Valószínűségszámítás B

1. előadás

Tóth Dávid (BME SZIT)

2023. február 27.

Bevezető

Miért tanulunk valószínűségszámítást?

- véletlen jelenségek a hétköznapokban: a legkézenfekvőbb példák a szerencsejátékok
- fontos szerep olyan szituációkban, ahol valamely esemény kimenetelét nem tudjuk pontosan meghatározni vagy megbecsülni, például mert azt áttekinthetetlenül sok tényező befolyásolja, vagy pedig ezeket a tényezőket nem ismerjük pontosan

Bevezető

Alkalmazási területek (a szerencsejátékokon túl):

- statisztika
- a statisztikán keresztül szinte minden tudomány (fizika, informatika, közgazdaságtan, biztosítási matematika, stb.)
- alkalmazások a matematikán belül (pl. véletlent használó algoritmusok elmélete)

A véletlen matematikai modellje

Kísérlet $\rightarrow$ (véletlen) kimenetel

Szempontok a modellalkotásnál:

- az összes lehetséges kimenetelt egyszerre szeretnénk kezelni
- maga a kísérlet nem lényeges: véletlen események nem csak klasszikus értelemben vett kísérletek eredményeként figyelhetők meg
- pl.: egy városban az egy napon történt közlekedési balesetek összessége véletlen esemény, de nem mondható, hogy azért közlekedünk, hogy megfigyeljük a baleseteket, és a körülmények ebben az esetben nem reprodukálhatók

A véletlen matematikai modellje

Modell: lehetséges kimenetelek $\rightarrow$ matematikai objektumok

Példák:

- kockadobás: az $1, 2, \ldots, 6$ számokat rendeljük a kimenetelekhez
- feldobunk egy érmét ötször: 5 hosszú $F - I$ sorozatokat rendelünk a kimenetelekhez, pl. $FIFFI$ egy lehetséges kimenetel

Eseménytér

- a modell tehát egy nemüres halmaz, melynek elemei a lehetséges kimeneteleknek felelnek meg
- ezt *eseménytérnek* nevezzük, és (tipikusan) Ω-val jelöljük
- az eseménytér elemeit *kimeneteleknek* vagy *elemi eseményeknek* nevezzük, és (tipikusan) ω-val jelöljük őket

Eseménytér

A definíció nagy szabadságot ad, de

- a konkrét példákban gyakran természetesen adódik az eseménytér
- előfordul, hogy több kézenfekvő lehetőség közül választhatunk, de nem mindegyik egyformán praktikus
- a klasszikus példákban tipikusan mindig ugyanazzal a választással fogunk élni

Eseménytér

Példák:

- Dobjunk egy érmével, ekkor a lehetséges kimenetelek a *fej* ill. az *írás*, ennek megfelelően az eseménytér

$$\Omega = \{F, I\}.$$

- Tekintsünk egy hat oldalú dobókockát, ezzel dobva az

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

  eseménytér egy elemét kapjuk.
- Az ötöslottón véletlenszerűen húznak 5 különböző számot az $1, 2, \ldots, 90$ számok közül. A lehetséges kimenetelek olyan számötösök, ahol minden szám 1 és 90 közt van.
  Azaz ha $A = \{1, 2, \ldots, 90\}$, akkor Ω az A halmaz 5 elemű részhalmazaiból áll, vagyis

$$\Omega = \{B \subset A : \ |B| = 5\}.$$

  ($|B|$ jelöli a B halmaz elemszámát)

Eseménytér

A véletlen jelenségekkel kapcsolatban nem csak a kimenetel érdekelhet bennünket, számos egyéb kérdést feltehetünk:

- pl. kockadobás: nagyobbat dobtunk-e háromnál?
- lottóhúzás: mekkora eséllyel húzzák ki a kedvenc számunkat?

A fentiek is véletlen események, de nem célszerű külön eseményteret definiálni, ha a kérdés egy már egyszer modellezett eseményre vonatkozik.

Azt például, hogy 3-nál nagyobbat dobtunk, kifejezhetjük úgy is, hogy 4-et, 5-öt vagy 6-ot dobtunk, azaz az eseménytér $\{4, 5, 6\}$ részhalmazával.

Eseménytér

Definíció. Legyen Ω egy eseménytér, ekkor az Ω részhalmazait *eseményeknek* nevezzük. Azt mondjuk, hogy az $A \subset \Omega$ esemény egy adott konkrét $\omega \in \Omega$ kimenetel esetén *bekövetkezik*, ha $\omega \in A$.

