EMT VM matematikai alapok

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \lim_{\substack{S(V) \to 0 \\ P \in V}} \frac{1}{|V|} \cdot \oint_{S(V)} \vec{a} \cdot d\vec{s}$$

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \cancel{= \lim_{\substack{L(S) \to 0 \\ P \in S}} \frac{1}{|S|} \oint_{L(S)}}$$

$$(\operatorname{rot} \vec{a}) \cdot \vec{n} = \lim_{\substack{L(S) \to 0 \\ P \in S}} \frac{1}{|S|} \cdot \oint_{L(S)} \vec{a} \cdot d\vec{l}$$

N-L:

$$\int_L \operatorname{grad} u \cdot d\vec{l} = U(B) - U(A)$$

$L: A \to B$

Stokes:

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{a} \cdot \underset{\vec{n} \cdot ds \,=}{d\vec{s}} = \oint_{L(S)} \vec{a} \cdot d\vec{l} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = \vec{0}$$

G-O:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{a} \cdot dV = \oint_{S(V)} \vec{a} \cdot d\vec{s} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{a}) = 0$$

$$\Delta u \triangleq \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \nabla \cdot (\nabla u) = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\Delta \vec{a} \triangleq \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{a}) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{a}) = \Delta a_x \cdot \vec{e}_x + \Delta a_y \cdot \vec{e}_y + \Delta a_z \cdot \vec{e}_z = (\Delta a_x, \Delta a_y, \Delta a_z)$$

$\boxed{\text{EMT VT1}}$ EM tér forrásai (elsődleges - primer)

$\boxed{\text{töltés:}}$ +/- ; kvantált: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ As (C); szabad/kötött

↳ makroszkopikus értelemben ~ folytonos

eloszlások:

töltés-sűrűség

térfogati: $\rho(\vec{r}) = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} \left[\frac{As}{m^3}\right]$, $Q_V = \int_V \rho(\vec{r})\, dV$

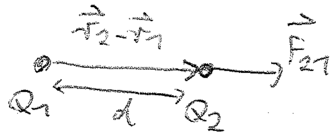
felületi: $\sigma(\vec{r}) = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} \left[\frac{As}{m^2}\right]$, $Q_S = \int_S \sigma(\vec{r})\, dS$

vonalmenti: $q(\vec{r}) = \lim\limits_{\Delta L \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta L} \left[\frac{As}{m}\right]$, $Q_L = \int_L q(\vec{r})\, dl$

ponttöltés: $Q\,[As] \to \rho(\vec{r}) = Q \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ $\quad [\delta] = \frac{1}{m^3}$!

$\forall$ visszavezethető térfogati töltéseloszlásra

coulomb-tv.:



$$\vec{F}_{21} = \underbrace{\frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2}}_{F_{21} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{d^2}} \cdot \left(\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}\right), \quad |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = d$$

$\boxed{\text{áram:}}$ ⊕ töltésre: előjeles mennyiség (S irányítása: $\vec{n}$); szabad/kötött

$I_S = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ (adott felületen átáramló) $[A]$

eloszlások:

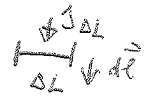
áramsűrűség vektor

térbeli: $\vec{J}\left[\frac{A}{m^2}\right]$, $\underbrace{\vec{n} \cdot \vec{J}(\vec{r})}_{J_n(\vec{r})} = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \frac{I_{\Delta S}}{\Delta S}$, $I_S = \int_S \vec{J}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$

$\vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_b$ $\quad \vec{J}_f = \rho \cdot \vec{v} = \rho_+ \cdot \vec{v}_+ + \rho_- \cdot \vec{v}_-$

free bound $\quad \left[\frac{As}{m^3} \cdot \frac{m}{s}\right]$

~~felületi:~~ ~~vonalmenti:~~

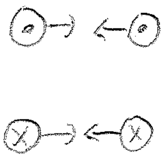


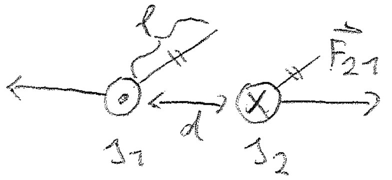
$\vec{n}_L \cdot dl$ $\quad \parallel$ most!

felületi: $\vec{K}\left[\frac{A}{m}\right]$, $\overbrace{\vec{n}_L \cdot \vec{K}(\vec{r})}^{K_n(\vec{r})} = \lim\limits_{\Delta L \to 0} \frac{I_{\Delta L}}{\Delta L}$, $I_L = \int_L \vec{K}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$

vonaláram: $I\,[A]$

Ampère-tv.:





$$F_{21} = \frac{|I_1 \cdot I_2|}{2\pi} \cdot \mu_0 \cdot \frac{l}{d}$$

$$A^2 \cdot \frac{Vs}{Am} = \frac{VAs}{m} = \frac{Ws}{m} = \frac{J}{m} = N$$

amper def: $I_1 = I_2 = 1A,\ d = l = 1m \implies F_{21} = 2 \cdot 10^{-7}\,N$

$$\implies \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{Vs}{Am}$$

természetes állandó: $c = 3 \cdot 10^8\ \frac{m}{s}$

definiált fizikai állandó: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{Vs}{Am}$ $\quad c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}$

- vákuum permeabilitás

származtatott fizikai áll.: $\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 \cdot c^2} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{As}{Vm}$

- vákuum | permittivitás
  | dielektromos állandó

EMT VT2 folytonossági egyenlet különböző alakjai

töltésmegmaradás: zárt rdsz: $\sum Q = \text{áll}$

zárt felület: kifelé folyó áram = térfogati töltéscsökkenés

ha $> \phi$ akkor $> \phi$ $\left(\frac{dQ}{dt} < \phi\right)$

$$\boxed{\oint_{S(V)} \vec{J} \cdot d\vec{s} = -\frac{dQ_V}{dt}}$$

($\vec{n}$ kifelé mutat)

$$J_n \cdot \Delta S = \frac{\Delta Q_V}{\Delta t}$$

$$\boxed{\Delta Q_V = \varrho \cdot v_n \cdot \Delta S \cdot \Delta t}$$

egységnyi idő alatt

felületelem

① G-O: $\oint_{S(V)} \vec{J} d\vec{s} = \int_V \operatorname{div} \vec{J} \, dV$

② $-\frac{dQ_V}{dt} = -\int_V \frac{d}{dt} \varrho \, dV$

$\forall$ V-re

1,2 ⇒ töltések folytonossági egyenlete

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{J} + \frac{d\varrho}{dt} = \phi}$$

(ha $\varrho|_t = \text{áll}$ ($\vec{r}$-től ftlen))

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{J} + \underbrace{\operatorname{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}_{M\,II} = \phi}$$

mágneses teret a totális áramsűrűség gerjeszti: $\boxed{\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}_{össz}}$ (M I)

$\Downarrow$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{J}_{össz} = \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{H}) = \phi}$$

$$\boxed{\vec{J}_{össz} = \vec{J} + \vec{J}_D}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{J} + \operatorname{div} \vec{J}_D = \phi}$$

EMT VT3 | EM tér intenzitásvektorai, erőhatások

"vákuum" → $\mu_0; \varepsilon_0$

távolhatási erőtörvények:
- Coulomb-tv
- Ampére-tv (mágn. erőtv.)
- (Newt.-grav-tv)

elektromos térerősség: $\vec{E}\left[\frac{V}{m}\right]$

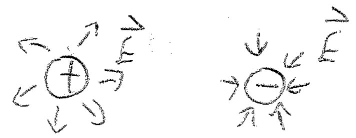
$\vec{E} \triangleq \frac{\vec{F}}{Q}$, $v_Q = 0$ (nyugvó töltés tere)

$Q_0: \vec{r}_0 = 0 \Rightarrow$ ~~$\vec{E}(\vec{r})$~~ $\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r)\cdot\vec{e}_r = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\vec{e}_r}$

→ ponttöltés tere gömbszimm.

Coulomb:

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r})\cdot Q = \frac{Q_0\cdot Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\vec{e}_r}$$



azonos: taszít

ellentétes: vonz

mágneses indukció (fluxussűrűség): $\vec{B}\left[\frac{Wb}{m^2} = \frac{Vs}{m^2} = T\right]$

mozgó töltésre erőhat

Lorentz: $\vec{F} = Q\vec{v}\times\vec{B}$, ha $\vec{E} = 0$

$F = Q\cdot v\cdot B_\perp$ ($B_\perp = B\cdot\sin\alpha$) $\Rightarrow \boxed{B_\perp = \frac{F}{Q\cdot v}}$

$Q\cdot v = \rho\cdot V\cdot v = J\cdot V = I\cdot l$

vonalárram z irányban: $B \perp$ vezető ($B = B_\perp$)

$\boxed{F = I\cdot l\cdot B} \Rightarrow \boxed{B = \frac{F}{I\cdot l}}$

$I_0: r_0 = 0$

$I: r = d$

Ampére: ~~$\vec{E}(\vec{r})$~~ $\boxed{F = \frac{I_0\cdot I}{2\pi}\cdot\mu_0\cdot\frac{l}{r}}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(\vec{r}) = B_\varphi(\vec{r})\cdot\vec{e}_\varphi = \frac{I_0}{2\pi}\cdot\mu_0\cdot\frac{1}{r}}$$

Kapcsolat: M II (Faraday) $\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$, $\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_A \vec{B}\cdot d\vec{A}$

$u_i = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}$

Maxwell egyenletek mikroszkopikus alakja: (Heaviside) (vz. egy. vákuumban)

intenzitásvektorok $(\vec{E}, \vec{B})$ + μ_0, ε_0

$\Rightarrow$ tetszőleges anyagra is használható: részecskénként kell számolni vele a vákuumban!

$D = \varepsilon_0 \cdot E$ $\qquad \varepsilon_0 \cdot \mu_0 = \frac{1}{c^2}$

$B = \mu_0 \cdot H$

EMT VT4 EM tér gerjesztett vektorai, forrásmennyiségek

Elektromos eltolás:

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} \quad \left[\frac{As}{m^2}\right]}$$

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}$$

$$\left[\frac{As}{Vm} \cdot \frac{V}{m} = \frac{As}{m^2}\right]$$

lin., izotr., hom. közeg

közeg → közeg esetén az int. vektorok és gerj. vektorok eltérő fizikai tartalmat hordoznak

→ „vákuum" esetén csak skalárszorzóban térnek el (azonos fizikai tartalom)

→ folytonos anyageloszlás

Gauss: MIV

$$\boxed{\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon}} \Rightarrow \varepsilon \cdot \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_V \rho \, dV$$

$\Downarrow$ G-O

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \rho}, \quad \oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_V \rho \, dV$$

$$\boxed{\rho \equiv \rho_f} \leftarrow \text{nincs beiktatott } \rho_b$$

Mágneses térerősség:

$$\boxed{\vec{H} = \frac{1}{\mu} \cdot \vec{B} \quad \left[\frac{A}{m}\right]}$$

$$\boxed{\mu = \mu_0 \cdot \mu_r}$$

$$\left[\frac{Am}{Vs} \cdot \frac{Vs}{m^2} = \frac{A}{m}\right]$$

lin., izotr., hom. közeg

$$\boxed{\vec{J}_{össz} = \vec{J} + \vec{J}_D}$$

$$\boxed{\vec{J}_{össz} = \vec{J}_f + \vec{J}_D}$$

$\vec{J}_f$: szabad áramsűrűség; $\vec{J}_D$: eltolási áramsűrűség

← nincs beiktatott $\vec{J}_b$ ⇒ $\boxed{\vec{J} \equiv \vec{J}_f}$

$$\boxed{\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \qquad \left[\frac{As}{m^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A}{m^2}\right]$$

$$\boxed{I_{össz} = I + I_D}$$

Ampère-gerj.: MI

$$\boxed{\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu \cdot I_{össz}} \Rightarrow \frac{1}{\mu} \cdot \oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_A \vec{J}_{össz} \cdot d\vec{A} = I + I_D$$

$\Downarrow$ Stokes

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{H} = \underline{\vec{J}_f} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}, \quad \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_A \left(\vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) d\vec{A}$$

$\boxed{\vec{J}}$ vezetési

$\boxed{\vec{J}_D}$ eltolási: változó elektr. tér (+polarizáció) hozza létre

EMT VT5 | E és M anyagjellemzők (makroszkopikus) anyagszerkezeti háttér

$\boxed{\text{Permittivitás:}}$ Elektromos térrel szemben tanúsított ellenállóképesség.

külső elektromos tér ($\vec{E}$) hatására a közeg töltéseloszlása megváltozik: ez jellemezhető $\vec{D}$-vel

vákuum: $\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E}$

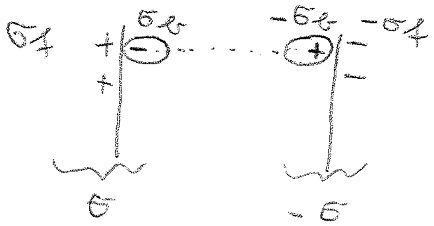
közeg, általános eset: $\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}}$

polarizációs vektor / dipólusmomentum sűrűség

$\boxed{\rho = \rho_f + \rho_b}$

$\boxed{\rho_b = -\mathrm{div}\,\vec{P}}$

pl.: kondenzátor dielektrikuma → polarizáció



mikroszkopikus Maxw.: (IV)

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \left(\rho_f + (-\mathrm{div}\,\vec{P})\right)$$

← div: lineáris művelet

$$\mathrm{div}\left(\vec{E} \cdot \varepsilon_0 + \vec{P}\right) = \rho_f$$

$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho_f}$ (makroszkopikus Maxw.)

