $A$  és  $B$  halmazt. Válasszunk egy tetszőleges  $v$  pontot, legyen ez  $A$  első pontja.  $v$  minden szomszédját tegyük bele  $B$ -be, majd ezeknek a

szomszédjait rakjuk bele A-ba. Ezt folytassuk, amíg ki nem fogyunk a pontokból. Ez biztosan jó elosztás, mivel ha például lenne A-ban két szomszédos pont, akkor léteznie kéne a gráfban páratlan körnek, így ellentmondásra jutnánk. Nem öf. gráfok esetén komponensenként hajtsuk végre.

KROMATIKUS SZÁM ÉS PÁROSÍTÁS KAPCSOLATA Tétel: Egy legalább egy élt tartalmazó  $G$  gráf akkor és csak akkor páros, ha  $\chi(G) = 2$ .

Ha a gráf páros, akkor az egyik oldalon lévő pontokat pirossal, másik oldalon lévőeket kézzel megszínezzük. Ha a gráfnak van egy éle, akkor ennek a két végpontját már nem színezzük egy színűre. A színek megfelelnek a két halmaznak, amire fel tudjuk bontani a páros gráfokat.

## 9. tétel

**PÁROSÍTÁS** Definíció: **Párosításnak** vagy **részleges párosításnak** nevezzünk egy  $M$  élhalmazt, ha semelyik két élnek nincsen közös pontja. Az ilyen éleket **független éleknek** nevezzük. A részleges párosítás **lefed** éleinek végpontjait. Egy párosítás **teljes párosítás**, ha a gráf minden pontját lefedi.

**FLEN/LEFOGÓ ÉLEK/PONTOK** Definíció: Jelöljük  $\nu(G)$ -vel a  $G$  gráfban található **független él** maximális számát.  $X \subseteq V(G)$  egy **lefogó ponthalmaz**, ha  $G$  minden élének legalább egyik végpontját tartalmazza. A lefogó pontok minimális számát  $\tau(G)$ -vel jelöljük.  $Y \subseteq E(G)$  **lefogó élhalmaz**, ha minden pontot lefog. A lefogó él minimális számát  $\rho(G)$  jelöli.  $X \subseteq V(G)$  **független ponthalmaz**, ha nincs benne két szomszédos pont. A független pontok maximális száma  $\alpha(G)$

CUCCOS VISZONY TÉTEL Minden  $G$  gráfra:

$$\nu(G) \leq \tau(G)$$

$$\alpha(G) \leq \rho(G)$$

Bizonyítás: Legyen  $M$  maximális méretű független élhalmaz. Mivel pusztán  $M$  éleinek lefogásához legalább  $|M|$  pontra van szükség, ezért  $\tau(G) \geq |M| = \nu(G)$ . Hasonlóan bizonyítjuk a második állítást is.

GALLAI TÉTEL I. Tétel: Minden olyan  $G$  gráfra, mely hurokmentes:

$$\tau(G) + \alpha(G) = v(G) = n$$

Bizonyítás: Egy  $X$  halmaz pontjai akkor és csak akkor függetlenek, ha a  $V(G) \setminus X$  halmaz lefogó ponthalmaz. Hiszen ha  $X$  nem független, akkor van két összekötött pont, és így  $V(G) \setminus X$  nem fogja le ezt az élt. Fordítva, ha  $V(G) \setminus X$  nem fog le egy huroktól különböző élt, akkor  $X$ -ben ennek az élnek mindkét végpontja szerepel. Tehát  $\tau(G) \leq |V(G) \setminus X|$  teljesül minden  $X$  független ponthalmazra. Ebből pedig következik, hogy a  $\tau(G) + \alpha(G) \leq v(G)$ . Hasonlóan  $\alpha(G) \geq |V(G) \setminus Y|$  minden  $Y$  lefogó ponthalmazra, amiből  $\tau(G) + \alpha(G) \geq v(G)$  következik.

GALLAI TÉTEL II. Tétel: Minden olyan  $G$  gráfra, melyben nincs izolált pont:

$$\nu(G) + \rho(G) = v(G) = n$$

Bizonyítás: Egy  $\nu(G)$  elemű  $X$  független élhalmaz lefog  $2\nu(G)$  különböző pontot. A többi pont (mivel nincs izolált) nyilván lefogható  $v(G) - 2\nu(G)$  éllel, így  $v(G) - \nu(G) \geq \rho(G)$ . Másrészt, ha  $Y$  egy minimális lefogó élhalmaz, akkor  $Y$  néhány ( $k$  darab) diszjunkt csillag egyesítése. Ha ugyanis  $Y$  tartalmazna kört, akkor annak bármely élét, ha pedig 3 hosszú utat, akkor a közepét el lehetne hagyni  $Y$ -ből, mert a többi él még mindig lefogná az összes pontot. Így  $\rho(G) = v(G) - k$ . Minden csillagból kiválasztunk egy élt, az így kapott élhalmaz nyilván független. Tehát  $\nu(G) \geq k = v(G) - \rho(G)$ .

TUTTE-TÉTEL Tétel: Egy  $G$  gráfban akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha minden  $X \subseteq V(G)$ -re  $c_p(G - X) \leq |X|$ , azaz akárhogy hagyunk el a gráfból  $k$  pontot, a maradékban a páratlan komponensek száma nem lehet több, mint  $k$ .



Bizonyítás (csak szükséges): Ha  $G$ -ben van teljes párosítás, akkor nyilvánvalóan teljesül a feltétel. Hiszen ha elhagyunk a gráfból  $X$ -et, akkor a páratlan komponensek mindegyikéből az eredeti gráfban indul ki legalább egy párosításbeli él, és ezek az élek csak egy-egy (különböző)  $X$ -beli pontba mehetnek. Tehát  $c_p(G - X) \leq |X|$ .