Példa. Kockadobás, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

- legyen E az az esemény, hogy párosat dobunk, ekkor $E = \{2, 4, 6\}$;
- legyen P az, hogy a dobás értéke prímszám, ekkor $P = \{2, 3, 5\}$;
- azt az eseményt, hogy egész számot dobunk, maga az Ω halmaz írja le;
- az, hogy irracionális számot dobunk, egyik lehetséges kimenetel esetén sem teljesül, így ezt az eseményt az üres halmaz adja meg (jele: $\emptyset$).

Eseménytér

Ω, $\emptyset$ minden eseménytér esetén részhalmazok:

- Ω minden egyes kimenetel esetén bekövetkezik, ezért ezt *biztos eseménynek* nevezzük,
- tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén $\omega \notin \emptyset$, ezért az üres halmaz neve *lehetetlen esemény*

Eseménytér

Példa. Tekintsük a lottóhúzás példáját, és legyen H az az esemény, hogy kihúzzák a hármas számot. Ekkor H az $A = \{1, 2, \ldots, 90\}$ halmaz azon 5 elemű részhalmazaiból fog állni (tehát azon 5 elemű részhalmazok halmaza), amelyek tartalmazzák a hármas számot is.

Műveletek eseményekkel

- Az eseményeket gyakran úgy adjuk meg, hogy leszűkítjük a kimenetelek halmazát valamilyen tulajdonság alapján.
- Ezen tulajdonságokat logikai műveletek segítségével összekapcsolhatjuk, ezzel újabb eseményeket definiálva.
- Az ezek által eredményezett események pedig halmazelméleti műveletek végeredményeiként kaphatók meg.

Műveletek eseményekkel

Példa. Kockadobás, E az az esemény, hogy párosat dobunk, P az, hogy prímet. Tekintsük azt az eseményt, hogy

a dobott szám páros *és* prím.

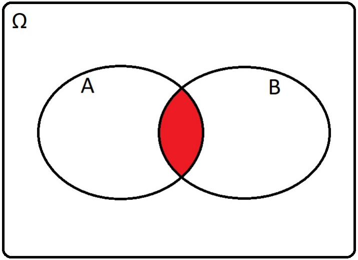
Ez tehát azon ω kimenetelek esetén teljesül, amikre mindkét tulajdonság igaz, azaz benne vannak az E és a P eseményhalmazban is, vagyis ez az esemény

$$E \cap P = \{2\}.$$

Műveletek eseményekkel

logikai *és* $\to$ halmazok *metszete*

Ha $A, B \subset \Omega$ tetszőleges események, akkor $A \cap B$ azon kimenetelekből áll, melyek mind A-ban, mind B-ben benne vannak.

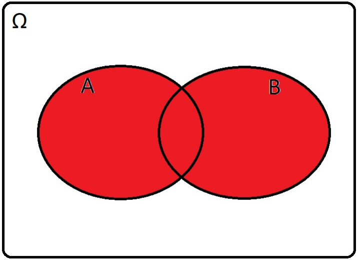


ábra: $A \cap B$

Műveletek eseményekkel

logikai *vagy* $\rightarrow$ halmazok *uniója*

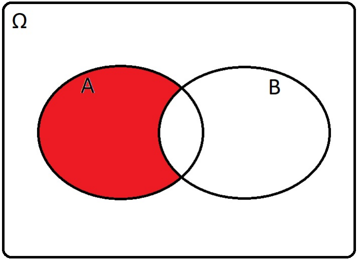
$A \cup B$ éppen azon kimenetelek halmaza, amelyek az A és B események legalább egyikében benne vannak. A példában: a dobott szám páros vagy prím, $E \cup P = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.



ábra: $A \cup B$

Műveletek eseményekkel

Két esemény *különbsége*: $A \setminus B$ azon kimenetelekből áll, amelyek benne vannak A-ban, de nincsenek benne B-ben. A fenti példában: a dobott szám páros, *de nem* prím, $E \setminus P = \{4, 6\}$.

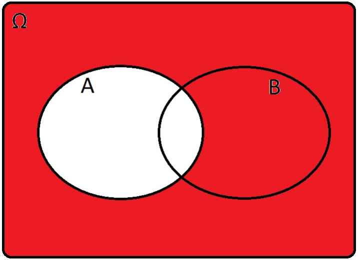


ábra: $A \setminus B$

Műveletek eseményekkel

negáció $\rightarrow$ halmaz *komplementere*

$\overline{A} := \Omega \setminus A$ azon Ω-beli kimenetelek halmaza, amik nincsenek A-ban. A példánkban: a dobott szám *nem* páros, $\overline{E} = \{1, 3, 5\}$.