⇓

- ált: $\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}$
- lineáris közeg: gerjesztésekre érvényesül a szuperpozíció
  - → $\bar{\bar{\varepsilon}}$ permittivitás tenzor → lineáris $\vec{D}$-$\vec{E}$ kapcsolat: $\vec{P}$ és $\vec{E}$ is arányos.

izotróp (+lineáris) közeg: irányfüggetlen $\vec{D}$-$\vec{E}$ kapcsolat

→ $\bar{\bar{\varepsilon}}$ diagonális ($\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$) → $\vec{D} \parallel \vec{E}$

homogén (+lin+izotróp) közeg: helyfüggetlen $\vec{D}$-$\vec{E}$ kapcsolat

→ ε skalár ⇒ tartományonként homogén közegek

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}$$

$\Downarrow$ <u>homogén közeg</u> (+lin + izotr.)

$$\boxed{\vec{P} = \varepsilon_0 \cdot \chi_e \cdot \vec{E}}$$

$\boxed{\chi_e:}$ <u>elektromos szuszceptibilitás</u>

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 \cdot (1 + \chi_e) \cdot \vec{E}}$$

$\overline{\overline{\varepsilon}}, \overline{\overline{\chi}}$, ha nem homogén, de lin.

$$\boxed{[\varepsilon] = \frac{As}{Vm}} \qquad [\varepsilon_r] = \emptyset$$

$\boxed{\text{Permeabilitás:}}$ ~~Közeg~~ A közegnek a mágneses teret <u>áteresztő képessége</u>. Adott gerjesztőáram hatására létrejövő $\vec{H}$ mágneses tér $\vec{B}$ mágneses indukciót hoz létre az anyagban.

<u>vákuum:</u> $\vec{H} = \dfrac{\vec{B}}{\mu_0}$

<u>általános eset, közeg:</u> $\boxed{\vec{H} = \dfrac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}}$

<u>mágnesezettség vektor</u> / <u>mágneses dipólusmomentum sűrűség</u>

$$\boxed{\vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_M + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}}$$

<u>polarizációs áramsűrűség</u>

$$\boxed{\vec{J}_M = \text{rot}\, \vec{M}}$$

<u>visszahatás nélkül:</u> (I)

$$\boxed{\text{rot}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \underbrace{\frac{1}{c^2}}_{\mu_0 \varepsilon_0} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} = \mu_0 \cdot \left(\vec{J}_f + \text{rot}\, \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}\right) + \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$\leftarrow$ <u>rot:</u> lin. művelet

$$\text{rot}\left(\vec{B} \cdot \frac{1}{\mu_0} - \vec{M}\right) = \vec{J}_f + \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right)$$

$$\boxed{\text{rot}\, \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \quad \text{(visszahatással)} \qquad \boxed{[M] = \frac{Vs}{Am}}$$

$\Rightarrow$ <u>hom (+lin + izotr) közeg:</u> $\boxed{\vec{M} = \chi_m \cdot \vec{H}}$ $\boxed{\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H} = \mu_0 \cdot (1 + \chi_m) \cdot \vec{H}}$

EMT VT6 | maxw. integr., diff. alak, köztük levő kapcs.

makroszkopikus maxwell

I. Ampère-féle gerjesztési-tv. ($\vec{J} \equiv \vec{J}_t$) (gerj. vektorok közti kapcs.)

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \xrightarrow{\text{Stokes}} \boxed{\oint_{L(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{A}} \boxed{= I + I_D}$$

vezetési áram + eltolási áram ⇒ mágneses teret kelt

II. Faraday-féle indukciós-tv. (intenzitásvektorok közti kapcs.)

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \xrightarrow{\text{Stokes}} \boxed{\oint_{L(S)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}} \boxed{= -\frac{\partial \Phi}{\partial t}}$$

mágn. ind. időbeli vált.-a ⇒ elektromos teret indukál (+Lenz)

III. mágneses Gauss

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0} \xrightarrow{\text{G-O}} \boxed{\oint_{S(V)} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0}$$

„fluxusmegmaradás-tv"
nincs mágn. monopólus
(zárt erővonalak)

IV. Gauss ($\rho \equiv \rho_t$)

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \rho} \xrightarrow{\text{G-O}} \boxed{\oint_{S(V)} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_V \rho \, dV} \boxed{= Q_V}$$

zárt felület villamos fluxusa a bezárt töltéssel arányos (E) / egyenlő (D)

maxwell egyenletek:

1) differenciálegyenletek → egy pont kicsiny környezetének viszonyait írják le
⇒ közelhatási törvények

2) evolúciós egyenletek → tér pillanatnyi értékeinek ismeretében leírják a tér alakulását a jövőben

+ konstitúciós-/anyag-/közegegyenletek:

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}} \quad \boxed{B = \mu \cdot \vec{H}} \quad \boxed{\vec{J} = \sigma \cdot (E + E_{\text{beiktatott}})}$$

σ ← fajlagos vezetőképesség

+ energiasűrűség: $\boxed{w = \frac{1}{2} \varepsilon \cdot E^2 + \frac{1}{2} \mu \cdot H^2}$

EMT VI7 | EM vektormezők folyt. feltételei anyaghatárra (E, B, H, D, J)

tartományonként homogén közeg:

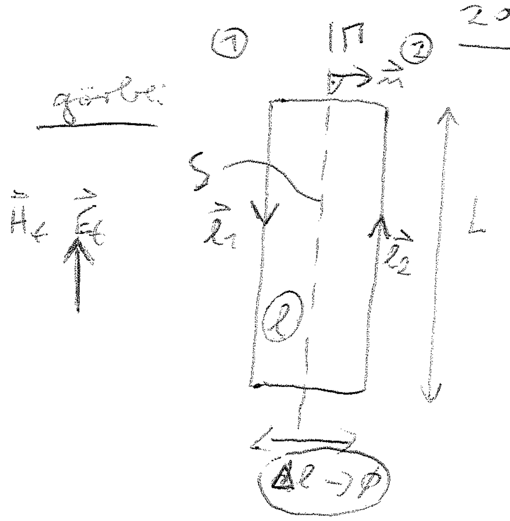
ill. integrális alak: zárt görbe/felület közvetlenül a határfelület 2 oldalán

$\vec{n}$: ① → ②

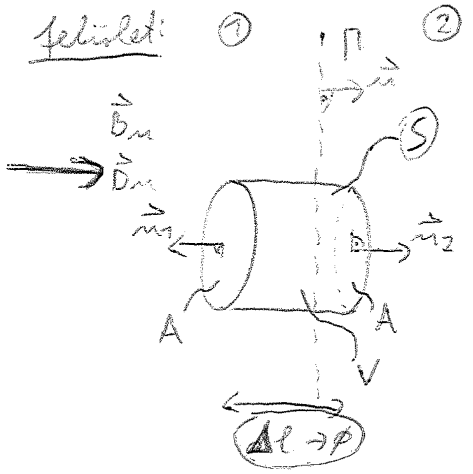
Γ: határfelület

$[\ \ ]_\Gamma$: ugrás a határfelületen ①-ből ②-be

görbe:



felület:



$\boxed{E}$: $\operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{s}$

$$\vec{E}_{2t}\cdot \cancel{L} - \vec{E}_{1t}\cdot \cancel{L} = -\frac{\partial B}{\partial t}\cdot \cancel{L}\cdot \underbrace{\Delta l}_{\to 0} = 0$$

$\boxed{E_{2t} = E_{1t}}$ $\boxed{\vec{n}\times(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0}}$ $\boxed{[\vec{n}\times\vec{E}]_\Gamma = \vec{0}}$

spec: ideális vezető ($\sigma_{vez} = \infty$) ① $\boxed{E_1 = J_1/\sigma_1 = 0}$ $\Rightarrow \boxed{\vec{E}_2 = \vec{E}_{2n}}$

$\boxed{B}$: $\operatorname{div}\vec{B} = 0 \Rightarrow \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0$

$$B_{2n}\cdot \cancel{A} - B_{1n}\cdot \cancel{A} = 0$$

$\boxed{B_{2n} = B_{1n}}$ $\boxed{\vec{n}\cdot(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0}$ $\boxed{[\vec{n}\cdot\vec{B}]_\Gamma = 0}$

$\boxed{H, D, \gamma} \Rightarrow \boxed{V T \beta}$

$\boxed{E, B} \Rightarrow \boxed{VT7}$

$\boxed{EM\ VT8}$ térjellemzők anyaghatáron: σ, K

+ példa $(E, B, \underline{H}, \underline{D}, \underline{J})$

$\boxed{H:}$ $\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \cdot d\vec{s}$

$$\boxed{K = \lim_{L \to 0} \frac{J_s}{L}}$$

$J_{öm} \cdot S = J_s$

$\downarrow \Delta l \to 0$

$\boxed{K \cdot L = J_s}$ $(\underline{S = \Delta l \cdot L})$

$$H_{2t} \cdot \cancel{L} - H_{1t} \cdot \cancel{L} = K \cdot \cancel{L} = J_s$$

$\boxed{H_{2t} = H_{1t} + K}$ $\boxed{\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}}$ $\boxed{[\vec{n} \times \vec{H}]_n = \vec{K}}$

sorrend!