## 10. tétel

**PÁROSÍTÁS** Definíció: **Párosításnak**, vagy **részleges párosításnak** nevezünk egy  $M$  élhalmazt, ha semelyik két élnek közös pontja. Az ilyen éleket független éleknek nevezzük. A részleges párosítás lefedi éleinek végpontjait. Egy párosítás **teljes párosítás**, ha a gráf minden pontját lefedi.

**ALTERNÁLÓ ÚT** Definíció: Hozzunk létre egy részleges párosítást egy páros gráfon belül, ekkor a párosítás során bevett élek legyenek az  $X$  élhalmaz elemei. Alternáló útnak nevezünk olyan élsorozatot, ami felváltva tartalmaz nem- $X$  belüli és  $X$ -beli élt.

**JAVÍTÓ ÚT** Definíció:  $G(A, B, E)$  páros gráfban van már párosítás (nem teljes).  $P$  út **javitó út**, ha párosítatlan  $A$ -ból indul, párosítatlan  $B$ -be érkezik és  $P$  alternáló út. Ha ez a javító út elkészül, úgy tudjuk bevenni, hogy a "nem- $X$ "-beli éleket bevesszük és a régebben  $X$ -beli éleket pedig nem.

**JAVÍTÓ UTAS ALGORITMUS (MÓDOSÍTOTT BFS)** Algoritmus: Bemenetként kapjuk meg  $M$  párosítást valamint  $G(A, B, E)$  gráfot. Ha létezik ebben a gráfban javító út, akkor azt vegyük be, ezt folytassuk addig, amíg létre tudunk hozni újabb és újabb javító utakat. Ha már nem tudunk újabb élt bevenni a párosításba, akkor álljunk le. Ebben az esetben már maximális a párosítás. Az algoritmus mohó módon működik.

**KÖNIG-TÉTEL** Tétel: Ha  $G$  páros gráf, akkor  $\nu(G) = \tau(G)$ . Ha  $G$ -ben nincs izolált pont, akkor  $\alpha(G) = \rho(G)$  is teljesül.

Bizonyítás: Először az első állítást bizonyítjuk. Legyen  $M$  egy olyan párosítás, mely a javító utak módszerével már nem bővíthető. Legyen  $U = A - X$ ,  $T'$  azon  $B$ -beli pontok halmaza, amelyek elérhetőek  $U$ -ból alternáló úton.  $T$  pedig ezek párjainak halmaza. Legyen  $Y = T' \cup (X - T)$ . Ennek a halmaznak éppen  $|M|$  pontja van. Ezek minden élt lefognak, hiszen  $N(T \cup U) = T'$ , ugyanúgy, mint a Hall-tétel bizonyításában. Így  $\tau(G) \leq |M| \leq \nu(G)$  amiből viszont már következik az állítás a CUCCOS VISZONY (8. tétel) tétel alapján. Most már könnyű belátni a második állítást is, Gallai két tétele miatt ugyanis  $\nu(G) + \rho(G) = \tau(G) + \alpha(G)$  és imént beláttuk, hogy  $\nu(G) = \tau(G)$ .

**HALL-TÉTEL** Tétel: Egy  $G = (A, B)$  páros gráfban akkor és csak akkor van  $A$ -t lefedő párosítás, ha minden  $X \subseteq A$  részhalmazra  $|N(X)| \geq |X|$  (ezt **Hall-feltételnek** nevezzük).

??? Bizonyítás: Ha létezik  $A$ -t fedő párosítás, akkor minden  $A$ -beli pontnak különböző párja van, tehát tetszőleges  $X \subseteq A$ -ra. Azt kell igazolnunk, hogy  $\nu(G) \geq |A|$ . Legyen  $U$  minimális (azaz  $\tau(G)$  méretű) lefogó ponthalmaz, és legyen  $U_A := U \cap A, U_B := U \cap B$ . Mivel  $U$  lefogja az  $X := A \setminus U_A$ -ból induló éleket, ezért  $N(X) \subseteq U_B$ , tehát  $|N(X)| \leq |U_B|$ . A König-tétel ill. a Hall-feltétel miatt

$$\nu(G) = \tau(G) = |U| = |U_A| + |U_B| \geq |U_A| + |N(X)| \geq |U_A| + |X| = |A|$$

**FROBENIUS-TÉTEL** Tétel: Egy  $G = (A, B)$  páros gráfban akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha  $|A| = |B|$  és  $|N(X)| \geq |X|$  minden  $X \subseteq A$ -ra.

A két feltétel szükségessége nyilvánvaló. Ha viszont teljesül a második feltétel, akkor a Hall-tétel miatt van  $A$ -t fedő párosítás. Mivel azonban  $|A| = |B|$ , ezért ez lefedi  $B$ -t is.

## 11. tétel

**REGULÁRIS GRÁF** Definíció: Egy gráfot  **$k$ -regulárisnak** nevezünk, ha minden pont foka  $k$ . Egy gráfra azt mondjuk, hogy **reguláris**, ha létezik olyan  $k$ , amire  $k$ -reguláris.

