

**1. Feladat \* (4+8+4=16 pont)**

- (a) Adja meg az  $f$  függvény Fourier-sorának definícióját!
- (b) Számítsa ki az  $f(x) = x^2$ , ha  $-\pi \leq x < \pi$ ,  $2\pi$  periodikus függvény Fourier-sorát!
- (c) Az előző feladat segítségével adja meg a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$  értékét!

**2. Feladat \* (10+10=20 pont)**

- (a) Számolja ki az  $u(x, y) = x \cdot y$ ,  $v(x, y) = y/x$  koordináta-transzformációhoz tartozó Jacobi-determinánst!
- (b) Határozza meg a  $V = \{2x \leq y \leq 4x, 2 \leq xy \leq 5\}$  sík tartomány területét az előző eredmény felhasználásával!

**3. Feladat (6+4=10 pont)**

- (a) Mondja ki a Lagrange középérték tételt!
- (b) Igazolja, hogy a ha  $f(x)$  deriválható  $[a, b]$ -ben és a deriváltja ott azonosan 0, akkor  $f(x)$  konstans függvény.

**4. Feladat (4+7+7+7=25 pont)**

- (a) Mondja ki a numerikus sorokra vonatkozó gyök-kritérium egyik tanult alakját!
- (b) Vizsgálja meg az alábbi számsorok konvergenciáját (abszolút, feltételes, divergens)!

$$(b.1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n + 5^n} \quad (b.2) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{2.5}}{n^3 + 1} \quad (b.3) \sum_{n=2}^{\infty} (n^{1/n} - 1)^{2n}$$

**5. Feladat (12 pont)**

Oldja meg a következő differenciálegyenletet az adott kezdeti feltétellel!

$$xy' - y = x^2 + 1, \quad y(2) = 5$$

**6. Feladat (7+5+5=17 pont)**

Határozza meg a következő hatványsorok konvergenciasugarát valamint az (a) és (b) esetben a konvergenciatartományt is!

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 5^n}{n} (x+1)^n \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^3} (x+10)^n \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} (x+1)^n$$