ábra: $\overline{A}$

Műveletek eseményekkel

Tulajdonságok:

1. Az unió- illetve a metszetképzés is asszociatív és kommutatív:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$
$$A \cup B = B \cup A \qquad\qquad A \cap B = B \cap A.$$

2. Érvényes a következő disztributív szabály:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

3. A különbségképzés felírható a metszet és a komplementer segítségével a következőképp: $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.
4. Egy esemény komplementerének komplementere az eredeti esemény: $\overline{\overline{A}} = A$.

Műveletek eseményekkel

Állítás. (de Morgan-azonosságok) Ha $A, B \subset \Omega$ események, akkor

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

A fenti állítások több eseményre vonatkozó analogonja is érvényes:

$$\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} = \overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_n}, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i},$$

itt n esemény helyett végtelen sok esemény uniójának ill. metszetének komplementerét is vehetnénk.

Műveletek eseményekkel

Definíció. Legyenek $A, B \subset \Omega$ események. Azt mondjuk, hogy A és B *egymást kizáróak* (vagy *diszjunktak*), ha metszetük a lehetetlen esemény, azaz ha $A \cap B = \emptyset$ teljesül.

Példa. A és $\overline{A}$ egymást kizáróak minden $A \subset \Omega$ eseményre, továbbá $\Omega = A \cup \overline{A}$ is teljesül.

Műveletek eseményekkel

Megjegyzés.

- Az esemény fogalmának defincíciójánál valójában nem voltunk egészen precízek. Más forrásokban a fentieknél komplikáltabb definíciókkal találkozhatunk.
- Ha teljes általánosságban szeretnénk felépíteni a valószínűségszámítást, akkor az események definíciójában nem engedhetünk meg tetszőleges részhalmazokat.
- Számos esetben nem kell korlátozásokkal élnünk: ha az eseménytér véges vagy megszámlálhatóan végtelen elemi eseményből áll, akkor egy tetszőleges részhalmaz eseménynek tekinthető.
- Általában is igaz, hogy az eseményeken végzett műveletek nem vezetnek ki az események köréből.

Klasszikus valószínűség

véletlen esmény $\to$ valószínűség

- A valószínűség egyszerűen egy szám: skálázzuk az esélyeket a lehetetlentől a biztosig.
- Megadhatnánk a skálát a $[0; 100]$ intervallumon is (ezt is tesszük, amikor százalékban fejezünk ki esélyeket), de a matematika szemszögéből nézve célszerűbb a $[0; 1]$ intervallum.

Klasszikus valószínűség

A definícióhoz különféle megfontolások vezethetnek.

Példa. Tapasztalati érvelés.

- Megismételhető véletlen kísérletet sokszor elvégezve: a különböző kimenetelek és a kísérletek számának aránya a kimenetelek ún. *relatív gyakorisága*.
- Gondolhatunk úgy egy valószínűségre, mint egy olyan számra, amely körül ez a relatív gyakoriság ingadozik.
- Pl. ha sokszor dobunk egy szabályos kockával, akkor azt tapasztalhatjuk, hogy mind a hat lehetséges eredmény nagyjából az esetek $1/6$ részében adódik.
- A különböző kimenetelek számának összege az összes kísérlet számát adja $\Rightarrow$ a relatív gyakoriságok összege mindig 1 lesz. Hasonlóképp az egyes kimenetelek valószínűségének összegétől is elvárjuk a fenti tulajdonságot.

Klasszikus valószínűség

Példa.

- A kockadobás esetén más megfontolások is elvezethetnek a valószínűség definíciójához.
- Ha egy kocka szabályos, az azt jelenti, hogy homogén anyageloszlású és szimmetrikus, így semmilyen fizikai ok nincs arra, hogy valamely oldalára többször essen, mint egy másikra.

$\Rightarrow$ Ideális esetben minden kimenetel egyformán valószínű kell legyen.

- 6 lehetséges kimenetel van, így minden kimenetel valószínűsége $1/6$.
- Ideális eset a valóságban sosem fordul elő: nincs teljesen szimmetrikus dobókocka, az anyageloszlás sem lehet tökéletesen homogén. De ha elég közel vagyunk az ideálhoz, akkor az apró eltérések elhanyagolásával vétett hiba jelentéktelenül kicsi.