**REGULÁRIS GRÁFBAN TELJES PÁROSÍTÁS** Definíció: Minden reguláris páros gráfban létezik teljes párosítás.

Bizonyítás: Vegyünk egy páros gráfot  $A, B$  pontosztállyal, ami  $k$ -reguláris. Először lássuk be, hogy ugyanaz az elemszáma  $A$  és  $B$ -nek.  $A$ -ból  $k \cdot n$  él megy ki,  $B$ -be pedig  $k \cdot m$  él megy.  $k \cdot n = k \cdot m$ , osszuk le  $k$ -val  $\rightarrow n = m$ . Hall-feltétel:  $|N(A)| \geq |A|$ .  $A$ -ból  $k \cdot |A|$  él megy ki, ezek a  $N(A)$  csúcsokba mennek. Ez annyit jelent, hogy egy  $N(A)$ -beli csúcsba átlagosan  $(k \cdot |A|) / |N(A)|$  él megy, tehát  $(k \cdot |A|) / |N(A)| \leq k$  (mivel egy csúcsba maximum  $k$  él megy). Szorozzuk be  $|N(A)|$ -val és osszuk  $k$ -val.  $|A| \leq |N(A)|$ , Hall feltétel OK, Frobenius-tétel OK, létezik teljes párosítás.

**ÉLSZÍNEZÉS** Definíció: Egy  $G$  gráf élei  **$k$  színnel színezhetőek**, ha minden élt ki lehet színezzni  $k$  színnel úgy, hogy bármely két szomszédos él színe különböző legyen.  $G$  **élkromatikus száma**  $\chi_e(G) = k$ , ha  $G$  élei  $k$  színnel színezhetőek, de  $k - 1$ -gyel már nem.

**VIZING-TÉTEL** Tétel: Ha  $G$  egyszerű gráf, akkor  $\chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1$ . Bizonyítás  $\emptyset$ .

**ÉLKROMATIKUS SZÁM** Tétel: Tetszőleges  $G$  gráfra  $\chi_e(G) \geq \Delta(G)$  áll.

Bizonyítás: Az egy csúcsból induló élek egymástól különböző színt kapnak, és ez speciálisan a maximális fokszámú csúcsokból induló élekre is igaz.

**KÖNIG-TÉTEL** Tétel: Ha  $G$  páros gráf, akkor  $\chi_e(G) = \Delta(G)$

Bizonyítás: Elég azt igazolni, hogy  $\chi_e(G) \leq \Delta(G)$  az előző állítás miatt. Létezik olyan  $H$  páros gráf, melynek  $G$  részgráfja, és  $H$  minden csúcsának fokszáma  $\Delta(G)$ . Ha sikerül a  $\Delta(G)$ -reguláris  $H$  gráf éleit  $\Delta(G)$  színnel kiszínezzni, akkor egyúttal a  $G$  részgráf éleinek is megkapjuk egy ugyanennyi színnel való színezését.  $H$  gráf élszínezéséhez elegendő azt megmutatni, hogy tetszőleges reguláris páros gráfban létezik teljes párosítás, ezt pedig már bizonyítottuk egy fentebbi tételben.

## 12. tétel

**HÁLÓZAT** Definíció: Legyen  $G$  egy irányított gráf. Rendeljünk minden éléhez egy  $c(e)$  nemnegatív számot, amit az él **kapacitásának** nevezünk. Jelöljünk ki két pontot,  $s$ -et és  $t$ -t  $G$ -ben, melyet **termelőnek** és **fogyasztónak** nevezünk. Ekkor a  $(G, s, t, c)$  négyest **hálózatnak** nevezzük.

**FOLYAM, FOLYAMÉRTÉK** Definíció: Legyen  $f(e)$  az a "vízmennyiség", ami az  $e$  élen folyik át. Ez az  $f$  függvény **megengedett függvény**, ha  $f(e) \leq c(e)$  minden élre és

$$m(v) = \sum \{f(e) | e \text{ végpontja } v\} - \sum \{f(e) | e \text{ kezdopontja } v\} = 0$$

minden  $v \in V(G)$ -re, kivéve az  $s$  és  $t$  pontokat. Egy megengedett függvényt **folyamnak** hívunk. Könnyen belátható, hogy  $m(t) = -m(s)$ . Ezt a közös értéket a folyam értékének nevezzük és  $m_f$ -el jelöljük. Egy élt **telítettnek** hívunk egy folyamban, ha  $f(e) = c(e)$  és **telítetlennek**, ha  $f(e) < c(e)$ .

**VÁGÁS** Definíció: Legyen  $s \in X \subseteq V(G) \setminus t$ , sem  $X$ , sem  $V(G) - X$  nem üres halmaz. Azoknak az éleknek a  $C$  halmazát, melyeknek egyik végpontja  $X$ -beli, másik  $V(G) - X$ -beli, a hálózati folyam egy  $(s, t)$ -**vágásának** nevezzük. A **vágás értéke**,  $c(C)$ , azon éleken levő kapacitások összege, melyek egy  $X$ -beli pontból egy  $V(G) - X$ -beli pontba mutatnak. Ezeket előremutató éleknek nevezzük. Tehát a vágás értékében nem játszanak szerepet a visszafelé mutató élek, vagyis azok, melyek egy  $X$ -beli pontba mutatnak.

**JAVÍTÓ ÚT HÁLÓZATRA** Algoritmus: Legyen a gráfban  $s = v_0, v_1 \dots v_k$  egy út, aminek most nem kell feltétlenül az irányítás szerint haladnia. Növelhetjük a folyam értékét abban az esetben, ha minden  $i = 0, 1, 2, \dots, k - 1$ -re vagy  $e_i = (v_i, v_{i+1})$  és  $f(e_i) < c(e_i)$ , vagy  $e_i = (v_{i+1}, v_i)$  és  $f(e_i) > 0$ . Ekkor az első típusú éleken növeljük a folyam értékét, míg a második típusúakon csökkentjük, így az össz folyamérték nő. Az ilyen utakat javító utaknak hívjuk. Egy folyam értéke akkor és csak akkor maximális, ha nincs javító út  $s$ -ből  $t$ -be.

