ANALÍZIS 1. | **I. Zárthelyi** | **2018. október 11.**
Mérnökinformatikus szak | α-variáns | Munkaidő: 75 perc

---

1. feladat (14 pont)

Adja meg az $iz^3 = \frac{1}{2} \cdot (1-i)^8$ egyenlet összes megoldását.

$$1 - i \overset{\mathbf{2p}}{=} \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right) \Rightarrow (1-i)^8 \overset{\mathbf{2p}}{=} 16\,(\cos 14\pi + \mathrm{i}\sin 14\pi) = 16.$$

így

$$z^3 \overset{\mathbf{2p}}{=} -8\mathrm{i} \overset{\mathbf{2p}}{=} 8\left(\cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}\right),$$

vagyis $z_1 \overset{\mathbf{2p}}{=} 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2\mathrm{i}$,
$z_2 \overset{\mathbf{2p}}{=} 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$,
$z_3 \overset{\mathbf{2p}}{=} 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - \mathrm{i}$.

---

2. feladat (4+12 pont)

a) Ismertesse a $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ definícióját.
b) A definíció alapján igazolja, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n^2+3n+5}{n^2+2n+4} = 7.$$

---

a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $n \geq N(\varepsilon)$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$ **(4p)**
a) Legyen $\forall \varepsilon > 0$,

$$\left|\frac{7n^2+3n+5}{n^2+2n+4} - 7\right| \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{|7n^2+3n+5-7n^2-14n-28|}{n^2+2n+4} =$$

$$\overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{11n+23}{n^2+2n+4} \overset{\mathbf{2p}}{\leq} \frac{11n+23n}{n^2} \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{34}{n} < \varepsilon \overset{\mathbf{2p}}{\Leftarrow} n \geq \cancel{\frac{14}{\varepsilon}}\ \ \frac{34}{\varepsilon}$$

szóval $N(\varepsilon) \overset{\mathbf{2p}}{=} \cancel{\left[\frac{14}{\varepsilon}\right] + 1}$. $\left[\frac{34}{\varepsilon}\right] + 1$

---

3. feladat (11+11+8 pont)
Konvergensek az alábbi sorozatok? Ha igen, mi a határértékük?

$$a)\ \sqrt{3n^2+5n}-\sqrt{3n^2-2n}, \qquad b)\ \left(\frac{4n-5}{4n+3}\right)^{5n}, \qquad c)\ \frac{7^n}{(-5)^n+6^n}.$$

$$a)\ \sqrt{3n^2+5n}-\sqrt{3n^2-2n} \overset{3p}{=} \frac{3n^2+5n-(3n^2-2n)}{\sqrt{3n^2+5n}+\sqrt{3n^2-2n}} =$$

$$\overset{2p}{=} \frac{7n}{\sqrt{3n^2+5n}+\sqrt{3n^2-2n}} \overset{3p}{=} \frac{7}{\sqrt{3+\frac{5}{n}}+\sqrt{3-\frac{2}{n}}} \overset{3p}{\to} \frac{7}{2\sqrt{3}}.$$

$$b)\ \left(\frac{4n-5}{4n+3}\right)^{5n} \overset{6p}{=} \left(\frac{\left(1-\frac{5}{4n}\right)^{4n}}{\left(1+\frac{3}{4n}\right)^{4n}}\right)^{\frac{5}{4}} \overset{5p}{\to} \left(\frac{e^{-5}}{e^{+3}}\right)^{\frac{5}{4}} = e^{-10}.$$

$$c)\ \frac{7^n}{(-5)^n+6^n} \overset{5p}{=} \frac{7^n}{6^n}\cdot\frac{1}{\left(\frac{-5}{6}\right)^n+1} \overset{3p}{\to} \infty$$

---

4. feladat (20 pont)
Legyen (a_n) az $a_1=4$,

$$a_{n+1}=6-\frac{5}{a_n}$$

rekurzióval megadott sorozat. Igazolja, hogy $1\le a_n\le 5$, minden $n\in\mathbb{N}$ esetén. Bizonyítsa be, hogy a sorozat konvergens, és adja meg a határértékét.

Bizonyítsuk a korlátosságot teljes indukcióval: $I.\ 1\le a_1=4\le 5$ **(2p)**

$$II.\ 1\le a_n\le 5 \overset{1p}{\Rightarrow} 1\ge\frac{1}{a_n}\ge\frac{1}{5} \overset{1p}{\Rightarrow} 5\ge\frac{5}{a_n}\ge 1 \overset{2p}{\Rightarrow} 1=6-5\le 6-\frac{5}{a_n}=a_{n+1}\le 6-1=5.$$

(a_n) monoton növő, mert: $I.\ a_2=6-\frac{5}{4}=\frac{19}{4}\ge 4$, **(2p)** és

$$a_n\le a_{n+1} \overset{1p}{\Rightarrow} \frac{1}{a_n}\ge\frac{1}{a_{n+1}} \overset{1p}{\Rightarrow} \frac{5}{a_n}\ge\frac{5}{a_{n+1}} \overset{2p}{\Rightarrow} a_{n+1}=6-\frac{5}{a_n}\le 6-\frac{5}{a_{n+1}}=a_{n+2}.$$

(a_n) korlátos, monoton növő, tehát konvergens (**2p**), vagyis létezik $A = \lim_{n\to\infty} a_n$. Ekkor $A = 6 - \frac{5}{A} \Rightarrow A^2 - 6A + 5 = 0$ (**2p**), tehát $A = 1$ vagy $A = 5$ (**2p**), és mivel $a_n \geq 4$, ezért $\lim_{n\to\infty} a_n = 5$(**2p**).