$\boxed{D:}$ $\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho \Rightarrow \int_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_V \rho\, dV$

$$\boxed{\sigma = \lim_{A \to 0} \frac{Q_V}{A}}$$

$\rho \cdot V = Q_V$

$\downarrow \Delta l \to 0$

$\boxed{\sigma \cdot A = Q_V}$ $(\underline{V = A \cdot \Delta l})$

$$D_{2n} \cdot \cancel{A} - D_{1n} \cdot \cancel{A} = \sigma \cdot \cancel{A} = Q_V$$

$\boxed{D_{2n} = D_{1n} + \sigma}$

$\boxed{\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma}$ $\boxed{[\vec{n} \cdot \vec{D}]_n = \sigma}$

$\boxed{J:}$ $\mathrm{div}\,\vec{J} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = -\dfrac{\partial}{\partial t} \int_V \rho\, dV$

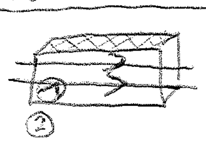
$$J_{2n} \cdot \cancel{A} - J_{1n} \cdot \cancel{A} = -\frac{\partial}{\partial t}(\sigma \cdot \cancel{A}) = -\frac{\partial}{\partial t}(Q_V)$$

$\boxed{J_{2n} = J_{1n} - \dfrac{\partial \sigma}{\partial t}}$

$\boxed{\vec{n} \cdot (\vec{J}_2 - \vec{J}_1) = -\dfrac{\partial \sigma}{\partial t}}$ $\boxed{[\vec{n} \cdot \vec{J}]_n = -\dfrac{\partial \sigma}{\partial t}}$

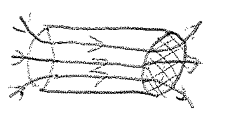
K példa: $\boxed{\text{tekercsvégen a vasmag felületén}}$ – ha $\vec{H} \perp$ felület (akkor LEHET)

~~[illegible]~~ $\boxed{\text{transzformátor vasmag külső felületén}}$ – ez a valóságban igaz is

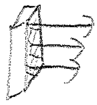


ideálisan

$\vec{H}_1 = \vec{H}_t$; $\vec{H}_2 = \vec{0}$



σ példa: $\boxed{\text{Kondenzátor fegyverzetén}}$



- változás:
  - polarizáció közben, feltöltés közben
  - magára hagyott kondenzátor töltéskiegyenlítődése (dielektrikum vezet)

EMT VT9 energiasűrűség, energiaáramlás

W(t): elektromágneses energia

P(t): térfogatban disszipált teljesítmény

~~P > 0 veszteség~~

$P > 0$ csökkenti | a tér energiáját

$P < 0$ növeli

hőteljesítmény ← kondenzátor kisül R-en

kondenzátor feltöltődik tápról → nem EM eredetű telj

$P_s(t)$: térfogatot határoló A zárt felületen átáramló/átsugárzó telj.

$P_s > 0$ csökkenti | a térenergiát

$P_s < 0$ növeli

energiamérleg:

$$\boxed{\frac{dW}{dt} + P + P_s = 0}$$

$[W] = J$

$[P] = \frac{J}{s} = W$

$[w] = \frac{J}{m^3}$

$[p] = \frac{W}{m^3}$

p: teljesítménysűrűség

w: energiasűrűség

$\vec{S}$: Poynting-vektor: teljesítményáram-sűrűség

- EM energiaáramlás iránya
- $\vec{S}$-re merőleges egységnyi felületen egységnyi idő alatt mennyi energia áramlik át

$$\boxed{[S] = \frac{W}{m^2}}$$

$$\boxed{P_s = \oint_A \vec{S} \cdot d\vec{a} \overset{G\text{-}O}{=} \int_V \operatorname{div} \vec{S} \, dV} \Rightarrow \boxed{p_s = \operatorname{div} \vec{S}}$$

$$\boxed{\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}}$$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{S} = \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{H} - (\nabla \times \vec{H}) \cdot \vec{E} = \underbrace{\operatorname{rot} \vec{E}}_{M\,II.} \cdot \vec{H} - \underbrace{\operatorname{rot} \vec{H}}_{M\,I.} \cdot \vec{E}}$$

$$\boxed{w = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2} \varepsilon \cdot E^2 + \frac{1}{2} \mu \cdot H^2}$$ ← hom. izotr., lin. közeg!

$$\boxed{\frac{dw}{dt} = \varepsilon \cdot \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \cdot \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

Differenciális ohm-tv: $\boxed{\vec{J} = \sigma\cdot\left(\vec{E}+\vec{E}_b\right)+\vec{J}_b}$

σ: fajlagos vezetőképesség $\left[\frac{S}{m}\right]$ (*)

beiktatott: NEM EM eredetű → külső forrás

$$\boxed{p_s = \operatorname{div}\vec{S}} = \underbrace{-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{H}}_{M\,II.} - \underbrace{\left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)}_{M\,I.}\cdot\vec{E} = \boxed{-\frac{dw}{dt} - \vec{J}\cdot\vec{E}} = -\left(\cancel{\frac{dw}{dt}}\right)$$

Poynting tétel

$$= -\frac{dw}{dt} - \left(\vec{J}\cdot\left(\frac{\vec{J}-\vec{J}_b}{\sigma} - \vec{E}_b\right)\right)$$

(*) $R = \rho\cdot\frac{l}{A} \Rightarrow \sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{R}\cdot\frac{l}{A}$

$\left[S\cdot\frac{1}{m} = \frac{S}{m}\right]$

energiamérleg diff. alak:

$$\boxed{-\frac{dw}{dt} = \underbrace{\frac{J^2}{\sigma} - \left(\frac{\vec{J}\cdot\vec{J}_b}{\sigma} + \vec{J}\cdot\vec{E}_b\right)}_{p} + \underbrace{\operatorname{div}\vec{S}}_{p_s}}$$

energiamérleg int. alak: $\int_V dV$

$$\boxed{\underbrace{-\frac{dW}{dt}}_{①} = \underbrace{\int_V \frac{J^2}{\sigma}dV}_{②} - \underbrace{\int_V\left(\frac{\vec{J}\cdot\vec{J}_b}{\sigma}+\vec{J}\cdot\vec{E}_b\right)dV}_{③} + \underbrace{\oint_A \vec{S}\cdot d\vec{a}}_{④}}$$

① EM térben tárolt energia változási sebessége

– $P<0 \Rightarrow W$ nő: $\frac{dW}{dt} > 0 \Rightarrow$ ezért a ⊖ előjel

i.s.

② Joule-hő: hőveszteség a vezetőben [+]

③ Generátor teljesítmény: külső forrás, nem EM eredetű (előjel!)

④ Elsugárzott teljesítmény a felületen keresztül

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dw}{dt} + p + \operatorname{div}\vec{S} = 0}$$

EMT VI 10 | EM tér erőhatásai

Lorentz törvény: EM mezőben mozgó ponttöltés (Q előjele!)

$$\boxed{\vec{F}_L = Q\cdot(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) = \vec{F}_{el} + \vec{F}_{mágn} = Q\cdot\vec{E} + Q\cdot(\vec{v}\times\vec{B})}$$

$\boxed{\vec{F}_{el}}$: $Q>0$ $\vec{E}$ irányába
$Q<0$ $\vec{E}$-vel ellentétesen

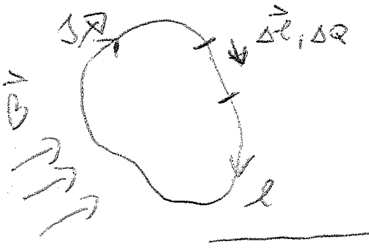
$\boxed{\vec{F}_{mágn}}$: hom. mágn. tér
$\vec{B}$-nek $\vec{v}$-re merőleges komponense fejt ki erőt

$\boxed{\vec{F}_{mágn} \perp \vec{v} \text{ MINDIG!}}$ ⇒ nem végez munkát $\vec{F}_{mágn}$

⇒ részecske kinetikus energiája nem változik, csak oldalirányba eltérül

$\vec{E}$ def: $v=0$
$\vec{B}$ def: $\vec{E}=0$

praktikusabb alak: **vonaláramra:** mágneses térben



a rendszer össztöltése zérus ⇒ $\vec{E}$ hatása nem jelenik meg!

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}, \quad \vec{v} = \frac{\Delta \vec{l}}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{\Delta Q\cdot\vec{v} = I\cdot\Delta\vec{l}}$$

$$\boxed{\Delta\vec{F} = \Delta Q\cdot(\vec{v}\times\vec{B}) = I\cdot(\Delta\vec{l}\times\vec{B})}$$

Lorentz → tapasztalati törvények:

1) Coulomb: $\boxed{|\vec{F}_{21}| = \frac{|Q_1\cdot Q_2|}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{d^2}}$

2) Ampère: $\boxed{|\vec{F}_{21}| = \frac{|I_1\cdot I_2|}{2\pi}\cdot\mu_0\cdot\frac{l}{d}}$ $(\Delta F_{21}, \Delta l)$

$\boxed{l \gg 1}$: nagyon hosszú vezetők

EMT VT 11 | diff. Ohm-tv, nem EM eredetű töltésmozgató hatások (beiktatott)

példa

$$\boxed{\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}}$$

$\boxed{\sigma}$: fajlagos vezetőképesség $\left[\frac{S}{m} = \frac{1}{\Omega m}\right]$

$\boxed{\rho = \frac{1}{\sigma}}$: fajlagos ellenállás $[\Omega m]$

töltésekre ható erő:

1) $Q \cdot E$ elektromos erő $\Rightarrow \boxed{\vec{E}}$

2) F_b nem EM eredetű erő $\rightarrow \boxed{\vec{E}_b = \frac{F_b}{Q}}$

$\boxed{E_b \text{ példa:}}$ • mágneses térben mozgó vezetőben fellépő

$\boxed{\vec{E}_b = \vec{v} \times \vec{B}}$ elektromos térerősség

• akkumulátor belsejében fellépő kémiai eredetű $\vec{E}_b$

- ⊕ töltések mozgatása a ⊖ elektródtól a ⊕-ig

(áramkör zárása)

fajlagos vezetőképesség

$$\Rightarrow \boxed{\vec{J} = \sigma \cdot (\vec{E} + \vec{E}_b)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{J} = \underbrace{\sigma(\vec{E} + \vec{E}_b)}_{} + \underbrace{\vec{J}_b}_{}}$$

$\left[\text{konduktív (vezetési) áramsűrűség}\right]$

térfogati töltéssűrűség

$\boxed{\vec{J}_b = \rho \cdot \vec{v}}$: $\left[\text{konvektív (szállítási) áramsűrűség}\right]$

- ⊕ és ⊖ töltéshordozók mozgása: $\boxed{\vec{v}_+ \cdot \rho_+ + \vec{v}_- \cdot \rho_-}$

→ A kétféle áramsűrűség nem szokott egyszerre ugyanott fellépni.

EMT VIZ | diff maxw, konst., folyt. felt, erők, energiák

M I.:	$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
M II.:	$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
M III.:	$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$
M IV.:	$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho$

konst.:

hom, lin, izotr.

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \vec{E}}, \quad \boxed{P = \varepsilon_0 \cdot \chi_e \cdot \vec{E}}$$

$$\rho_{bound} = -\mathrm{div}\,\vec{P}$$

$$\boxed{\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \cdot \mu_r}}, \quad \boxed{M = \chi_m \cdot \vec{H}}$$

$$\vec{J}_{bound} = \mathrm{rot}\,\vec{M}$$

$$\boxed{\vec{J} = \sigma \cdot (\vec{E} + \vec{E}_b) + \vec{J}_b}, \quad \boxed{\vec{J}_b = \rho \cdot \vec{v}}$$

folyt.: $\vec{n}$: ① → ②

$E_{2t} = E_{1t}$	$[\vec{n} \times \vec{E}] = 0$
$B_{2n} = B_{1n}$	$[\vec{n} \cdot \vec{B}] = 0$
$H_{2t} = H_{1t} + K$	$[\vec{n} \times \vec{H}] = \vec{K}$
$D_{2n} = D_{1n} + \sigma$	$[\vec{n} \cdot \vec{D}] = \sigma$
$J_{2n} = J_{1n} - \dfrac{\partial \sigma}{\partial t}$	$[\vec{n} \cdot \vec{J}] = -\dfrac{\partial \sigma}{\partial t}$

energiasűrűség:

$$\boxed{w = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2}$$

teljesítménysűrűség:

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

Lorentz:

$$\boxed{F = Q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})}$$

EMT VIK3 elektrodinamika felosztása

Sztatikus tér: $\frac{\partial}{\partial t} = \emptyset$, $\vec{J} = \vec{\emptyset}$ ⇒ elektromos és mágneses tér független!