**MAXIMÁLIS FOLYAM** Tétel: Egy folyam értéke akkor és csak akkor maximális, ha nincs javító út  $s$ -ből  $t$ -be.

**Bizonyítás:** Legyen  $P$  egy javító út. Ekkor  $P$  minden első típusú élére a  $c(e) - f(e)$ , második típusú élére pedig  $f(e)$  érték szigorúan pozitív. Legyen ezeknek minimuma  $d$ . Az első típusú élekre növeljük  $f(e)$ -t  $d$ -vel, második típusúaknál csökkentjük  $f(e)$ -t  $d$ -vel. Ekkor a módosított folyam is megengedett marad, értéke viszont  $d$ -vel nőtt. T.f.h. nincs javító út  $s$ -ből  $t$ -be. Lehetnek azonban olyan pontok a gráfban amelyek elérhetőek  $s$ -ből javító úton. Legyen az ilyen pontok halmaza  $X \subset V(G)$ . Ekkor sem  $X$ , sem  $V(G) - X$  nem üres, hiszen  $s \in X, t \in V(G) - X$ . Tekintsünk egy olyan  $e$  élt, mely egy  $X$ -beli  $x$  pontból egy nem  $X$ -beli  $y$ -ba mutat. Ekkor  $f(e) = c(e)$ , hiszen ellenkező esetben az  $s$ -ből  $x$ -be vezető javító út  $e$ -vel meghosszabbítva egy  $s$ -ből  $y$ -ba vezető javító utat szolgáltatna. Ugyanígy egy olyan élre, ami egy nem  $X$ -beliből egy  $X$ -belibe mutat, teljesül, hogy  $f(e) = 0$ . Tehát az  $X$  és  $V(G) - X$  között futó élek mind telítettek, és a visszafelé mutató éleket nem használjuk, tehát ezen a vágáson nem folyhat több víz. Vagyis  $f$  maximális folyam.

**FORD-FULKERSON (MAXFLOW-MINCUT) TÉTEL** Tétel: A maximális folyam értéke egyenlő a minimális vágás értékével, azaz

$$\max\{m_f | f \text{ egy folyam } s - \text{ből } t - \text{be}\} = \min(c(C) | C \text{ vágás})$$

**Bizonyítás:** A maximális folyam nyilván nem lehet nagyobb a minimális vágásnál, hiszen ha minden előremutató élt telített, a visszafelé mutató éleken pedig  $0$  a folyam értéke, akkor ezen a vágáson nem folyhat át több víz. Az előző tételben beláttuk, hogy ha létezik egy  $f$  maximális folyam, akkor létezik ilyen értékű vágás. Azt, hogy maximális értékű folyam mindig létezik, a következő tételben bizonyítjuk.

EDMONDS-CARP TÉTEL Tétel: Ha mindig a legrövidebb javító utat vesszük, akkor a maximális folyam meghatározásához szükséges lépések száma felülről becsülhető a pontok számának polinomjával.

### 13. tétel

**EGÉSZÉRTÉKŰSÉGI LEMMA** Lemma: Ha  $(G,s,t,c)$  hálózatban minden  $e$  él  $c(e)$  kapacitása egész szám, akkor létezik olyan  $f$  maximális folyam, hogy  $f$  a  $G$  gráf minden élén egész értéket vesz fel. Az ilyen folyamat **egészfolyamnak** nevezzük.

**A FOLYAMPROBLÉMA ÁLTALÁNOSÍTÁSAI:** T.f.h. a hálózatban több termelő,  $s_1, s_2, \dots, s_k$  és több fogyasztó,  $t_1, t_2, \dots, t_k$  van. A feladat az összes termelőtől az összes fogyasztóig eljutó folyam maximalizálása. Vegyünk fel két  $s', t'$  pontot, és kössük össze  $s'-t$  az összes termelővel,  $t'-t$  pedig az összes fogyasztóval, az élek kapacitása ezek között pedig legyen  $\infty$ .

Ekkor az  $s'$  és a  $t'$ -t vesszük termelőnek és fogyasztónak, innen triviális a megoldás.

Ha nem csak élekhez, hanem pontokhoz is rendelhetünk  $c(v)$  kapacitásokat és megköveteljük, hogy minden  $v$ -re  $\sum_{u,v \in E} f(u,v) \leq c(v)$ , akkor minden  $v$  pontot helyettesítsünk két ponttal,  $v'$  és  $v''$ -vel. Ha egy él az  $u$  pontból a  $v$  pontba mutatott, akkor helyette vegyünk fel egy  $u''$ -ből  $v'$ -be mutató élet a hozzá tartozó kapacitással együtt, ezen kívül minden  $v'$ -ből mutasson  $c(v)$  kapacitású él  $v''$ -be.

Amennyiben irányítatlan élek is szerepelnek a hálózatban, akkor cseréljük le őket két, átellenes irányított éllel, mindkettő kapacitása legyen az irányítatlan él kapacitásával egyenlő.

**DISZJUNKT FOLYAMOK:** Ha a kapacitások egész számok, akkor van olyan maximális folyam, melyben minden élén a folyam értéke egész. Így nyilvánvaló, hogy ha a kapacitás minden élén 1 vagy 0, akkor van olyan maximális folyam, melynek minden élén a folyam értéke vagy 1 vagy 0. Ha elhagyjuk ez utóbbi éleket, akkor diszjunkt utakat kapunk  $s$ -ből  $t$ -be. Ezeknek a számát úgy is meg tudjuk kapni, hogy vesszünk egy minimális vágást és az élhalmazának az elemszámával lesz egyenlő a diszjunkt utak száma.