---

5. feladat (20 pont)

Adja meg az alábbi sorozat torlódási pontjainak halmazát, limesz szuperiorját és limesz inferiorját. Konvergens a sorozat?

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{n^6 + (-1)^n n^6}{5n^4 + 3n + 2}}.$$

Páros n esetén

$$1 \overset{\mathbf{2p}}{\leftarrow} \left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \sqrt[n]{\frac{1}{5}} \overset{\mathbf{3p}}{=} \sqrt[n]{\frac{2n^6}{5n^4 + 3n^4 + 2n^4}} \overset{\mathbf{2p}}{\leq} a_n \overset{\mathbf{1p}}{=} \sqrt[n]{\frac{2n^6}{5n^4 + 3n + 2}} \leq \sqrt[n]{\frac{2n^6}{5n^4}} \overset{\mathbf{2p}}{=} \sqrt[n]{\frac{2n^2}{5}} \overset{\mathbf{1p}}{\rightarrow} 1$$

így a rendőrelv miatt a $a_{2n} \to 1$ (**2p**). Páratlan n esetén $a_n = 0$ (**2p**), vagyis a torlódási pontok halmaza $\{0, 1\}$ (**2p**), $0 = \liminf a_n \neq \limsup a_n = 1$, tehát a sorozat nem konvergens (**2p**).

IMSC feladat (8 IMSC pont)

a) Írja föl azt az $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ transzformációt, ami a komplex számsíkon az origó körül $60°$-kal forgat pozitív irányban!

b) Írja föl azt a $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ transzformációt, ami a komplex számsíkon az 1 pont körül $60°$-kal forgat negatív irányban!

c) Írja föl a $\mathbb{C} \ni z \mapsto f(g(z))$ transzformációt! Mi ennek a transzformációnak a geometriai jelentése?

ANALÍZIS 1. | I. Zárthelyi | 2018. október 11.
Mérnök informatikus szak | β-variáns | Munkaidő: 75 perc

1. feladat (14 pont)
Adja meg az $2iz^3 = (1+i)^8$ egyenlet összes megoldását.

$$1 + i \overset{2p}{=} \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow (1+i)^8 \overset{2p}{=} 16\,(\cos 2\pi + \mathrm{i}\sin 2\pi) = 16.$$

így

$$z^3 \overset{2p}{=} -8\mathrm{i} \overset{2p}{=} 8\left(\cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}\right),$$

vagyis $z_1 \overset{2p}{=} 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2\mathrm{i}$,
$z_2 \overset{2p}{=} 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$,
$z_3 \overset{2p}{=} 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - \mathrm{i}$.

---

2. feladat (4+12 pont)
a) Ismertesse a $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ definícióját.
b) A definíció alapján igazolja, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+2n+3}{n^2+3n+2} = 5.$$

---

a) $\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $n \geq N(\varepsilon)$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$ **(4p)**
a) Legyen $\forall\varepsilon > 0$,

$$\left|\frac{5n^2+2n+3}{n^2+3n+2} - 5\right| \overset{2p}{=} \frac{|5n^2+2n+3-5n^2-15n-10|}{n^2+3n+2} =$$
$$\overset{2p}{=} \frac{13n+7}{n^2+3n+2} \overset{2p}{\leq} \frac{13n+7n}{n^2} \overset{2p}{=} \frac{20}{n} < \varepsilon \overset{2p}{\Leftarrow} n \geq \frac{20}{\varepsilon}$$

szóval $N(\varepsilon) \overset{2p}{=} \left[\frac{20}{\varepsilon}\right] + 1$.

---

3. feladat (11+11+8 pont)
Konvergensek az alábbi sorozatok? Ha igen, mi a határértékük?