Klasszikus valószínűség

Ezen az előadáson csak olyan példákat tekintünk, ahol minden kimenetel egyformán valószínű.

Példák.

- Pénzérme feldobása, itt (hacsak mást nem mondunk) a továbbiakban mindig feltesszük, hogy $1/2$ valószínűséggel kaphatunk fejet ill. írást.
- Lottóhúzás, pl. ötötslottó: a lehetséges számötösök száma $\binom{90}{5}$, így tehát egy adott számötössel a nyerési esélyünk $\frac{1}{\binom{90}{5}}$.

Klasszikus valószínűség

Általában:

- Ha n lehetséges kimenetel van, azaz $|\Omega| = n$, és minden egyes kimenetel egyformán valószínű, akkor ezek valószínűsége $1/n$.
- Nem csak az egyes kimenetelek valószínűségéről szeretnénk beszélni, hanem egy tetszőleges $A \subset \Omega$ eseményéről is.
- Egy $A \subset \Omega$ esemény nem más, mint néhány kimenetel halmaza, és minden egyes eleme $1/n$-nel növeli az esélyét annak, hogy A bekövetkezik, így A valószínűségére az $|A| \cdot \frac{1}{n} = |A| \,/\, |\Omega|$ definíció logikusan adódik.

Klasszikus valószínűség

Definíció. Legyen Ω egy véges eseménytér, és legyen $A \subset \Omega$. Definiáljuk az A esemény $\mathbb{P}(A)$ *valószínűségét* a

$$\mathbb{P}(A) := \frac{|A|}{|\Omega|}$$

formulával. Ekkor azt mondjuk, hogy az Ω eseménytér, a rajta megadott események (tehát Ω részhalmazai) és a fenti formulával definiált valószínűségük együttesen egy *klasszikus valószínűségi mezőt* alkotnak.

Klasszikus valószínűség

A klasszikus valószínűség tulajdonságai:

1. Mivel $A \subset \Omega$ esetén $0 \leq |A| \leq |\Omega|$ mindig teljesül, így
$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \in [0; 1].$$
2. A biztos esemény, azaz Ω mindig bekövetkezik, és ezzel összhangban
$$\mathbb{P}(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1.$$
3. A lehetetlen eseményre
$$\mathbb{P}(\emptyset) = \frac{|\emptyset|}{|\Omega|} = \frac{0}{|\Omega|} = 0.$$

Klasszikus valószínűség

A klasszikus valószínűség tulajdonságai:

4. Ha $A, B \subset \Omega$ egymást kizáró események, tehát $A \cap B = \emptyset$, akkor $|A \cup B| = |A| + |B|$, mert az utóbbi összegben minden egyes elemet, ami A-ban vagy B-ben van, pontosan egyszer számolunk. Ekkor tehát

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{|\Omega|} = \frac{|A| + |B|}{|\Omega|} = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Következmény. Bármely A esemény esetén A és $\overline{A}$ egymást kizáróak, továbbá $A \cup \overline{A} = \Omega$, tehát

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A})$$

érévényes, ezt átrendezve

$$\boxed{\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A).}$$

Klasszikus valószínűség

A 4. tulajdonsággal kapcsolatban: mit mondhatunk akkor, ha az A és B események nem (vagy nem feltétlenül) egymást kizáróak?

- Az $A \cup B$ elemszámát ekkor nem az $|A| + |B|$ összeg adja, mert ebben kétszer is megszámoltuk azokat az elemeket, amelyek A-ban és B-ben is benne vannak, tehát az $A \cap B$ esemény elemeit.
- Ezen elemek számát tehát még le kell vonnunk az összegből, vagyis a helyes összefüggés a következő:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \, .$$

- Az eseménytér elemszámával leosztva adódik az ún. *szita-formula* (vagy *Poincaré-formula*) a klasszikus valószínűségekre:

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).}$$

Klasszikus valószínűség

Példa. Kockadobás, E: párosat dobunk, P: a dobott szám prímszám. Az eseménytér $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, és

$$\mathbb{P}(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}(P) = \frac{|P|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Számoljuk ki most a $\mathbb{P}(E \cup P)$ valószínűséget.