**DISZJUNKT UTAK** Definíció: Vegyük  $(G,s,t,c)$  folyamat, ezen belül vesszünk utakat. **Páronként éldiszjunkt útnak** nevezzük utakat, ha páronként nincsen közös élük. **Belsőleg pontdiszjunkt utaknak** nevezzük utakat, ha páronként nincs közös pontjuk.

Diszjunkt folyam algoritmus: Vegyünk tetszőleges hálózatot, és futtassuk le a fentebb leírt módszert rajta úgy, hogy vegyünk egy minimális vágást a hálózatban. A visszaélek (tehát amik a  $t$ -t tartalmazó halmazból az  $s$ -et tartalmazó halmazba mennek) legyenek 0 értékűek, egyébként pedig 1 értékűek az élek. Ebben már meg lehet keresni a diszjunkt utakat.

## 14. tétel

MENGER Tétel: Ha  $G$  egy irányított gráf,  $s, t \in V(G)$ , akkor az  $s$ -ből  $t$ -be vezető páronként élidegen irányított utak maximális száma megegyezik az összes irányított  $s$ - $t$  utat lefogó élek minimális számával.

Bizonyítás: Ha létezik  $G$ -ben  $k$  darab ilyen irányított  $s$ - $t$  út, akkor az  $s$ - $t$  utakat lefogó élek száma nyilvánvalóan legalább  $k$ . Nézzük az egyenlőtlenség másik oldaláról is. T.f.h. az  $s$ - $t$  utakat lefogó élek minimális száma  $k$ . Legyen minden él kapacitása 1. Az így kapott hálózatban a maximális folyam értéke legalább  $k$ . Ekkor a Ford-Fulkerson tétel miatt a minimális vágás értéke is legalább  $k$ . Azt már beláttuk, hogy van olyan max. folyam, ahol minden élen a folyamérték 0 vagy 1. Lássuk be, hogy  $G$ -ben van  $k$  élidegen irányított  $s$ - $t$  út. Egy ilyen út legalább van, különben nem lehetne  $k$  a folyam értéke. Az ebben az útban szereplő élek kapacitását csökkentjük nullára, így a folyam értéke legalább  $k-1$  lesz. Folytassuk a gondolatmenetet és kapunk  $k$  élidegen irányított  $s$ - $t$  utat.

MENGER Tétel: Ha  $G$  egy irányított gráf,  $s, t \in V(G)$  két nem szomszédos pont, akkor az  $s$ -ből  $t$ -be vezető, végpontoktól eltekintve pontidegen irányított utak maximális száma megegyezik az összes irányított  $s$ - $t$  utat  $s$  és  $t$  felhasználása nélkül lefogó pontok minimális számával.

Bizonyítás: Készítsünk egy új  $G'$  gráfot. Minden pontot húzzunk szét két ponttá. Ha a  $G$  gráfban egy minimális ponthalmaz lefogja az irányított  $s$ - $t$  utakat, akkor a lefogó pontoknak megfelelő  $(v', v'')$  pontok is lefogó ponthalmazt alkotnak  $s$ - $t$ -re  $G'$ -ben. Kevesebb él nem elég a lefogáshoz, mert ha a lefogó élek közt lennének  $(a'', b')$  típusú élek, akkor ezeket helyettesítjük  $(b', b'')$ -vel, ha  $b' \neq t$ , illetve  $(a', a'')$ -val, ha  $b' = t$ . Így pedig  $G$ -ben egy kisebb lefogó ponthalmazt nyernénk. Vagyis a  $G$ -beli lefogó pontok és a  $G'$ -beli lefogó élek minimális száma egyenlő. Az is könnyen látható, hogy  $G$ -beli pontdiszjunkt utaknak  $G'$ -ben éldiszjunkt utak felelnek meg és fordítva,  $G'$ -beli élidegen utaknak  $G$ -ben pontidegen utaknak felelnek meg. Innen az előző tétel segítségével bizonyítjuk az állítást.

MENGER Tétel: Ha  $G$  egy irányítatlan gráf,  $s, t \in V(G)$ , akkor az  $s$ -ből  $t$ -be vezető élidegen irányítatlan utak maximális száma megegyezik az összes irányítatlan  $s$ - $t$  utat lefogó élek minimális számával.

Bizonyítás: Vezessük vissza irányított gráfos problémára. A bizonyítás a számításelmélet jegyzet 70. oldalán található, hosszú.

MENGER Tétel: Ha  $G$  egy irányítatlan gráf,  $s, t \in V(G)$  két nem szomszédos pont, akkor az  $s$ -ből  $t$ -be vezető, végpontoktól eltekintve pontidegen irányítatlan utak maximális száma megegyezik az összes irányítatlan  $s$ - $t$  utat  $s$  és  $t$  felhasználása nélkül lefogó pontok minimális számával.

Bizonyítás: Előző tételhez hasonlóan.

**TÖBBSZÖRÖS ÖSSZEFÜGGŐSÉG** Definíció: Egy  $G$  gráfot  **$k$ -szorosan összefüggőnek** nevezünk, ha legalább  $k+1$  pontja van, és akárhogy hagyunk el belőle  $k$ -nál kevesebb pontot, a maradék gráf összefüggő marad. A gráf  **$k$ -szorosan élösszefüggő**, ha akárhogy hagyunk el belőle  $k$ -nál kevesebb élt, összefüggő gráfot kapunk. A  $k$ -szoros összefüggőség "erősebb" a  $k$ -szoros élösszefüggőségnél.