$$a)\ \sqrt{5n^2+3n}-\sqrt{5n^2-2n},\qquad b)\ \left(\frac{5n-9}{5n+8}\right)^{7n},\qquad c)\ \frac{6^n}{(-3)^n+5^n}.$$

$$a)\ \sqrt{5n^2+3n}-\sqrt{5n^2-2n} \overset{3p}{=} \frac{5n^2+3n-(5n^2-2n)}{\sqrt{5n^2+3n}+\sqrt{5n^2-2n}} =$$

$$\overset{2p}{=} \frac{5n}{\sqrt{5n^2+3n}+\sqrt{5n^2-2n}} \overset{3p}{=} \frac{5}{\sqrt{5+\frac{3}{n}}+\sqrt{5-\frac{2}{n}}} \overset{3p}{\to} \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$b)\ \left(\frac{5n-9}{5n+8}\right)^{\overset{7n}{5n}} \overset{6p}{=} \left(\frac{\left(1-\frac{9}{5n}\right)^{5n}}{\left(1+\frac{8}{5n}\right)^{5n}}\right)^{7/5} \overset{5p}{\to} \cancel{\left(\frac{e^{-9}}{e^{+8}}\right)^{\frac{4}{7}}} \cancel{= e^{\frac{5}{7}}} \left(\frac{e^{-9/5}}{e^{8/5}}\right)^{7/5} = e^{-\frac{119}{5}}$$

$$c)\ \frac{6^n}{(-3)^n+5^n} \overset{5p}{=} \frac{6^n}{5^n}\cdot\frac{1}{\left(\frac{-3}{5}\right)^n+1} \overset{3p}{\to} \infty$$

---

4. feladat (20 pont)
Legyen (a_n) az $a_1 = 3$,

$$a_{n+1} = 5 - \frac{4}{a_n}$$

rekurzióval megadott sorozat. Igazolja, hogy $1 \le a_n \le 4$, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Bizonyítsa be, hogy a sorozat konvergens, és adja meg a határértékét.

Bizonyítsuk a korlátosságot teljes indukcióval: $I.1 \le a_1 = \quad \le$ **(2p)**

$$II.1 \le a_n \le 4 \overset{1p}{\Rightarrow} 1 \ge \frac{1}{a_n} \ge \frac{1}{4} \overset{1p}{\Rightarrow} 4 \ge \frac{4}{a_n} \ge 1 \overset{2p}{\Rightarrow} 1 = 5-4 \le 5-\frac{4}{a_n} = a_{n+1} \le 5-1 = 4.$$

(a_n) monoton növő, mert: $I.a_2 = 5-\frac{4}{3} = \frac{11}{3} \ge 3$. **(2p)** és

$$a_n \le a_{n+1} \overset{1p}{\Rightarrow} \frac{1}{a_n} \ge \frac{1}{a_{n+1}} \overset{1p}{\Rightarrow} \frac{-4}{a_n} \ge \frac{-4}{a_{n+1}} \overset{2p}{\Rightarrow} a_{n+1} = 5-\frac{4}{a_n} \le 5-\frac{4}{a_{n+1}} = a_{n+2}.$$

(a_n) korlátos, monoton növő, tehát konvergens (**2p**), vagyis létezik $A = \lim_{n\to\infty} a_n$. Ekkor $A = 5 - \frac{4}{A} \Rightarrow A^2 - 5A + 4 = 0$ (**2p**), tehát $A = 1$ vagy $A = 4$ (**2p**), és mivel $a_n \geq 3$ ezért $\lim_{n\to\infty} a_n = 4$(**2p**).

---

5. feladat (20 pont)
Adja meg az alábbi sorozat torlódási pontjainak halmazát, limesz szuperiorját és limesz inferiorját. Konvergens a sorozat?

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{n^7 + (-1)^n n^7}{3n^3 + 2n + 5}}.$$

Páros n esetén

$$1 \overset{2p}{\leftarrow} \left(\sqrt[n]{n}\right)^4 \sqrt[n]{\frac{1}{5}} \overset{3p}{=} \sqrt[n]{\frac{2n^7}{3n^3 + 2n^3 + 5n^3}} \overset{2p}{\leq} a_n \overset{1p}{=} \sqrt[n]{\frac{2n^7}{3n^3 + 2n + 5}} \leq \sqrt[n]{\frac{2n^7}{3n^3}} \overset{2p}{=} \sqrt[n]{\frac{2n^4}{3}} \overset{1p}{\to} 1$$

így a rendőrelv miatt a $a_{2n} \to 1$ (**2p**). Páratlan n esetén $a_n = 0$ (**2p**), vagyis a torlódási pontok halmaza $\{0, 1\}$ (**2p**), $0 = \liminf a_n \neq \limsup a_n = 1$, tehát a sorozat nem konvergens (**2p**).

IMSC feladat (8 IMSC pont)
a) Írja föl azt az $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ transzformációt, ami a komplex számsíkon az origó körül 60°-kal forgat pozitív irányban!
b) Írja föl azt a $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ transzformációt, ami a komplex számsíkon az 1 pont körül 60°-kal forgat negatív irányban!
c) Írja föl a $\mathbb{C} \ni z \mapsto f(g(z))$ transzformációt! Mi ennek a transzformációnak a geometriai jelentése?

IMSC mintamegoldás $\boxed{8}$

a, $f(z) = e^{i\pi/3} \cdot z$ 2

b, $g(z) = 1 + e^{-i\pi/3}(z-1)$ 3

c, $f(g(z)) = e^{i\pi/3}\left(1 + e^{-i\pi/3}(z-1)\right) =$ 2

$$= e^{i\pi/3} - 1 + z$$

Tehát a transzformáció eltolás $e^{i\pi/3} - 1$ -el. 1