Elektrosztatika ⟵ független ⟶ Magnetosztatika

Elektrosztatika
$rot\,\vec{E} = \emptyset$
$div\,\vec{D} = \rho$ ← forrás
$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$
$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$

lin. izotróp, hom. ⟶ ; ált. ⟶

Magnetosztatika
$rot\,\vec{H} = \emptyset$
$div\,\vec{B} = \emptyset$
$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$
$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ ← forrás

→ Nagyf. szigeteléstechnika
- elektróda
- kapacitás
- potenciál (skalár)

Nyugvó töltések tere

→ Permanens mágnesű villamos gépek
- (mágneses skalárpotenciál)

Permanens mágnesek tere

- - - - - -

Stacionárius tér: $\frac{\partial}{\partial t} = \emptyset$, $\vec{J} \neq \emptyset$ ⇒ mágneses tér függ az elektromostól!

állandó áramok

Stac. áramlási tér ⟵ függ ⟵ Stac. áramok mágneses tere

Stac. áramlási tér
$rot\,\vec{E} = \emptyset$
$div\,\vec{J} = \emptyset$
$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_e) + \vec{J}_e$ ← források

Stac. áramok mágneses tere
$rot\,\vec{H} = \vec{J}$ ← források
$div\,\vec{B} = \emptyset$
$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$

önjöles. indukt. számítás

→ Ellenállásszámítás, földeléstervezés
- ellenállás
- áramkörök

→ Egyenáramú villamos gépek, (~~[illegible]~~) (~~[illegible]~~)
- induktivitás
- (vektorpotenciál)

$$\boxed{div(rot\,\vec{H}) = \emptyset}$$

Kvázistacionárius tér: $\vec{J} \neq \vec{0}$; $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$ DE „lassú" változás

„lassú": $\boxed{\vec{J} \gg \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$ → fémekben mindig teljesül

$\text{rot}\,\vec{H} = \vec{J}$
$\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\text{div}\,\vec{B} = 0$
$\text{div}\,\vec{J} = 0$

$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$
$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_0) + \vec{J}_0$

→ villamos gépek, örvényáram számítás, váltakozó áramú ellenállás szám.

- örvényáram
- szkinhatás, behatolási mélység (áramkisz.)

Elektromágneses hullámok: $\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \neq 0,\ \vec{J} \neq \vec{0}}$

Maxw. egyenletek teljes rendszere

→ Antennák, hullámterjedés

szabad térben

hullámvezetőben

EMT VI.14 elsztat. alapegyenletei + értelmezési; alkalmazási területek

nyugvó töltések tere
(vagy nagyon lassan mozgó)

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \vec{J} = \vec{0}}$$

$\boxed{\operatorname{rot} \vec{E} = 0}$ → örvénymentes tér

$\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \rho_f}$ → a tér forrása a töltés

$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$ hom: $\boxed{\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}}$ → $\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \vec{E}}$

$\vec{P}$: polarizációs vektor / dipólmomentum-sűrűség

$\vec{p}_i$: dipólmomentum-vektor

$$\boxed{\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{V}} \quad \left(\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V}\right)$$

$\boxed{\rho = \rho_f + \rho_b}$ $\boxed{\rho_{bound} = -\operatorname{div} \vec{P}}$

$\boxed{E_{2t} = E_{1t}}$ → tangenciális komponens folytonosan megy át

$\boxed{D_{2n} = D_{1n} + \sigma}$ → normális komponens felületi töltés jelenlétében ugrik

Alkalmazás: Nagyfeszültségű technika, kapacitásszámítás

Fogalmak: Elektróda, kapacitás, potenciál

- - - -

Ha a folyamat karakterisztikus ideje (τ) >> az elrendezés karakterisztikus ideje (T)

⇒ a sztatikus / stacionárius közelítés jó! $\boxed{\tau >> T}$

$$\boxed{T = \frac{h}{c}}$$

h ← karakterisztikus méret / távolság

c ← terjedési sebesség

$$\boxed{\tau = R \cdot C = \frac{L}{R}}$$

EMT VT15 elektrosztatikus skalárpotenciál: bevezetés, fesz, térerősség kapcs.

Segédváltozó: $\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0}$, ezért az $\vec{E}$ vektormező felírható egy ϕ skalármező gradienseként $\boxed{\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(\phi)) = 0}$

$$\boxed{\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\phi} = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)$$

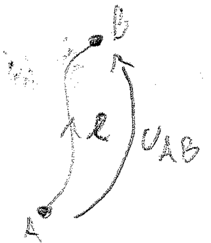
ϕ egy additív állandó erejéig határozatlan:

$$\boxed{\mathrm{grad}(\phi(\vec{r}) + K) = \mathrm{grad}(\phi(\vec{r})) + 0}$$

Elektromotoros erő:

elektrosztatikus eset → független l görbétől

ált. értelemben függ



$$\mathcal{E}_l = \int_l \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{l} = \int_l -\mathrm{grad}(\phi(\vec{r}))\cdot d\vec{l} = \phi(A) - \phi(B)$$

Feszültség:

$$U_{AB} \triangleq \int_A^B -\mathrm{grad}\,\phi(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_B^A \mathrm{grad}\,\phi(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \phi(A) - \phi(B)$$

↓ potenciálkülönbség

Potenciál:

$\vec{r}_0$: referencia pont → $\boxed{\phi(\vec{r}_0) = 0}$ legyen (K)

$$\boxed{\phi_B = \phi_A - U_{AB}}$$

$$\phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}_0) + U_{\vec{r},\vec{r}_0} = \phi(\vec{r}_0) + \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$\boxed{\phi_A = \phi_B + U_{AB}}$$

ϕ_{nagy} $\xrightarrow{\vec{E}}$ ϕ_{kicsi}

$U_{N,K} = \phi_N - \phi_K > 0$

$$[E] = \frac{V}{m}$$

$$[U] = [\mathcal{E}_l] = [\phi] = V$$

EMT VI.16 | Általános Poisson-egyenlete
→ hom. közeg: ált. mo., miért körülményes használni?

Poisson egyenlet ált. alakja (lin. közeg):

$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho$

$\mathrm{div}(\varepsilon \vec{E}) = \rho$

$$\boxed{-\mathrm{div}(\varepsilon \cdot \mathrm{grad}\,\varphi) = \rho}$$

↳ hom + izotr. közeg (ε = konst)

$$\boxed{\mathrm{div}(\mathrm{grad}(\varphi)) = -\frac{\rho}{\varepsilon}} \qquad \boxed{\Delta = \mathrm{div}\,\mathrm{grad} = \nabla \cdot \nabla = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)}$$

$$\boxed{\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}}$$

Közeghatáron a Laplace operátor (Δ) NEM értelmezett!

Szuperpozíció csak azonos közeg esetén:

$$\boxed{\Delta\underbrace{(\varphi_1+\varphi_2)}_{\varphi} = -\frac{1}{\varepsilon}\underbrace{(\rho_1+\rho_2)}_{\rho}}$$

- töltések hatása ($\vec{E}$, φ) szuperponálható
- közegek hatása ($\vec{D}$) csak azonos közeg esetén szuperponálható!

A Poisson-egyenlet használata körülményes, mert a megoldhatóság feltételei:

1) végtelen kiterjedésű, homogén (+lin+izotr.) közeg (ε = konst)

2) ismert töltéseloszlás ($\rho(\vec{r})$)

3) véges kiterjedésű töltés ($\rho(\infty) = 0$)

4) $\Rightarrow$ $\boxed{\varphi(\infty) = 0}$ ← 0 pot a végtelenben $\quad \boxed{\varphi(\infty) = \varphi(r_0) = 0}$ ✓

$\varphi(\vec{r})$

ponttöltés terei: $\boxed{\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}}$, $\boxed{r_0 = \infty}$

távolság Q-tól

kis térfogat töltése ~ ponttöltés: $\boxed{dQ' = \rho(\vec{r}\,') \cdot dV'}$ → $\boxed{d\varphi' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dQ(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}}$

távolság $dQ(\vec{r}\,')$-től

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{ált. mo.:}}$

$\varphi(\vec{r}) = \int dl'$
$\vee$

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_V \frac{\rho(\vec{r}') \cdot dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}$$

ott integráljuk, ahol van töltés

végesen kiterj. tölt: $\boxed{r \to \infty} \Rightarrow \boxed{|\vec{r} - \vec{r}'| \to \infty} \Rightarrow \boxed{\varphi \to \emptyset}$ ✓

„$\lim \vec{r}' < \infty$"

$\boxed{\lim_{\vec{r}' \to \infty} \rho(\vec{r}') = \emptyset}$

$\Rightarrow$ energia: (1, 2, 3, 4 feltételek)

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2} \cdot \int_V \varphi(\vec{r}) \cdot \rho(\vec{r})\, dV}$$

- $\emptyset$ potenciál végtelenben
- (elektródik) töltéseloszlás véges és véges részsel

EMT VI 17 | ponttöltés, egyenes vonaltöltés, töltött síkfelület elektr. tere + potenciáltere
→ módszertan?

Módszertan:

- Gauss-tétel: $\operatorname{div}\vec{D} = \rho$

$$\oint_A \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon}\cdot\int_V \rho\, dV = \frac{Q}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Ha } \vec{E} \parallel \vec{n}_A:} \quad E\cdot A = \frac{Q}{\varepsilon}$$

$$\boxed{E(\vec{r})} = \boxed{E = \frac{Q}{\varepsilon\cdot A}}$$

$$\boxed{\varphi(\vec{r})} = \boxed{\varphi = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{r}}$$

- szuperpozíció (φ, E)
  - pl.: töltéstükrözés, több elektróda
- adott töltéselrendezés és peremfeltételek mellett egyértelmű megoldás
  → ekvivalens töltéselrendezés keresése ⇒ kielégíti a peremfeltételt
    ↳ pontszerű, vonalszerű áramok/töltések terének szuperpozíciója (helyettesítő töltések)

Ponttöltés: (gömbszimm. tér)

$$\boxed{E_r(r) = \frac{Q}{\varepsilon\cdot 4r^2\pi} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{r^2}} \qquad \boxed{r_0 = \infty} \Rightarrow \boxed{\varphi(r_0) = 0}$$

$$\boxed{\varphi(r) = \int_r^{r_0} E_r(r)\, dr = \left[-\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{r}\right]_r^{\infty} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{r}} \qquad \left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)$$

Egyenes, ∞ vonaltöltés: (hengerszimm. tér) $\quad$ $\boxed{q \text{ vonali töltéssűrűség}}$

$$\boxed{E_r(r) = \frac{l\cdot q}{\varepsilon\cdot 2r\pi\cdot l} = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{r}} \qquad \boxed{r_0 = 1} \Rightarrow \boxed{\varphi(r_0) = 0}$$

$$\boxed{\varphi(r) = \left[\frac{q}{2\pi\varepsilon}\cdot\ln r\right]_r^{r_0} = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\cdot\ln\frac{r_0}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{1}{r}} \qquad \left(\ln\left(\frac{r_0}{r}\right)\right)$$

$\boxed{\infty \text{, töltött síkfelület:}}$ ($\vec{E}$ nem függ a távolságtól)

$\boxed{\sigma \text{ felületi töltéssűrűség}}$

$\boxed{Q = A \cdot \sigma}$

$$\left|\vec{E}_z(z)\right| = \frac{\sigma \cdot A}{\varepsilon \cdot 2A}$$

zárt felület: $\boxed{2A}$!

$$\boxed{\vec{E}_z(z) = \pm \vec{e}_z \cdot \frac{\sigma}{2\varepsilon}}$$

$\oplus$; $z > \phi$

$\ominus$; $z < \phi$

$\boxed{z_0 = \phi} \Rightarrow \boxed{\varphi(z_0) = \phi}$

$$\boxed{\varphi(z) = \left[\pm \frac{\sigma}{2\varepsilon} \cdot z\right]_{z}^{z_0 = \phi} = \mp \frac{\sigma}{2\varepsilon} \cdot z}$$

$\ominus$; $z > \phi$

$\oplus$; $z < \phi$

$(z - z_0)$

$$\boxed{\varphi(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon} \cdot |z|}$$

($\vec{E}$ irányába csökken MINDIG)

hisz a $-\text{grad}$ arra mutat, amerre a legmeredekebben csökken!