A  $G$  gráf akkor és csak akkor  $k$ -szorosan összefüggő, ha legalább  $k+1$  pontja van, és bármely két pontja között létezik  $k$  pontidegen út. Hasonlóan,  $G$  akkor és csak akkor  $k$ -szorosan élösszefüggő, ha bármely két pontja között létezik  $k$  élidegen út.

Bizonyítás: Először a második részt bizonyítjuk. Ha  $G$   $k$ -szorosan élösszefüggő, akkor az  $u$ - $v$  utakat lefogó élek minimális száma nyilván legalább  $k$ . Így Menger idevágó tétele szerint élidegen  $u$ - $v$  utak maximális száma legalább  $k$ . Ennek a résznek a megfordítása is következik a Menger tételből. Ha  $G$   $k$ -szorosan összefüggő, akkor bármely két,  $u, v \in V(G)$  pontot választva legalább  $k$  darab,  $u$ -tól és  $v$ -től különböző pontra van

szükség ahhoz, hogy lefoglaljuk az összes  $u$  és  $v$  közötti utat ( $u-v$  éltől eltekintve). Így az utolsó Menger tétel alapján létezik  $u$  és  $v$  között  $k$  pontidegen út. Ha  $G$  bármely két pontja között létezik  $k$  pontidegen út, akkor nyilván nem lehet ezeket  $k$ -nál kevesebb ponttal lefogni, tehát a  $k$ -szoros összefüggőség következik ebből.

MENGER Tétel: A legalább 3 pontú  $G$  gráf akkor és csak akkor 2-szeresen összefüggő, ha tetszőleges két pontján át vezet kör. Igaz az is, hogy akkor és csak akkor 2-szeresen összefüggő, ha bármely két élén át vezet kör.

Bizonyítás: Az első állítás triviális, hiszen két pontidegen  $u-v$  út együtt egy kört ad, amely átmegy  $u-n$  és  $v-n$ . A második állítás pedig az elsőből következik. Lássuk be, hogy ha  $G$  2-szeresen összefüggő, akkor  $e$ ,  $f$  éleken keresztül van kör. Vegyünk fel két pontot úgy, hogy ezekkel osszuk két részre az  $e$  illetve az  $f$  élt. Az így kapott gráf is 2-szeresen összefüggő. Az első állítás szerint ezen a két ponton át is megy kör, és ez a kör az eredeti gráfban átmegy  $e-n$  és  $f-n$ . A megfordítás ismét nyilvánvaló.



## 15. tétel

Az algoritmusok futása során a következőket tartjuk számon:

$l(e)$  - az  $e$  él hossza

$d(v)$  - a  $v$  pontba az  $s$  kezdőpontból eddigi legrövidebb út hossza.  $d(s) = 0$ .

Kulcslépések:

(\*)  $d(s) = 0$ , minden  $v \neq s$ -re  $d(v) = \infty$

(\*\*) Ha  $x$ -ből vezet egy  $e$  él  $y$ -ba és  $d(y) > d(x) + l(e)$ , akkor  $d(y) = d(x) + l(e)$ .

**DIJKSTRA-ALGORITMUS Algoritmus: Az algoritmus:**

0.  $S = s, T = V \setminus s$  és (\*).

1. Minden  $S$ -beli pontból minden  $T$ -beli pontba vezető  $e$  élre végezzük el (\*\*) javítást.

2. A  $T$ -beli pontok közül legyen  $v_0$  az, amelyiken a  $d(v)$  érték a legkisebb. Tegyük át  $v_0$ -t  $T$ -ből  $S$ -be.

3. Ha  $T$  üres, **STOP**. Ha nem, vissza **1.** lépéshez.

Az algoritmus lépésszáma  $c \cdot n^3$ , mivel az 1. lépés  $k$ . elvégzésekor  $|S| = k$ ,  $|T| = v - k$ , így az összes (\*\*) hívások száma  $\sum k(v - k) = \sum kv - \sum k^2$  és ennek az összege  $k^3$ -höz közelít.

Az algoritmusnak létezik egy kedvezőbb futási idejű változata,  $c \cdot n^2$  lépésszámmal.

**Az optimalizált algoritmus:**

0.  $S = s, T = V \setminus s$  és (\*), valamint  $v_0 = s$ .

1. Csak a  $v_0$ -ból a  $T$ -beli pontokba vezető  $e$  élekre végezzük el a (\*\*) javítást.

2. A  $T$ -beli pontok közül legyen  $v_0$  az, amelyiken a  $d(v)$  érték a legkisebb. Tegyük át  $v_0$ -t  $T$ -ből  $S$ -be.

3. Ha  $T$  üres, **STOP**. Ha nem, vissza **1.** lépéshez.

**FORD-ALGORITMUS Algoritmus:** A Ford-algoritmus megengedi a negatív súlyú éleket is, valamint az algoritmus egyszerűbb, mint a Dijkstra-algoritmus.

0. Számozzuk meg az éleket 1-től  $e$ -ig, ezt rögzítsük le (tetszőleges sorrend). Legyen  $i = 1$  és (\*).

1. A rögzített sorrendben végezzük el a (\*\*) javítást minden élen.

2.  $i = i + 1$ . Ha  $i > v$ , akkor **STOP**. Különben folytassuk **1.** lépésnél.