1. Meghatározzuk az $E \cup P$ esemény elemeit. Ezek azon kimenetelek, amelyek párosak vagy prímszámok, azaz $E \cup P = \{2,3,4,5,6\}$, így
$$\mathbb{P}(E \cup P) = \frac{|E \cup P|}{|\Omega|} = \frac{5}{6}.$$
2. Használhatjuk ehelyett a szita-formulát is:
$$\mathbb{P}(E \cup P) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(P) - \mathbb{P}(E \cap P).$$
Az $E \cap P$ azon kimenetelekből áll, amik párosak és prímek is, ez csak a 2-re teljesül, tehát a keresett valószínűség $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Klasszikus valószínűség

Példa. Számoljuk ki a $\mathbb{P}(E \cup \overline{P})$ valószínűséget. Ismét a szita-formulát használva

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E \cup \overline{P}) &= \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(\overline{P}) - \mathbb{P}(E \cap \overline{P}) \\ &= \mathbb{P}(E) + 1 - \mathbb{P}(P) - \mathbb{P}(E \cap \overline{P}) \\ &= \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{6} = \frac{2}{3},\end{aligned}$$

hiszen $E \cap \overline{P}$ azon kimeneteleket tartalmazza, amelyek párosak és nem prímek, tehát a 4-et és a 6-ot.

Descartes-szorzat

Példa. Két szabályos kockával dobunk. Mi lehet ez esetben az eseménytér?

- Egy kimenetelt megadhatunk úgy, ha megadjuk, hogy melyik számból mennyit dobtunk.
- Ez a modell nem feltételnül praktikus: a két kockát nem tudjuk megkülönböztetni.
- Továbbá: ha sokszor elvégezzük ezt a kísérletet, megfigyelhetjük, hogy az egyes-hatos kombináció nagyjából kétszer olyan gyakran jön ki, mint mondjuk a két darab hatos. (Miért?)

$\Rightarrow$ Nem egyformán valószínűek az egyes kimenetelek, nem klasszikus valószínűségi mezőt kapunk.

Descartes-szorzat

Példa. Két szabályos kockával dobunk. Mi lehet ez esetben az eseménytér?

- Sokszor átláthatóbbá válik a helyzet, ha klasszikus valószínűségi mezővel dolgozunk.
- Ebben a példában ezt egyszerűen elérhetjük azzal, ha a két kockát megkülönböztetjük, és a kimeneteleink $(i; j)$ rendezett számpárok lesznek, ahol az első szám az első kocka, a második szám pedig a második kocka eredményét adja meg.
- Feltételezhetjük, hogy a két dobás eredménye nem befolyásolja egymást, tehát az első kockával az esetek kb. $1/6$ részében adódik bármelyik lehetséges eredmény, és ettől függetlenül a második kockára is ugyanez igaz.

$\Rightarrow$ Egy adott $(i; j)$ párt az esetek nagyjából $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ részében kapunk. Vagyis tekinthetjük úgy, hogy minden lehetséges kimenetel egyformán valószínű.

Descartes-szorzat

Az utóbbi eseménytérben a kimenetelek rendezett párok, ezek az $\Omega \times \Omega$ ún. Descart-szorzat elemei, ahol $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ez a konstrukció könnyen általánosítható:

Definíció. Legyenek $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ tetszőleges nem üres halmazok. Ekkor ezen halmazok *Descartes-szorzata* az

$$\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n := \{(\omega_1, \ldots, \omega_n) : \omega_i \in \Omega_i\}$$

halmaz, azaz azon rendezett n-esek halmaza, melyeknek az i-edik eleme az Ω_i halmaz eleme minden $1 \leq i \leq n$ esetén.

Descartes-szorzat

A fenti definícióban nem követeljük meg, hogy a halmazaink végesek legyenek, azonban a félév első felében többnyire ilyen példákkal fogunk találkozni.

Amennyiben ez teljesül, akkor a Descartes-szorzat elemszáma

$$|\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n| = |\Omega_1| \cdot |\Omega_2| \cdots |\Omega_n| \,,$$

mert egy rendezett n-es i-edik elemére $|\Omega_i|$ lehetséges választásunk van minden $1 \leq i \leq n$ esetén egymástól függetlenül, így az egyes lehetőségek száma összeszorzódik.

Speciálisan, ha $|\Omega_1| = |\Omega_2| = \cdots = |\Omega_n| = k$, akkor a Descartes-szorzatuk elemszáma k^n.

A fenti példában $|\Omega| = 6$ teljesül, így $|\Omega \times \Omega| = 6^2 = 36$.