EMT VT18 statikus töltésdipólus tere

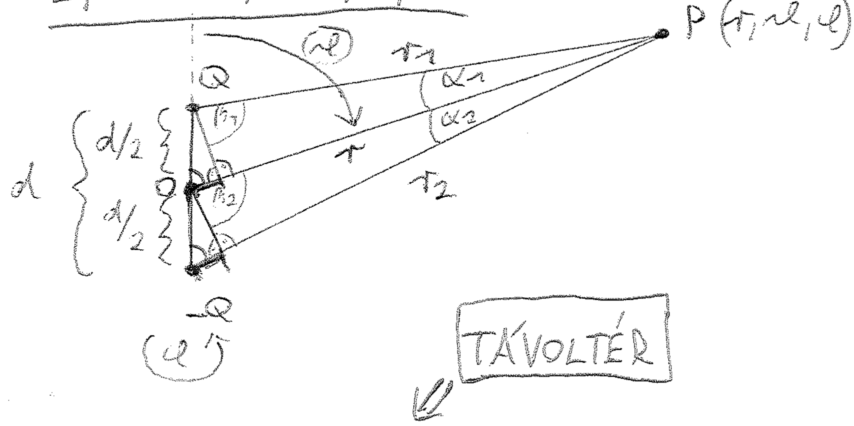
Dipólus: 2, egymáshoz közel elhelyezkedő, azonos nagyságú, de ellentétes előjelű töltés

Forgásszimmetrikus → gömbi koord $\left(\varphi(r,\vartheta,\varphi) = \varphi(r,\vartheta) \quad \vec{E}(r,\vartheta,\varphi) = \vec{E}(r,\vartheta) \right)$

φ-ből indulunk ⇒ $E = -\operatorname{grad}\varphi$

↓

2 ponttöltés szuperpozíció



TÁVOLTÉR

Ha $r \gg d$ $(d \to 0)$

- $\alpha_1, \alpha_2 \approx 0°$ ⇒ $\beta_1, \beta_2 \approx 90°$ ⇒ $H_1 \approx H_2 \approx \frac{d}{2} \cdot \cos\vartheta$

$\measuredangle(Q, 0, P) = \vartheta$ ⇓ $\measuredangle(0, -Q, P) \approx \vartheta$

levegő / vákuum: ε_0

1: Q

2: −Q

$$r_1 = r - \frac{d}{2}\cos\vartheta$$

$$r_2 = r + \frac{d}{2}\cos\vartheta$$

$\varphi(\infty)$ r_0 mindegy ↳ kiesik ⊛

$$\varphi(r,\vartheta) = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left[\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) - \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_0} \right) \right]^{⊛} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r - \frac{d}{2}\cos\vartheta} - \frac{1}{r + \frac{d}{2}\cos\vartheta} \right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{r + \frac{d}{2}\cos\vartheta - (r - d/2\cos\vartheta)}{r^2 - \frac{d^2}{4}\cos^2\vartheta} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{d\cos\vartheta}{r^2 - \frac{d^2}{4}\cos^2\vartheta}$$

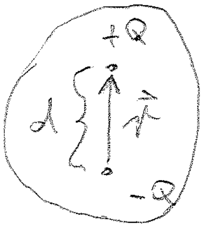
$r \gg d$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(r,\vartheta) \cong \frac{Q \cdot d}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\cos\vartheta}{r^2}}$$

$$\boxed{\varphi(r,\vartheta) = \frac{Q\cdot d}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\cos\vartheta}{r^2} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\cos\vartheta}{r^2}}$$

dipólmomentum-vektor:

$$\boxed{p = Q\cdot d}$$



irány!

$$\boxed{\text{grad}\Big|_{(r,\vartheta,\varphi)} = \left(\frac{\partial}{\partial r},\ \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta},\ \frac{1}{r\cdot\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)}\ !$$

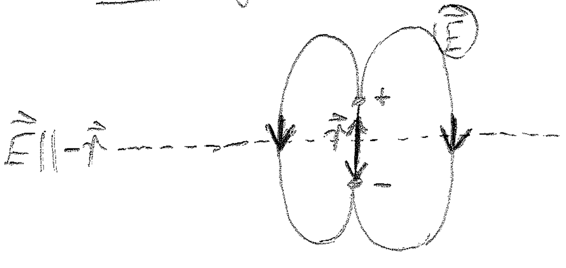
$$\boxed{\vec{E}(r,\vartheta) = -\text{grad}\,\varphi(r,\vartheta)}$$

$$\hookrightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial\varphi} = \phi}$$

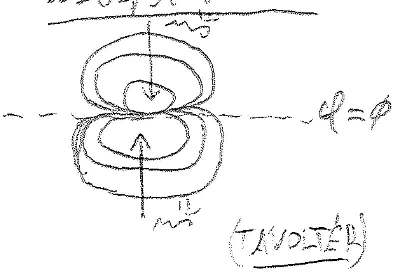
$$\boxed{E_r(r,\vartheta) = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\cos\vartheta}{r^3}} \quad \boxed{E_\vartheta(r,\vartheta) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\sin\vartheta}{r^3}} \quad \boxed{E_\varphi(r,\vartheta) = \phi}$$

$$E_\vartheta(r,\vartheta) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\sin\vartheta}{r^2}\cdot\frac{1}{r}$$

térerősségvonalak



ekvipot. vonalak



$\vartheta = 90°$: vízszintes sík ($r > \phi$): $r \approx \phi$-ban azért nőll el ∞-be, mert a közelítéskor $r \gg d$-t feltételeztünk
→ de valójában ezek ott is igazak

→ $\boxed{\varphi = \phi}$

→ $\boxed{\vec{E}\,||\,-\vec{p}}$

$$\boxed{\vec{P} = \lim_{\Delta V\to\phi}\frac{\sum\vec{p}_i}{\Delta V}}$$

EMT VT 19 | elektrosztatika peremérték-feladata + példák

folytonossági feltétel közeghatáron (Γ): (példa) $\vec{n}: 1 \to 2$

E_t: φ érintő irányú deriváltja

E_n: φ normális irányú deriváltja

EZ A ZÉk

$\Downarrow$

$\boxed{E_{2t} = E_{1t}}$

$\boxed{\left[\vec{n}\times\vec{E}\right]_\Gamma = \phi} \Rightarrow \boxed{\left[\varphi\right]_\Gamma = K := \phi \text{ konst}}$

$\boxed{\varphi_2(\vec{r}) = \varphi_1(\vec{r}) + K}$ $\vec{r}\in\Gamma$

$\boxed{D_{2n} = D_{1n} + \sigma}$

$\boxed{\left[\vec{n}\cdot\vec{D}\right]_\Gamma = \sigma}$ $\boxed{\left[\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]_\Gamma = -\sigma}$

$\Downarrow$ $\vec{n}\cdot\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}$!

$\vec{D} = \varepsilon\cdot(-\operatorname{grad}\varphi)$

$$-\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = -\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} + \sigma$$

$$\boxed{\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = \varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \sigma}$$

Peremérték-feladat:

1) zárt V térrész: ez érdekel $\to$ határfelület (PEREM): Γ
2) V belsejére felírt egyenlet $(\vec{r}\in V\setminus\Gamma)$
3) Γ peremre felírt peremfeltételek $(\vec{r}\in\Gamma)$
   - „külvilág" gerjesztéseinek figyelembe vétele

$\boxed{S_D \cup S_N = \Gamma}$, $\boxed{S_D \cap S_N = \phi}$ diszjunktak

Dirichlet peremfeltétel: $\vec{r}\in S_D \Rightarrow \varphi(\vec{r}) = f(\vec{r})$ adott

Neumann peremfeltétel: $\vec{r}\in S_N \Rightarrow \frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial\vec{n}} \equiv \vec{n}\cdot\operatorname{grad}(\varphi(\vec{r})) = g(\vec{r})$ adott

PL.: Poisson egyenlet mo. zárt véges térrészei

$\vec{r}\in V\setminus\Gamma$	$\vec{r}\in S_D$	$\vec{r}\in S_N$
$\Delta\varphi(\vec{r}) = -\rho(\vec{r})/\varepsilon$	$\left[\varphi(\vec{r})\right]_{S_D} = \phi$	$\left[\varepsilon\frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial\vec{n}}\right]_{S_N} = -\sigma$

A Poisson egyenletnek a peremfeltételeket kielégítő megoldását

kell megtalálni: $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{r} \in (V \setminus \Gamma) \cup (\Gamma)}$

$$\boxed{\Delta \varphi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon}}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{helyettesítő töltések}}$, $\boxed{\text{töltéstükrözés}}$ ezt használja fel

$\boxed{\text{Ha } \boxed{S_D = \text{üreshalmaz}}, \ \phi \text{ egy additív K állandó erejéig határozatlan}}$

pl.: $[\phi]_\Gamma = K$

EMT VT20 | helyettesítő töltések, töltésmozgás → hogy érül a Poisson egyenlet egyértelmű megoldhatóságára?

Helyettesítő töltések: mindet ez a térrész érdekel

Az elektródán kívül a helyettesítő töltések tere közelíti/megegyezik az elektróda terével. ⇒ $\boxed{\text{peremfeltételek teljesülnek}}$

Tipikusan $S_D \equiv$ teljes elektródafelület

$\phi_{S_D} = \phi_0 = \text{konst.}$ ⇒ ekvipotenciális felület kell!
(hely. töltések szuperpozíciója)

Visszavezetés a Poisson egyenlet egyértelmű megoldhatóságára:

tetszőleges $\rho(\vec{r})$ töltéseloszláshoz meghatározható egyértelműen a

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$$

potenciálfüggvény, melyből meghatározható

a $\phi(\vec{r}) = \phi$; ekvipotenciális felület

⇒ van tehát egy Poisson egyenletet kielégítő potenciálfüggvényünk, mely ismert felületen állandó

→ ilyen felületekből és töltéseloszlásokból kellő számú megoldást összegyűjtve, adott felületű elektródához találunk olyan töltéseloszlást, mely az elektróda felületén konstans potenciált hoz létre

Esetünkben ezek a helyettesítő töltéseloszlások pontszerű vagy vonalszerű töltések.

Gömb elektróda: (R) → pontszerű Q töltés a középpontba, $\boxed{r \geq R}$

$$\boxed{E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{r^2}} \qquad \boxed{\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\cdot\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)} = U_{r r_0}$$

Henger elektróda: (R) → q vonaltöltés a középpontba, $\boxed{r \geq R}$

$$\boxed{E_r(r) = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{r}} \qquad \boxed{\phi(r) = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\cdot\ln\frac{r_0}{r}} = U_{r r_0}$$

Több elektróda esetén csak akkor jó közelítés a középpont, ha $\boxed{d \gg R}$!!

