

Algoritmusok és gráfok
NYOLCADIK GYAKORLAT, 2019. november 8.

1. (a) Hány csúcsa és hány éle van az alábbi szomszédossági mátrix-szal adott irányítatlan gráfnak?
(b) Mennyi az egyes csúcsok fokszáma?
(c) Rajzolja le a gráfot!
(d) Van-e kör ebben a gráfban? Van-e út a gráfban az 1-es csúcsból az 4-es csúcsba?
(e) Rajzoljon be egy feszítőfát a gráfba!
2. (a) Honnan látjuk, hogy az alábbi szomszédossági mátrix irányított gráfhoz tartozik?
(b) Hány csúcsa és hány éle van a gráfnak?
(c) Mennyi az egyes csúcsok ki- és be-foka?
(d) Rajzolja le a gráfot!
(e) Mely csúcsokba van irányított út a 3-as csúcsból? Van-e irányított kör ebben a gráfban?

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. A G irányítatlan gráf csúcsai $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, élei pedig $ab, ac, ad, bc, be, bf, cf, df, dg, fe, fh, gh$ (ezt a gráfot néztük az előadáson).
Futassa le az órán tanult szélességi bejárás algoritmus pseudokódját a -ból kiindulva úgy, hogy lépésről lépésre végigköveti, hogy hogyan változik a *bejárva* tömb, a Q sor és a *honnan* tömb.
4. Tegyük fel, hogy egy n csúcsú irányítatlan G gráf szomszédossági mátrix-szal adott. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami meghatározza a gráf éleinek számát.
5. Hogy néz ki az öt pontú teljes gráf szomszédossági mátrixa? (A teljes gráf olyan gráf, ahol minden csúcspár között van él.)
6. (**Vizsga 2018**) Egy irányítatlan G gráfon szélességi bejárást futtattunk az A csúcsból. A csúcsokat A, C, B, D, E, F sorrendben látogattuk meg, a felfedező élek által alkotott feszítőfa élei AC, AB, CD, BE, BF .
(a) Lehetséges-e, hogy a G gráfban van él D és E között?
(b) Lehetséges-e, hogy a G gráfban van él C és E között?
Válaszait indokolja!
7. (**Vizsga 2018**) Egy szomszédossági mátrixával adott n csúcsú irányított G gráfban adott a csúcsoknak egy u_1, u_2, \dots, u_n sorrendje (itt minden csúcs pontosan egyszer szerepel). Azt szeretnénk eldönteni, hogy a csúcsok ebben a sorrendben irányított kört alkotnak-e a gráfban. Adjon erre a feladatra $O(n)$ lépésszámú algoritmust.
8. Egy irányítatlan G gráf a szomszédossági mátrixával adott. Adjon algoritmust, ami eldönti $O(n^2)$ lépésben, hogy
(a) van-e másodfokú csúcs a gráfban.
(b) melyik a legnagyobb fokszám a gráfban.
(c) melyik a leggyakoribb fokszám a gráfban.
9. (**Vizsga 2018**) Egy szomszédossági mátrixával adott n csúcsú irányítatlan G gráfban adott a csúcsok egy 3 színnel való színezése egy, a csúcsokkal indexelt S tömbben, ahol $S[v]$ a v csúcs színe: *lila*, *sárga* vagy *rózsaszín*.
Azt szeretnénk eldönteni, hogy ez egy olyan színezés-e, amiben azonos színű csúcsok között nem fut él G -ben. Adjon erre a feladatra $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust.
10. (**Vizsga 2018**) Szomszédossági mátrixával adott egy n csúcsú irányított G gráf. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami G mátrixából előállítja annak az irányítatlan G_1 gráfnak a szomszédossági mátrixát, aminek csúcsai megegyeznek G csúcsaival és G_1 -ben pontosan akkor van két csúcs összekötve, ha G -ben valamelyik irányban volt él közöttük.

11. **(Mintazh)** Szomszédossági mátrixával adott egy $n \geq 1$ csúcsú irányított gráf. Adjon algoritmust, ami $O(n^2)$ lépésben eldönti, hogy van-e olyan csúcs, melynek ki-foka és be-foka megegyezik.
12. Van-e olyan fa, melyben a fokszámok:
(a) 1, 1, 1, 1, 1, 3, 4? (b) 1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 4?
13. Van-e olyan 8 csúcsú egyszerű, irányítatlan gráf, melyben a fokszámok:
(a) 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 7?
(b) 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6?
14. Egy fában minden pont foka 1, 2 vagy 3. Hány elsőfokú csúcs van, ha a 3 fokúak száma 5?
15. Az n csúcsú irányítatlan, egyszerű G gráf nem tartalmaz kört és k komponense van. Hány éle van G -nek?
16. Legyen G egy $2k$ csúcsú, egyszerű, irányítatlan gráf, ahol mindegyik csúcs foka legalább k . Lásza be, hogy a gráf összefüggő.