Descartes-szorzat

Ez a konstrukció jól használható olyan esetekben, amikor egymástól független véletlen eseményeket szeretnénk együtt kezelni, azaz egyetlen valószínűségi mezővel leírni:

Példa. Feldobunk egy érmét ötször egymás után. Jelölje A azt az eseményt, hogy fej és írás is szerepel a dobások között.

- Egy dobás eredménye nem befolyásolja azt követő dobásokat, így tehát (hosszú távon) egymástól függetlenül mindegyik (nagyjából) az esetek felében ad fejet vagy írást.

$\Rightarrow$ Egy adott fej-írás sorozat az esetek (nagyjából) $(1/2)^5 = 1/32$ részében adódik.

Descartes-szorzat

Példa. Feldobunk egy érmét ötször egymás után. Jelölje A azt az eseményt, hogy fej és írás is szerepel a dobások között.

- Legyen $\Omega = \{F, I\}$. Egy dobássorozatot egy öt hosszú $F - I$ sorozat ír le, azaz éppen az

  $$\Omega' := \Omega \times \Omega \times \Omega \times \Omega \times \Omega$$

  szorzathalmaz.
- A fentiek szerint pedig ennek minden eleme éppen $(1/2)^5 = 1/32$ valószínűséggel kell adódjon kimenetelként.
- Mivel $32 = 2^5 = |\Omega|^5$ éppen e szorzathalmaz elemszáma, így tehát egy klasszikus valószínűségi mezőről beszélünk.

Descartes-szorzat

Példa. Hatszor dobunk egy (hat oldalú) dobókockával. A kimeneteleink ekkor 6 hosszú sorozatok, melyek minden tagja egy 1 és 6 közti szám.

- Az előző példához hasonlóan az eseménytér az $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmaz önmagával vett 6-szoros szorzata.
- Legyen K az az esemény, hogy a mind a hat dobásunk különböző. Egy K-ban lévő sorozat az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok mindegyikét pontosan egyszer tartalmazza, ez tehát ezen számok egy sorbarendezése, más szóval *permutációja*.

Descartes-szorzat

Definiíció. Egy n elemű halmaz elemeinek egy sorbarendezését az elemek egy *permutációjának* nevezzük.

Descartes-szorzat

Meghatározzuk a K esemény elemszámát. Hányféle sorrendje létezik 6 elemeknek?

- Az első helyre 6-féle számot választhatunk.
- Ha az első elemet fixáljuk, akkor a második helyre már csak 5-féle szám kerülhet, ezután a harmadik helyre 4-féle, és így tovább.
- Ez összesen $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 = 6!$ (6 faktoriális) lehetőség, vagyis

  $$\mathbb{P}(K) = \frac{720}{6^6} = \frac{5}{324} \approx 0{,}0154,$$

  tehát annak az esélye, hogy hat különböző számot dobunk, csupán $1{,}54\%$.

Descartes-szorzat

A fenti gondolatmenetet általánosítva adódik, hogy n elem különböző sorrendjeinek, vagyis permutációinak száma az első n pozitív egész szorzata:

$$n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n! \qquad (n \text{ faktoriális}).$$

Urnamodellek

- Számos olyan szituációval találkozhatunk, amikor egy véletlen esemény néhány elemnek egy adott halmazból való véletlenszerű kiválasztásaként írható le.
- Például: kihúzunk néhány lapot egy megkevert kártyapakliból, lottóhúzás.
- Ezek az események tipikusan leírhatók egy ún. urnamodellel: adott egy urna, benne n golyó 1-től n-ig számozva, melyeket összekeverünk, majd véletlenszerűen húzunk belőlük (vakon) k darabot.
- Feltesszük, hogy egyforma méretű, alakú és azonos tömegeloszlású golyókkal dolgozunk, vagyis a golyók közt a húzás során nem tudunk különbséget tenni.

Urnamodellek

Húzás visszatevéssel és a sorrend figyelembevételével

- Ebben az esetben az egyes húzások után visszatesszük a kihúzott golyót az urnába (a következő húzás előtt ismét összekeverve a golyókat), és figyelembe vesszük, hogy milyen sorrendben húztuk ki az egyes golyókat.
- A kimeneteleink k hosszú sorozatok, melyeknek minden tagja egy 1 és n közti szám, ezek száma pedig n^k.
- Az eseménytér tehát az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz önmagával k-szor vett Descartes-szorzata.
- Azt feltételezzük, hogy minden egyes húzásnál egyforma valószínűséggel húzzuk ki mindegyik golyót (hiszen a golyókat újrakeverjük minden húzás után), így pedig minden lehetséges kimenetel $1/n^k$ valószínűséggel adódik.