Az algoritmus lépésszáma  $c \cdot e \cdot v$ , ez jóval nagyobb általában, mint  $n^2$ , ezt az árat kell megfizetnünk a negatív élhossz feature-ért. Mi történik negatív kör esetén? Ezt valahogyan fel kell ismerni! A módosított 2. lépés, ami jelzi, ha negatív összsúlyú körbe kerültünk:

2. Ha az **1.** lépés során egyetlen javítás sem történt, akkor **STOP** (és megvannak a minimális úthosszak). Különben  $i = i + 1$ . Ha  $i \leq v + 1$ , folytassuk **1.** lépésnél, ha pedig  $i > v + 1$ , akkor **STOP** (és van negatív összsúlyú kör).

## 16. tétel

<http://cs.bme.hu/bsz2/dfs.pdf>

FLOYD-ALGORITMUS Algoritmus: A Floyd-algoritmus a gráfban lévő összes pontpár közt megadja a távolságokat. Ezt a Ford-algoritmussal is megtehetjük volna, viszont annak a futási ideje az összes pontból kiindítva  $c \cdot ev^2$ -tel lett volna arányos. A Floyd-algoritmus ezt megteszi mindössze  $c \cdot v^3$  alatt. A sikeres futás feltétele az, hogy a gráfban NE legyen negatív összsúlyú kör.

T.f.h.  $G$  irányított gráf a  $V(G) = v_1, v_2, \dots, v_n$  pontokon. A  $v_i$ -ből  $v_j$ -be mutató él hosszát, azaz súlyát, jelöljük  $l(i, j)$ -vel és t.f.h. a gráfban nincs negatív összsúlyú irányított kör. Ha nincs él  $v_i$ -ből  $v_j$ -be, akkor legyen  $l(i, j) = \infty$ . Továbbá  $l(i, i) = 0$ , minden  $i = 1, 2, \dots, n$ -re. Jelölje  $d^{(k)}(i, j)$  a  $v_i$ -ből  $v_j$ -be vezető legrövidebb olyan irányított út hosszát, mely csak  $k$ -nál szigorúan kisebb pontokon megy át. Így  $d^{(1)}(i, j) = l(i, j)$  és  $d^{(n+1)}$  lesz az eredetileg keresett legrövidebb irányított út hossza lesz  $v_i$ -ből  $v_j$ -be. Világos, hogy a  $v_i$ -ből  $v_j$ -be vezető legrövidebb olyan út, ami csak  $k + 1$ -nél szigorúan kisebb pontokon megy át, vagy átmegy  $v_k$ -n, vagy nem. Ha nem megy át, akkor  $d^{(k+1)}(i, j) = d^{(k)}(i, j)$ . Ha viszont átmegy, akkor  $d^{(k+1)}(i, j) = d^{(k)}(i, k) + d^{(k)}(k, j)$ . Csak azt kell megnéznünk, mely esetben találunk rövidebb utat. Ezek után már világos, hogy az algoritmus lépésszáma  $c \cdot v^3$ -bel arányos.

**Az algoritmus:**

- **0.** Minden  $i, j$  rendezett párra legyen  $d^{(1)}(i, j) = l(i, j)$  és  $k = 2$ .
- **1.** Minden  $i, j$  rendezett párra

$$d^{(k+1)}(i, j) = \min\{d^{(k)}(i, j), d^{(k)}(i, k) + d^{(k)}(k, j)\}$$

- **2.** Ha  $k = n + 1$ , akkor STOP. Különben  $k = k + 1$  és folytassuk **1.** lépésnél.

**IRÁNYÍTOTT ACIKLIKUS GRÁF** Definíció: Egy  $G$  gráfot akkor nevezünk **irányított aciklikus gráfnak** (DAG), ha irányított élei vannak és nem tartalmaz kört.

**TOPOLOGIKUS ELRENDEZÉS** Definíció: Legyen  $G$  egy irányított gráf.  $G$  topologikus elrendezése a csúcsoknak egy olyan  $v_1, v_2, \dots, v_n$  sorrendje, melyben  $x \rightarrow y \in E$  esetén  $x$  előbb van, mint  $y$  (azaz ha  $x = v_i, y = v_j$ , akkor  $i < j$ )

**TOPOLOGIKUS ELRENDEZÉS Lemma:** Ha  $G$  irányított gráf aciklikus, akkor létezik benne nyelő (olyan pont, amiből nincsen kimenő él).

**Bizonyítás:** Legyen  $P$  a leghosszabb irányított utak egyike,  $v$  legyen a végpontja. T.f.h.  $v$  nem nyelő. Járjuk be az utat topologikus sorrendben. Az előző állítás annyit jelent, hogy  $P$  vagy nem a legutolsó elem a topologikus elrendezésben (ellentmondás) vagy egy, a topologikus sorrendben előrébb lévő ponthoz csatlakozik vissza (ellentmondás).

**TOPOLOGIKUS ELRENDEZÉS Tétel:** Egy  $G$  irányított gráfhoz akkor és csak akkor létezik topologikus elrendezés, ha az aciklikus.

**Bizonyítás:** A szükségeset triviális bizonyítani, viszont az elégségességet nem. Az előbbi lemma állítását felhasználjuk a bizonyításhoz. Keressünk ebben a gráfban egy nyelőcsúcsot, ez a  $v_n$  csúcs. Ezt dobjuk ki. Ekkor  $G \setminus v_n$ -ben  $v_{n-1}$  lesz nyelő. Ezt is dobjuk ki. Ismételjük, amíg semmi se marad. Amit "kidobtunk", ha fordítva sorba rendezzük (tehát a legvégén lesz az először kidobott elem), akkor az egy topologikus sorbarendezése lesz  $G$ -nek. A DFS is generál egy ilyen futása során, ha nincs benne visszaél (tehát ha nincs benne kör).