→ de így sem lesz teljesen ekvipotenciális a felület

$\boxed{\text{Töltéstükrözés:}}$ $\boxed{\text{pont – sík}}$ / $\boxed{\text{vonal – sík (rúd)}}$, ahol $\boxed{\phi|_{sík} = 0}$

– tipikusan föld

• a sík helyett a síkra tükrözzük a töltést, azonos nagysággal, DE fordított előjellel

→ a féltérben lévővel és a határon (0 pot) jó közelítést kapunk

föld: nullpotenciálú féltér (ideális vezető)

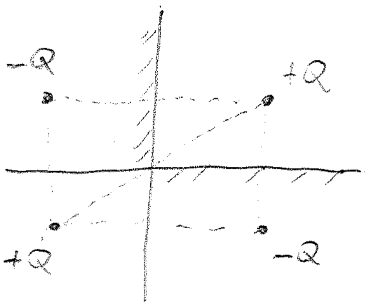
$\boxed{\text{két nullpotenciálú felület:}}$ $\boxed{\alpha = \frac{\pi}{n}}$ $\boxed{n = 1, 2, 3, \ldots}$

⇒ (2n − 1) db helyettesítő töltés kell

• síkra tükrözve ellentétes töltés

• metszéspontra tükrözve azonos töltés

$\frac{\pi}{2}$, $n = 2$, $2n - 1 = 3$



⇒ minden sík $\left(\frac{\pi}{n}\right)$-edben lesz 1-1 töltés

⇒ összesen 2n töltés $[(2n-1)+1]$

⇒ a szimmetria miatt a 2 síkon valóban 0 lesz a potenciál

EMT VI 21 elektr. feszültség peremfeltételek skalárpotenciállal

$\vec{n}$: ① → ②, Γ határfelület

$$\boxed{E_{2t} = E_{1t}}$$

$$\boxed{\phi_2(\vec{r}) = \phi_1(\vec{r}) + K}$$

$$\left[\vec{n} \times \vec{E}\right]_\Gamma = \vec{\phi}$$

$$\left[\phi\right]_\Gamma = K = konst := \phi$$

$$\boxed{D_{2n} = D_{1n} + \sigma}, \quad \boxed{D = \varepsilon \cdot (-\operatorname{grad} \phi)}$$

$$\varepsilon_2 \cdot \vec{n} \cdot \operatorname{grad} \phi_2 = \vec{n} \cdot \operatorname{grad} \phi_1 \cdot \varepsilon_1 - \sigma$$

$$\boxed{\varepsilon_2 \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial \vec{n}} = \varepsilon_1 \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial \vec{n}} - \sigma}$$

$$\left[\vec{n} \cdot \vec{D}\right]_\Gamma = \sigma$$

$$\left[\varepsilon \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}}\right]_\Gamma = \left[\varepsilon \cdot \vec{n} \cdot \operatorname{grad} \phi\right] = -\sigma$$

EM VT22 | elektróda, vezető anyag elektrosztatikus térben, vez-szig folytonossági határfeltételek

Elektróda: elektrosztatikában minden vezető test.

vezető: szabad töltések → $\boxed{\text{töltésmegosztás}}$ ⇒ töltések átrendeződnek:

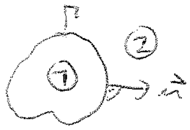
- → terük kompenzálja a külső teret
- → belső térerősség nulla (eredő)
- • relaxációs idő: töltések szétválásához, beállásához szükséges idő

szigetelő: kötött töltések → polarizáció

külső térben

- • elektróda belsejében az össztöltés $\varnothing$
- • felület töltés alakul ki (σ)

Határfeltételek:



$$\boxed{\vec E_1 = \vec 0}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\vec D_1 = \vec 0}$$

$$E_{2t} = E_{1t} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec E_2 = E_{2n}\cdot \vec n}$$

$$D_{2n} = D_{1n} + \sigma = \sigma \Rightarrow \boxed{\vec D_2 = \sigma \cdot \vec n}$$

} felületre merőleges erővonalak

$\boxed{\varphi_2 = \varphi_1} = \boxed{\varphi_\Gamma(\vec r)}$ + $\boxed{E_t = 0}$: tangenciális irányban a gradiens nulla

⇒ a felület mentén konstans a φ

$$\boxed{\varphi_\Gamma(\vec r) = \varphi_\Gamma = konst} \quad \boxed{\text{ekvipot.}}$$

$$\varepsilon_2 E_{2n} = \varepsilon_1 \overset{0}{E_{1n}} + \sigma$$

$$\boxed{E_{2n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_2}}$$

$$\boxed{\vec E_1 = -\text{grad}\,\varphi_1 = 0} \Rightarrow$$ elektróda belsejében is konstans φ_Γ potenciál van

EMT VT23 | kapacitás, energiával való kifejezés tetszőleges mennyiségekkel, „önmagában álló elektróda"

elektródarendszer energiája:

csak felületi töltés van

$$\boxed{W=\frac{1}{2}\int_V \varphi\cdot\rho\, dV = \frac{1}{2}\sum_k \phi_k\cdot\oint_{S_k}\sigma_k\, ds = \frac{1}{2}\sum_k \phi_k\cdot Q_k}$$

$$\Rightarrow \boxed{W_e=\frac{1}{2}\sum_k \phi_k\cdot Q_k}$$

- ha a φ potenciál a végtelenben van
- az elektródák véges kiterjedésűek és véges közelségben vannak

2 elektróda: elektródapár / kondenzátor

$$\boxed{U=(\phi^+-\phi^-)\sim Q}\qquad \boxed{+Q \text{ és } -Q} \Rightarrow \text{össztöltés } \rho \text{ (zárt rendszer)}$$

$\Downarrow$

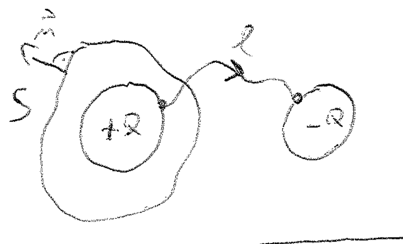
kapacitás: $\boxed{C\triangleq\frac{Q}{U}}$

$$\boxed{W_e=\frac{1}{2}\left(\phi^+\cdot Q+\phi^-\cdot(-Q)\right)=\frac{1}{2}Q\cdot(\phi^+-\phi^-)}=\boxed{\frac{1}{2}\cdot Q\cdot U=\frac{1}{2}\cdot C\cdot U^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{C}}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{C=\frac{2W_e}{U^2}}$$

$$\boxed{C=\frac{Q}{U}=\frac{\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{s}}{\int_l \vec{E}\cdot d\vec{l}}=\frac{\varepsilon\cdot\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s}}{\phi^+-\phi^-}}$$



önmagában álló elektróda: (gömb) $\boxed{r_0=\infty}$

elektróda sugara (?)

$$\boxed{E(r)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{r^2}}\qquad \boxed{r\geq R}\qquad \boxed{U=\varphi(R)-\varphi(r_0)=\varphi(R)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{R}}$$

~~$(\varphi(R)\ldots)$~~

$$\boxed{C=\frac{Q}{U}=4\pi\varepsilon\cdot R}$$

síkkondenzátor:

$$\boxed{C = \frac{Q}{U} = \frac{D \cdot A}{U} = \frac{\varepsilon \cdot E \cdot A}{U} = \varepsilon \cdot \frac{A}{d}}$$

$\boxed{E = \frac{U}{d}}$ mert homogén

EMT VT24 elektródarendszer együtthatói, részkapacitások
szemléletes értelmezés

$n+1$ db elektróda: $k = 0, 1, 2, \dots, n$

n elektróda + föld $\Rightarrow$ zárt rendszer: $\sum Q = 0$

potenciálok: φ_k

töltések: Q_k

$$\Rightarrow Q_0 = -\sum_{k=1}^{n} Q_k$$

$$\varphi_0 = 0$$

potenciál-együttható:

$$\begin{array}{c} \\ n \end{array}\begin{array}{c} 1 \\ \left[\underline{\varphi}\right] \end{array} = \begin{array}{c} n \\ \left[\, n \;\; \underline{\underline{\alpha}} \,\right] \end{array} \cdot \begin{array}{c} 1 \\ \left[\underline{Q}\right] \end{array}\begin{array}{c} \\ n \end{array}$$

$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ (reciprok)

$$\underline{\varphi} = \underline{\underline{\alpha}} \cdot \underline{Q}$$

$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha}}$ mátrix ($n \times n$)

$i = 1, \dots, n$, $\varphi_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \cdot Q_k$

kapacitás együttható:

C_{ik} vagy γ_{ik}

kis C!

$$\underline{\underline{\gamma}} = \underline{\underline{\alpha}}^{-1}$$

α: 2×2 ($n = 2$)

$$\underline{\underline{\gamma}} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha_{11} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{12} \cdot \alpha_{21}} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{22} & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & \alpha_{11} \end{bmatrix}$$

$$\underline{Q} = \underline{\underline{\gamma}} \cdot \underline{\varphi}$$

$i = 1, \dots, n$, $Q_i = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} \cdot \varphi_k$

$+(+\gamma_{ik}\varphi_i - \gamma_{ik}\varphi_i)$ bővítés

$$Q_i = \sum_{k=1}^{n} \left[\gamma_{ik} \cdot \varphi_i - \gamma_{ik} \cdot (\varphi_i - \varphi_k) \right]$$

részkapacitások:

$i = 1, \dots, n$

$k = 1, \dots, n$

földkapacitás: $C_{i0} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik}$

főkapacitás: $C_{ik} = -\gamma_{ik}$

$C_{ik} = C_{ki}$

feszültségek:

$U_{ik} = (\varphi_i - \varphi_k)$

$U_{i0} = \varphi_i - \varphi_0 = \varphi_i$

$U_{ii} = \varphi_i - \varphi_i = 0$

$$\boxed{Q_i = \sum_{k=0}^{n} C_{ik} \cdot U_{ik} = C_{i0} \cdot \varphi_i + \sum_{k=1}^{n} C_{ik} \cdot (\varphi_i - \varphi_k)}$$

$\boxed{i = 1, \dots, n}$

A C_{ii} részkapacitások nem játszanak szerepet ($C_{ii} \cdot U_{ii} = 0$)

– csupán matematikai szempontból vannak jelen

DE: γ_{ii} szerepet játszik! → C_{i0}-ban benne van!

$$\boxed{Q_0} = \sum_{k=0}^{n} C_{0k} \cdot U_{0k} = \sum_{k=1}^{n} C_{k0} \cdot (-\varphi_k) + \underbrace{0}_{\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} C_{ik} \cdot (\varphi_i - \varphi_k) = 0} \boxed{= -\sum_{k=1}^{n} Q_k}$$

teljesül!

Részkapacitások értelmezése ⇒ hálózati helyettesítőkép

az i-edik és k-adik elektródák között egy C_{ik} kondenzátor van

$\boxed{Q_{ik} = C_{ik} \cdot U_{ik}}$ töltéssel

→ hasonlóan az i-edik elektródára és a földre: $\boxed{Q_{i0} = C_{i0} \cdot \varphi_i}$

EMT VI25 | elsztat energia, elektrosztatikus rendszer energia

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2}\int_V \rho(\vec r)\cdot\varphi(\vec r)\,dV = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\varphi_k\cdot\oint_{S_k}\sigma_k\,dA = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\varphi_k\cdot Q_k} =$$

$$\boxed{\varphi_k = \sum_{i=1}^{n}\alpha_{ki}\cdot Q_i} \qquad \boxed{Q_k = \sum_{i=1}^{n}\gamma_{ki}\cdot\varphi_i}$$

$$\boxed{= \frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ki}\cdot Q_i\cdot Q_k = \frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\gamma_{ki}\cdot\varphi_i\cdot\varphi_k}$$

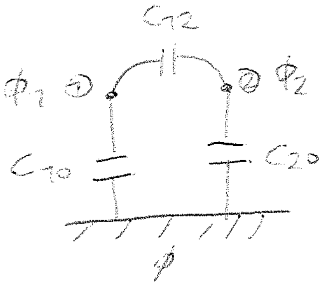
$$\sim\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \qquad \sim\frac{1}{2}C\cdot U^2 \qquad \sim\frac{1}{2}Q\cdot U$$

ált: $\boxed{W_e = \int_V \frac{1}{2}\vec E\cdot\vec D\,dV = \int_V \frac{1}{2}\varepsilon\cdot E^2\,dV}$

$$\left(W_e = \cancel{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{n} C_{ki}\cdot U_{ki}^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} C_{k0}\cdot\varphi_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} C_{ki}\cdot(\varphi_k-\varphi_i)^2\right)$$

Az energia felírható a kölcsönös helyettesítő kapcsolásban szereplő részkapacitások energiáinak összegeként is.