Urnamodellek

Húzás visszatevéssel és a sorrend figyelembevételével

- Ez a korábbi példáinkkal analóg szituáció.
- Egy érme feldobása megfeleltethető egy olyan kísérletnek, amikor két golyó közül választunk vakon. Azaz egy érme k-szor való feldobása megfeleltethető k darab húzásnak 2 egyforma golyó közül visszatevéssel.
- Egy kockával való dobás megfeleltethető egy húzásnak, ahol 6 egyforma golyó közül választunk vakon, a többszöri dobás pedig egy többszöri húzásnak.
- Az eseménytér az iménti példákban nem ugyanaz, mint korábban, de annak elemszáma és a párba állított események valószínűségei megegyeznek, így a valószínűségszámítás szempontjából az egymásnak megfeleltetett példák lényegében azonosak.

Urnamodellek

Húzás visszatevés nélkül és a sorrend figyelembevételével

- n golyóból úgy húzunk ki k darabot, hogy a húzott golyókat nem tesszük vissza, de számon tartjuk a húzások sorrendjét.
- A kimeneteleinket olyan k hosszú sorozatokkal írhatjuk le, melyeknek minden tagja egy 1 és n közötti egész szám, és ezek a tagok különbözők (feltesszük, hogy $1 \leq k \leq n$).
- Az egyes sorozatok egyformán valószínűek, ha valamelyik sorozat valószínűbb volna a többinél, akkor átszámozva a golyókat ugyanezt kapnánk minden sorozatra. Tehát ebben az esetben is egy klasszikus valószínűségi mezőt kapunk.

Urnamodellek

Húzás visszatevés nélkül és a sorrend figyelembevételével

Kimenetelek száma: az első húzásnál n különböző golyóból választhatunk, ha az első húzott golyó fix, akkor a másodiknál már csak $(n-1)$-ből, és így folytatva, a k-adik húzásra már csak $n-k+1$ lehetőségünk marad, így összesen

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

lehetséges kimenetel van, és mindegyikük valószínűsége $\frac{(n-k)!}{n!}$.

Urnamodellek

Definíció. Egy n elemű halmazból k különböző elem ($k \leq n$) egy adott sorrendben való kiválasztását az n elem egy *k-adosztályú ismétlés nélküli variációjának* nevezzük. Ezek száma $n!/(n-k)!$.

Megjegyzés. A $k = n$ esetben az előző definíció éppen az n elem egy permutációját adja. A fenti képlet szerint a permutációk száma $n!/(n-n)! = n!/0!$ volna.

Hogy ez (és sok más) formula érvényes maradjon, a $0!$ értékét 1-nek *definiáljuk*.

Urnamodellek

Az ismétlés nélküli jelző a fenti definícióban arra utal, hogy a sorba rendezett k elem különböző.

Az első urnamodellünkben olyan sorozatokról beszéltünk, ahol megengedtük az ismétlődést, a fentiek mintájára tehát ezeket ismétléses varációknak fogjuk nevezni.

Definíció. Egy n elemű halmazból k (nem feltétlenül különböző) elem egy adott sorrendben való kiválasztását az n elem egy *k-adosztályú ismétléses variációjának* nevezzük. Ezek száma n^k.

Urnamodellek

Húzás visszatevés és a sorrend figyelembevétele nélkül

- n golyóból k darabot húzunk, a golyókat nem tesszük vissza a húzás után, és a húzás eredményénél nem vesszük figyelembe azt, hogy milyen sorrendben húztuk ki a golyókat, csak azt, hogy melyik k golyót húztuk ki.
- Példa: lottóhúzás.
- Minden kimenetelt egyformán valószínűnek tekinthetünk, hiszen ha bármelyik k golyó húzása valószínűbb lenne a többinél, akkor átszámozva a golyókat bármelyik k-asra ugyanez adódna. Tehát klasszikus valószínűségi mezőt kapunk.

Urnamodellek

Lehetséges kimenetelek száma: Az $\{1, \ldots, n\}$ halmaz k elemű részhalmazainak számát keressük. Ezekre a kombinatorikában külön elnevezést használnak:

Definíció. Egy n elemű halmaz k elemű részhalmazait az *n elem k-adoszályú ismétlés nélküli kombinációinak* nevezzük.