LEGRÖVIDEBB ÉS LEGHOSSZABB ÚT KERESÉSE DAG-BAN Algoritmus: A topologikus rendezést használva lineáris időben, tehát  $n + e$ -vel arányos lépésszámban megoldható a leghosszabb/legrövidebb út keresése. Input legyen a  $G$  irányított gráf és annak egy topologikus sorrendje ( $s$ ).

**Az algoritmus:**

- **0.**  $t(s) = 0$ , minden  $v \neq s$ -re  $t(v) = \infty$ ,  $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}$  súlyfüggvény.
- **1.** FOR  $i=2$  TO  $n$  DO:  
HA  $\exists e = \overrightarrow{v_j v_i}$  él melyre  $t(v_j) \neq \infty$  AKKOR:  $t(v_i) = \min/\max(t(v_j) + w(e) : e = \overrightarrow{v_j v_i}, t(v_j) \neq \infty)$   
END FOR

## 17. tétel

<http://cs.bme.hu/bsz2/dfs.pdf>

A DFS algoritmus a következő adatokat tartja számon:

- $d(v)$ : a  $v$  csúcs mélységi száma
- $f(v)$ : a  $v$  csúcs befejezési száma
- $m(v)$ : a  $v$ -t megelőző csúcs - tehát amiből a  $v$ -t a bejárás elérte
- $a$ : a jelenleg aktív csúcs
- $g$ : az aktuális gyökérpont
- $D$ : az eddigi legnagyobb mélységi szám
- $F$ : az eddigi legnagyobb befejezési szám

DFS Algoritmus: Bemenet: Egy  $n$  csúcsú  $G$  irányított gráf és egy  $s \in V$  csúcs.

- **0.**  $d(s) = 1$ , minden  $v \neq s$ -re  $d(v) = *$ , minden  $v$ -re  $f(v) = *$ , minden  $v$ -re  $m(v) = *$ ,  $a = s$ ,  $g = s$ ,  $D = 1$ ,  $F = 0$ .
- **1.**  
HA létezik olyan  $e = \vec{ab}$  él, melyre  $d(v) = *$ , AKKOR:
  - $D = D + 1$
  - $d(v) = D$
  - $m(v) = a$
  - $a = v$
  - **1.** lépéshez vissza
- **2.**
  - $F = F + 1$
  - $f(a) = F$
  - HA  $a \neq g$ , AKKOR  $a = m(a)$  és **1.** lépéshez vissza
  - HA  $D = n$ , AKKOR **STOP**.
  - Válasszunk olyan  $v$  csúcsot, melyre  $d(v) = *$ .
  - $g = v$ ,  $a = v$ , **1.** lépéshez vissza.

DFS-ERDŐ Definíció:  $s$  csúcsból indítva  $G$  irányított gráfban lefuttatuk a DFS algoritmust. A futáshoz tartozó DFS erdő  $F$ . Legyen  $e = \vec{uv}$  a  $G$ -nek tetszőleges éle. Ekkor

- $e$ -t faélnak nevezzük, ha  $e \in E(F)$ .
- $e$ -t előreélnak nevezzük, ha nem faél, de  $F$ -ben van  $u$ -ból  $v$ -be irányított út (vagyis  $v$  leszármazottja  $u$ -nak).
- $e$ -t visszaélnak nevezzük, ha  $F$ -ben van  $v$ -ből  $u$ -ba irányított út (tehát  $v$  őse  $u$ -nak).
- $e$ -t keresztélnak nevezzük, ha  $F$ -ben sem  $u$ -ból  $v$ -be, se  $v$ -ből  $u$ -ba nincs irányított út.

DFS ÉS ACIKLIKUSSÁG Tétel: Ha  $G$  irányított gráf aciklikus, a DFS futtatásakor nem keletkezik visszlél. Ha nincs visszlél, akkor  $f(v)$  szerinti csökkenő sorrend a topologikus sorrend.

Bizonyítás: Ha keletkezik visszaél és  $e = \overrightarrow{uv}$  ilyen, akkor  $G$  irányított gráf nyilván tartalmaz irányított kört: az  $F$  DFS-erdő tartalmaz  $v$ -ből  $u$ -ba irányított utat (mert  $e$  visszaél), amit  $e$ -vel kiegészítve irányított körré zárhatunk. Tegyük fel ezért, hogy nem keletkezik visszaél. Ha megmutatjuk a tétel 2. állítását, hogy a csúcsoknak a befejezési számozás szerinti fordított sorrendje topologikus rendezés, akkor ebből nyilván következik  $G$  aciklikussága is. Azt kell megmutatnunk, hogy  $G$  minden  $e = \overrightarrow{uv}$  élére  $f(v) < f(u)$ . Mivel feltettük, hogy visszaél nem keletkezett, ezért  $e$  lehet faél, keresztél vagy előreél. Ha  $e$  faél vagy előreél, akkor a DFS eljárás során  $u$  első aktívvá válásakor az  $u$  befejezéséig tartó szakasza során érte el  $v$ -t, így ennek során kellett befejeznie azt, tehát a  $v$ -t előbb fejezte be  $u$ -nál, tehát  $f(v) < f(u)$ . Ha pedig  $e$  keresztél, akkor  $e$  vizsgálatának a pillanatában  $f(v)$  már kapott értéket,  $u$  viszont épp aktív csúcs volt, így ekkor még  $f(u) = *$  volt. Mivel az eljárás egyre nagyobb befejezési számokat ad, ezért  $f(v) < f(u)$  erre is teljesülni fog.