pl: $\boxed{n=2}$



$$\boxed{C_{10} = \gamma_{11}+\gamma_{12}} \qquad \boxed{C_{12} = -\gamma_{12}}\ (C_{21})$$

$$\boxed{C_{20} = \gamma_{21}+\gamma_{22}}$$

$$\boxed{Q_1 = C_{10}\cdot\varphi_1 + C_{12}\cdot(\varphi_1-\varphi_2)}$$

$$\boxed{Q_2 = C_{20}\cdot\varphi_2 + \underset{(C_{21})}{C_{12}}\cdot(\varphi_2-\varphi_1)}$$

$$\boxed{W_e = W_{10}+W_{20}+W_{12} = \frac{1}{2}C_{10}\cdot\varphi_1^2 + \frac{1}{2}C_{20}\cdot\varphi_2^2 + \frac{1}{2}C_{12}\cdot(\varphi_1-\varphi_2)^2}$$

j db részkapacitás (C_g): $\boxed{C_g \mid g = 1,\dots,j}$ $\boxed{U_g}$: kapacitáson eső fesz.

$$\boxed{W_e = \sum_{g=1}^{j}\frac{1}{2}C_g\cdot U_g^2}$$

EMT VT28 stac. áramlási tér alapösszefüggései
→ alkalmazási területek

állandó áramok tere $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, $\vec{J} \neq \vec{0}$
↳ állandó

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{E} = 0}$$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{J} = 0}$$

$$\boxed{\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{H}) = \operatorname{div} \vec{J} = 0}$$

$$\boxed{\vec{J} = \sigma(\underbrace{\vec{E} + \vec{E}_b}) + \vec{J}_b}$$

konduktív (vezetési) áram.

konvektív (szállítási) → beültetett áram.

$$\boxed{\vec{J} = \sigma \vec{E}}$$

$$\boxed{\vec{J}_b = \rho \cdot \vec{v}}$$ ($\oplus$; $\ominus$ töltéshordozók mozgásából)

$$\Rightarrow \boxed{[\phi]_n = 0}$$

$$\boxed{E_{2t} = E_{1t}}$$

∅ töltés

$$\left(\boxed{J_{2n} = J_{1n} - \frac{\partial \sigma}{\partial t} = J_{1n}}\right) \Rightarrow \boxed{J_{2n} = J_{1n}}$$

$$\boxed{[\vec{n} \times \vec{E}] = \vec{0}}$$

$$\boxed{[\vec{n} \cdot \vec{J}] = 0}$$

$D_{2n} = D_{1n} + \rho_s \Rightarrow \boxed{\varepsilon_2 \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial n} = \varepsilon_1 \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial n} - \rho_s}$

$J_{2n} = J_{1n} \Rightarrow \boxed{\sigma_2 \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial n} = \sigma_1 \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial n}}$

Ha:

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \neq \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \Rightarrow \rho_s \neq 0} \text{ (VAN!)}$$

$\vec{E} = - \operatorname{grad} \phi$

Alkalmazás: Ellenállásszámítás, földelésszámítás

Fogalmak: Ellenállás, áramsűrűség

EMT VI27 | Laplace-egyenlet, egyértelmű megoldást biztosító peremfeltételek +példa

$$\vec{J} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}_0\right) + \vec{J}_0$$

$$\operatorname{div}\vec{J} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{H} = 0 = \operatorname{div}\left(-\sigma\cdot\operatorname{grad}\varphi\right) + \operatorname{div}\left(\sigma\vec{E}_0 + \vec{J}_0\right)$$

Lapl.-Poi. egy (stac. áramlási tere):

$$\boxed{\operatorname{div}\left(\sigma\operatorname{grad}\varphi\right) = \operatorname{div}\left(\sigma\vec{E}_0 + \vec{J}_0\right)}$$

speci: • homogén közeg $\Rightarrow$ $\boxed{\sigma = \text{konst}}$

• $\boxed{\vec{E}_{0e} = 0}$, $\boxed{\vec{J}_{0e} = 0}$

$$\boxed{\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \Delta\varphi = 0}$$

Peremfeltételek:

Dirichlet: $\vec{r} \in S_D \Rightarrow \varphi(\vec{r})$ adott

Neumann: $\vec{r} \in S_N \Rightarrow \dfrac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial n}$ adott

pl.: közeghatár:

$$E_{2t} = E_{1t} \Rightarrow \boxed{\left[\varphi\right]_\Gamma = 0}$$

$$\boxed{\left[\sigma\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]_\Gamma = 0}$$

$$J_{2n} = J_{1n} \Rightarrow \left[\vec{n}\cdot\vec{J}\right]_\Gamma = 0$$

$(\operatorname{div}\vec{J} = 0)$

$$D_{2n} = D_{1n} + \rho_S \Rightarrow \left[\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right] = -\rho_S$$

felületi

$\boxed{\text{EMT VI28}}$ ellenállás térjellemző mennyiségként

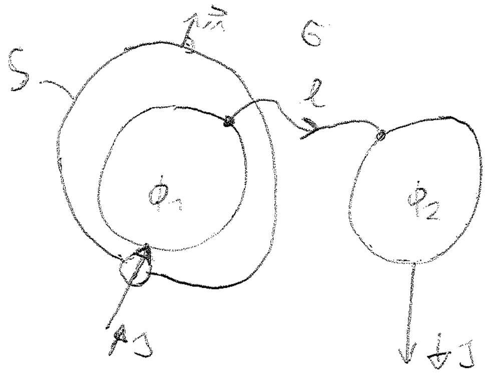
$$\boxed{R = \rho \cdot \frac{l}{A}} \quad [\Omega]$$

⇒ <u>mennyire gátolja az anyag az áram folyását?</u>

⇒ $\boxed{\text{hőveszteség}}$

$$\boxed{\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{E}{\gamma}} \quad [\Omega m]$$

$\boxed{\text{elektródapár:}}$ $\boxed{\text{elektróda: IDEÁLIS vezető!}}$



$$\boxed{R = \frac{U}{J} = \frac{\int_l \vec{E}\,d\vec{l}}{\oint_S \vec{J}\,d\vec{s}} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\oint_S \sigma \cdot \vec{E}\,d\vec{s}}}$$

<u>nem teljesen</u>
<u>zárt</u>

$$\boxed{G = \frac{J}{U}}$$

$$\boxed{P = \frac{U^2}{R} = J^2 \cdot R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = \frac{P}{J^2}}$$

EMT VI29 | térbeli áramlás → Joule-~~hő~~ veszt. számítása

veszteségi teljesítménysűrűség: ($J_0 = p$, $E_0 = p$!)

$$\boxed{p = \vec{J} \cdot \vec{E} = \frac{J^2}{\sigma}} \quad \left[\frac{W}{m^3}\right]$$

$$\boxed{P = \int_V p \, dV = \int_V \frac{J^2}{\sigma} dV = I^2 \cdot R} \rightarrow \boxed{\text{energiát csökkent}} \text{ (belső)}$$

$$\Rightarrow \boxed{R = \frac{P}{I^2} = \frac{\int_V \frac{J^2}{\sigma} dV}{I^2}}$$

$$\operatorname{div} \vec{S} = \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = (\operatorname{rot} \vec{E}) \cdot \vec{H} - (\operatorname{rot} \vec{H}) \cdot \vec{E} = -\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{J} \cdot \vec{E}$$

~~[illegible]~~

$\vec{J} \cdot \vec{E} = p_{veszt}$
$-\vec{H} \frac{\partial B}{\partial t} - \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\frac{\partial w}{\partial t}$
$\operatorname{div} \vec{S} = p_{sug}$

$$\boxed{-\frac{\partial w}{\partial t} = p_{veszt} + p_{sug}}$$

$\boxed{\text{ÉMT VT30}}$ stac. áraml. – elsztat analógia (meddig terjed?)
tükrözés: mikor, hogyan?

Stacionárius áramlás

$rot\,\vec{E} = 0$

$div\,\vec{J} = 0$ „áram nyelőforrás" → zárt felület

$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$ $\left(\sigma(\vec{E}+\vec{E}_{0}) + \vec{J}_{0}\right)$

~~div(σ grad ...)~~ $\oint_A \vec{J}\,d\vec{a} = I$

$div(\sigma\, grad\, \varphi) = div(\sigma \vec{E}_{0} + \vec{J}_{0})$

Elektrosztatika

$rot\,\vec{E} = 0$

$div\,\vec{D} = \rho$

$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$

$\oint_A \vec{D}\,d\vec{a} = Q$

$div(\varepsilon\, grad\, \varphi) = -\rho$

töltésmentes ⊛ } analógia ⇓ $\Delta\varphi = 0$
forrásmentes

elsztat.	$\vec{E}$	φ	ε	$\vec{D}$	Q	q	ρ	C	C_{ij}	C_{ik}
stac. ár.	$\vec{E}$	φ	σ	$\vec{J}$	I	i	$-div(\sigma\vec{E}_{0}+\vec{J}_{0})$	G	G_{ij}	G_{ik}

$div\,\vec{D} = 0$
$div\,\vec{J} = 0$

⊛ $\boxed{\rho = 0}$ $\boxed{E_{0}, J_{0} = 0}$

$\boxed{C = \frac{Q}{U}}$ $\boxed{G = \frac{I}{U}}$

$\boxed{\text{Analóg jelenségek: Differenciál egyenleteik és peremfeltételeik azonos alakúak.}}$

analógia határa: ideális szigetelő: $\sigma = 0$
$\varepsilon = 0$ anyag viszont nem létezik

$\boxed{\text{Tükrözés:}}$ homogén közeg → $\boxed{\sigma = konst}$ (J)
⇒ helyettesítő pontszerű / vonalszerű „áramforrás" (VAN kis hozzávezetés, melyet elhanyagolunk a modellben) tere eleget tesz az eredeti peremfeltételeknek

$\boxed{\text{Közeghatár:}}$ gömbforrás $\sigma < \infty$ közegben elektróda → ideális vezető + ideális vezető féltér (föld), → $\sigma = \infty$ (☐) $(E_t = 0)$

túloldalra azonos nagyságú, ellentétes előjelű pontforrás (analógia)

$\boxed{\vec{J} = \vec{J}_n}$ $\boxed{\vec{E} = \vec{E}_n}$ (J_n folytonos) földelő gömbelektróda $\sigma < \infty$ közegben + ideális szigetelő féltér (levegő)

$\hookrightarrow \underline{\underline{\sigma = \phi}}$ $(\underline{J_n = \phi})$

$\Downarrow$

$$\boxed{\begin{array}{c}\vec{J} = \vec{J}_t \\ \vec{E} = \vec{E}_t\end{array}}$$

túloldalra azonos nagyságú, AZONOS előjelű pontforrás

$\boxed{\text{EMT VT57}}$ stac. áram mágneses terének meghatározása, alkalmazás

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \approx 0, \ \vec{J} \neq 0}$$

← állandó áram

$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}$
$\operatorname{div} \vec{B} = 0$
$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$

$\left(\mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{M})\right)$

$\boxed{\cdot\ \mu = \text{konst}}$ → • homogén, • NEM ferromágneses } lineáris

$$\boxed{B_{2n} = B_{1n}}$$

$$\boxed{H_{2t} = H_{1t} + K}$$

↑ felületi áram

árameloszlás vezető mágneses terének számítása

⇓

$\boxed{\text{Alkalmazás:}}$ Egyenáramú villamos gépek, (transzformátor) tekercsek ön- és kölcsönös induktivitásának számít.

$\boxed{\text{Fogalmak:}}$ induktivitás, (vektorpotenciál)

alapelrendezések számítása: $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}$

$$\oint_l \vec{H} \, d\vec{l} = \int_A \vec{J} \, d\vec{a}$$

⇓ általában $\vec{H} \parallel d\vec{l}$, $\vec{J} \perp \vec{n}$

$$\boxed{H \cdot l = I}$$

EMT VT32 — Biot-Savart: ismertet, értelmez + példa.