Urnamodellek

- Egy adott részhalmazból többféle sorrendben kihúzhatjuk a golyókat, éppen ezért célszerű először számításba venni a sorrendet.
- $n!/(n-k)!$ darab különböző k hosszú sorozatot képezhetünk az n különböző elemből a sorrend figyelembevételével.
- Számoljuk meg, hogy hány esetben szerepel ugyanaz a k elem különböző sorozatokban.
- k különböző elemből $k!$ különböző sorozatot képezhetünk, tehát minden k-ast ennyiszer számoltunk meg az összes k hosszú sorozat összeszámolásánál $\Rightarrow$ azok számát még $k!$-sal kell osztanunk.
- Vagyis a különböző k-asok száma

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (\text{"}n \text{ alatt a } k\text{"}),$$

azaz minden k-as $1/\binom{n}{k}$ valószínűséggel adódik.

Urnamodellek

- A fenti számot *binomiális együtthatónak* is nevezik.
- Az elnevezést az ún. *binomiális tételben* játszott szerepük indokolja:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k,$$

  ahol x és y tetszőleges valós számok és n egy pozitív egész.
- Egyszerű tulajdonságai ($0 \le k \le n$):

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n.$$

Urnamodellek

Példa. Mi a valószínűsége, hogy az ötöslottón minden kihúzott szám páros?

- Az ötöslottón 90 számból húznak ki 5-öt, tehát az össze lehetőség száma, azaz az Ω eseménytér elemszáma $\binom{90}{5}$.
- Legyen A az az esemény, hogy az összes kihúzott szám páros.
- Számoljuk meg, hogy hány ilyen kimenetel van. Ha minden kihúzott szám páros, akkor az összes számot az 1 és 90 közti páros számok halmazából húzták. Ezekből 45 darab van, tehát $\binom{45}{5}$ féleképp tudunk 5 páros számot húzni.
- Azaz

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{45}{5}}{\binom{90}{5}} = \frac{287}{10324} \approx 0{,}0278.$$

Urnamodellek

Melyik modellt válasszuk?

- Sok esetben a válasz logikusan következik a szituációból.
- Pl.: a lottóhúzásnál nem kell figyelembe venni a sorrendet.
- Vannak azoban olyan esetek, amikor a modell nem ilyen egyértelmű.

Urnamodellek

Példa. Egy urnában van két sárga és két piros golyó. Visszatevés nélkül húzva két golyót milyen a valószínűséggel húzunk különböző színű golyókat?

1. megoldás: nem vesszük figyelembe a húzások sorrendjét.

- Két golyót a négyből $\binom{4}{2} = 6$-féleképp húzhatunk, ez az eseménytér elemszáma.
- Két különböző színűt úgy kaphatunk, ha egyet választunk a sárgákból, egyet pedig ettől függetlenül a pirosakból. Ez $\binom{2}{1} \cdot \binom{2}{1} = 2 \cdot 2 = 4$ lehetőség.
- Tehát a keresett valószínűség $4/6 = 2/3$.

Urnamodellek

Példa. Egy urnában van két sárga és két piros golyó. Visszatevés nélkül húzva két golyót milyen a valószínűséggel húzunk különböző színű golyókat?

2. megoldás: számít a húzások sorrendje.

- Ekkor $4 \cdot 3 = 12$-féle kimenetel lehetséges, ez az eseménytér elemszáma.
- Különböző színű golyókat úgy húzhatunk, ha vagy először egy sárgát és másodszor egy pirosat húzunk, vagy pedig először egy pirosat és másodszor egy sárgát. Mindkét eset $2 \cdot 2 = 4$-féleképp következhet be, ez tehát összesen 8 lehetőség.
- Vagyis a keresett valószínűség $8/12 = 2/3$.

Urnamodellek

- A fenti példában nem adtuk meg, hogy a húzás eredményénél figyelembe vesszük-e a sorrendet vagy sem, és mindkét modell ugyanazt a megoldást adta.
- Általában: amennyiben a kérdéses esemény a lehetséges kimenetelek segítségével leírható, úgy a fenti két modell bármelyike ugyanazt a valószínűséget fogja adni. (Miért?)
- Vannak olyan esetek, amikor nem használható mindkét modell, mivel nem tudjuk mindkettőben magát a vizsgált eseményt leírni.
- Például azt az eseményt, hogy elsőre sárgát, másodikra pedig pirosat húzunk, csak abban a modellben kezelhetjük, ahol a húzás sorrendjét is figyelembe vesszük.