Áramhurok mágn. tere:

$$\boxed{\vec H(\vec r) = \frac{J}{4\pi}\cdot\oint_l \frac{d\vec l' \times (\vec r - \vec r')}{|\vec r - \vec r'|^3}}$$

J: kiskeresztmetszetű vezetőben folyó áram

⇐ Végtelen homogén közegre!

l görbe: vezető mentén az áram folyási irányában

$d\vec l'$: vonalelem-vektor

értelmezés: elemi járulék → elemi áram / áramelem

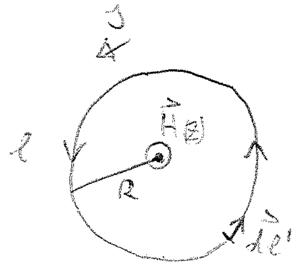
$$\vec j\, dV = J\, d\vec l$$

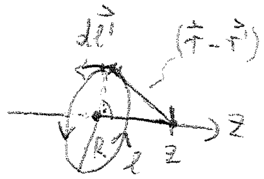
$$\boxed{d\vec H = \frac{J \quad d\vec l'}{4\pi}\cdot\frac{(\vec r - \vec r')}{|\vec r - \vec r'|^3}}$$

⇒ áram-dipólus tere

$(\mathrm{rot}\, d\vec H = d\vec j)$

példa:

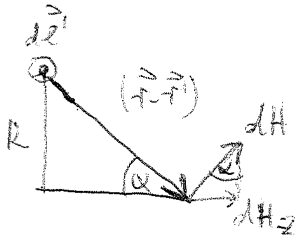




$$|\vec r - \vec r'| = \sqrt{R^2 + z^2}$$

$$d\vec l' \perp (\vec r - \vec r') \Rightarrow \frac{d\vec l' \times (\vec r - \vec r')}{|\vec r - \vec r'|^3} = \frac{dl'}{|\vec r - \vec r'|^2}$$

$$\cancel{H(z) = \frac{J}{4\pi}\cdot\left(\frac{2R\pi}{\ }\right)}$$



Az integrálás során csak a z irányú komponensek maradnak meg!

⇓

$$dH_z(z) = dH(z)\cdot \sin\alpha = dH(z)\cdot\frac{R}{|\vec r - \vec r'|}$$

$$H(z) = \int dH_z(z) = \frac{J}{4\pi}\cdot\frac{2R\pi}{|\vec r - \vec r'|^2}\cdot\frac{R}{|\vec r - \vec r'|} =$$

$$= \frac{J\cdot R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\cdot\frac{1}{2}$$

EMT VT 33 | ön-, kölcsönös indukció, energetikai kép + külső, belső induktivitás

fluxus: $\boxed{\Psi = \int_S \vec{B}\, d\vec{s}}$

tekercs: menetfluxus: $\boxed{\Psi_k}$ $(k = 1 \dots N)$ sűrűn tekercselt

$(1 << i << N)$ középtájt: homogén mágneses tér, $\vec{B} \parallel \vec{n}$

főfluxus/tekercsfluxus:

$$\boxed{\Psi_t = \sum_{k=1}^{N} \Psi_k \approx N \cdot \Psi_i}$$

(kond – $Q = C \cdot U$
tekercs – $\Psi = L \cdot I$)

vékony vezető:

$\Psi_S \sim I \Rightarrow \boxed{L \triangleq \frac{\Psi}{I}}$

Energia: $\boxed{W_m = \frac{1}{2} I \cdot \Psi = \frac{1}{2} L \cdot I^2}$

$\Rightarrow \boxed{L = \frac{2 W_m}{I^2}}$

L: önindukciós együttható

kölcsönös induktivitás: M

I_1, Ψ_1; I_2, Ψ_2 } 2 vezető hurok

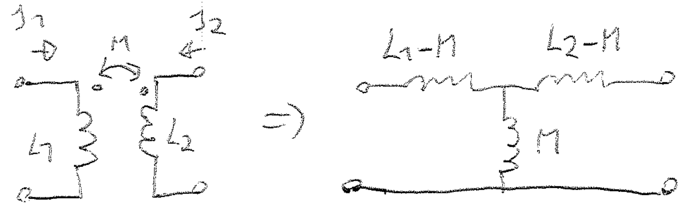
$$L_{21} \triangleq \frac{\Psi_{21}}{I_1}\Big|_{I_2 = 0} \qquad L_{12} \triangleq \frac{\Psi_{12}}{I_2}\Big|_{I_1 = 0}$$

$M = L_{12} = L_{21}$

$\Psi_1 = L_1 \cdot I_1 + L_{12} \cdot I_2$

$\Psi_2 = L_2 \cdot I_2 + L_{21} \cdot I_1$

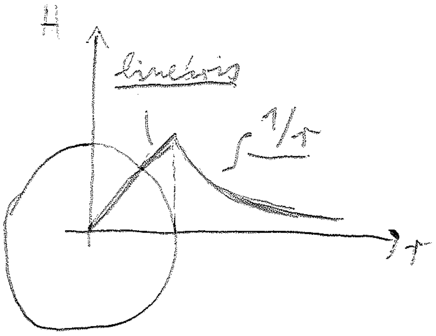
$$\boxed{W_m = \frac{1}{2}\left(I_1 \cdot \Psi_1 + I_2 \cdot \Psi_2\right) = \frac{1}{2} L_1 \cdot I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 \cdot I_2^2 + M \cdot I_1 \cdot I_2}$$

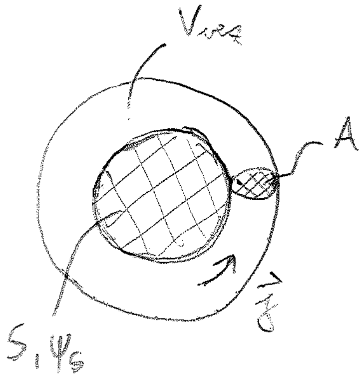


$\Psi_{21} = \int_{S_2} \vec{B}_1\, d\vec{s}$

$\Psi_{12} = \int_{S_1} \vec{B}_2\, d\vec{s}$

$\boxed{\text{vastag vezető:}}$





$$\boxed{I = \vec{A}\cdot\vec{J}} = A\cdot J$$

$$\boxed{W_{m,vez} = \int_{V_{vez}} \frac{1}{2}\mu\cdot H^2\,dV}$$

$$\boxed{\Psi_S = \int_S \mu\vec{H}\,d\vec{s}}$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J}$$

$$\oint_l \vec{H}\,d\vec{l} = I$$

$$H\cdot l' = J\cdot A'$$

$$\boxed{L \cong L_{külső} + L_{belső}}$$

$$\boxed{L_{külső} = \frac{\Psi_S}{I}}$$

$$\boxed{L_{belső} = \frac{2W_{m,vez}}{I^2}}$$

EMT VT 34 Hurok mágn. energiája, tekercsrendszer energiája

n db tekercs: I_k, Ψ_k $(k=1,\dots,n)$

VÉKONY vezető

$$\boxed{\Psi_k = \sum_{j=1}^{n} L_{kj} \cdot I_j} \quad (*)$$

$\to \boxed{L_{kk}}$ önindukciós eh.

$\to \boxed{L_{kj} = L_{jk}}$ $(k \neq j)$ kölcs. ind. eh.

L_{kj}: $(*)$-ból

$$\boxed{W_m = \int_V \frac{1}{2} \mu H^2 dV = \sum_{k=1}^{n} \Psi_k \cdot I_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} L_{kj} \cdot I_j \cdot I_k}$$

$\cancel{u_i = \frac{d\Psi}{dt}}$

$\cancel{dW = u_i \cdot i\,dt = \frac{d\Psi}{dt} \cdot i\,dt = i\,d\Psi}$

$\cancel{\Psi = L \cdot I \Rightarrow W = \Psi \cdot I = L}$

EMT VT35 — nyug., mozg. indukció, indukált tér.
+ gyakorlati alkalmazási példa?

Nyugalmi indukció: A mágneses mező a vezető kerethez képest NEM mozog. Változó mágneses mező. ⇒ keret két végén fesz.

$$\cancel{\frac{\partial \Psi}{\partial t} = A\,\frac{\partial \vec B}{\partial t}}$$

$$\boxed{\frac{\partial \vec B}{\partial t} \neq 0} \Rightarrow \text{kvázistacionárius tér}$$

$\vec B \parallel \vec n$, B = áll.

(**)

$$\boxed{U_i = \oint_l \vec E\, d\vec l = -\int_A \frac{\partial \vec B}{\partial t}\, d\vec A = -A\cdot\frac{\partial B}{\partial t}}$$

$$\left(\mathrm{rot}\,\vec E = -\frac{\partial \vec B}{\partial t}\right)$$

l nyugvó görbe ⇒ A = konst (nyugvó)

(elég a görbe, nem kell vezető)

$$\boxed{\int_A \frac{\partial \vec B}{\partial t}\, d\vec A = \frac{\partial}{\partial t}\int_A \vec B\, d\vec A = \frac{\partial \Psi}{\partial t}} \qquad \boxed{U_i = -\frac{d\Psi_S}{dt}}$$

Mozgási indukció: Állandó mágneses mező. Vezetődarab mozog a térhez képest. ⇒ két végén feszültség mérhető

$\boxed{\vec E = \vec 0}$ (*)

Lorentz-tv: $F_L = Q\cdot(\vec E + \underbrace{\vec v \times \vec B}_{\vec E_i})$

$\vec B$ nyugszik ⇒ $\boxed{\frac{\partial \vec B}{\partial t} = 0}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec E_i = \vec v \times \vec B} : \text{beiktatott / indukált térerősség}$$

vezető sebessége a térhez képest

$\boxed{v \ll c}$!

$\boxed{\vec E' = E_i}$: $\vec v$ sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszer ($\vec v' = 0$)

$$\boxed{U_i^{m} = \int_l \vec E_i\, d\vec l = \int_l (\vec v \times \vec B)\, d\vec l}$$

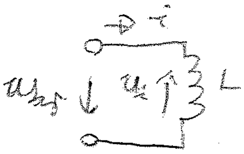
Egyesített indukciós törvény:

$$\boxed{U_i = \oint_l \vec E'\, d\vec l = \oint_l \left(\vec E + \vec v \times \vec B\right) dl = \overbrace{\left(-\int_S \frac{\partial \vec B}{\partial t}\, d\vec S\right)}^{(**)} + \oint_l (\vec v \times \vec B)\, d\vec l}$$

Indukált fesz. és kapocsfesz. kapcsolata:

hálózat:

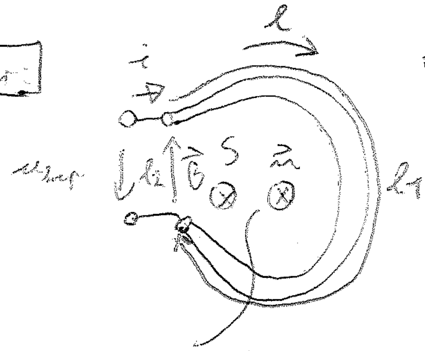
$$u_{kapocs} = L \cdot \frac{di}{dt}$$



nyugv.

mert $\boxed{u_i} = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d}{dt}(L \cdot i) = -L \cdot \frac{di}{dt} = \boxed{-u_{kapocs}}$

tér:



$$\boxed{u_i = \oint_l \vec{E}\,d\vec{l} = -\frac{d\Psi_S}{dt}}$$

nyugv.

jobbkéz szabály $\boxed{\oint (d\vec{l})}$

$\vec{n}$ BEFELÉ mutat

$$\oint_l \vec{E}\,d\vec{l} = \underbrace{\int_{l_1} \vec{E}\,d\vec{l}}_{\approx 0} + \underbrace{\int_{l_2} \vec{E}\,d\vec{l}}_{-u_{kap}} = -u_{kap} = -\frac{d\Psi_S}{dt}$$

jó vezető (ideális)

$$\boxed{u_{kap} = \frac{d\Psi_S}{dt} = -u_i}$$

Gyakorlati példa:

generátor: mozgási indukció: mech. → el. energia

transzformátor: nyugalmi indukció: el. → el. energia

EMT VT % távvez. elosztott param. modell, távíró egyenlet; milyen feltételek mellett írható le egy hullámvezető viselkedése a modellel?

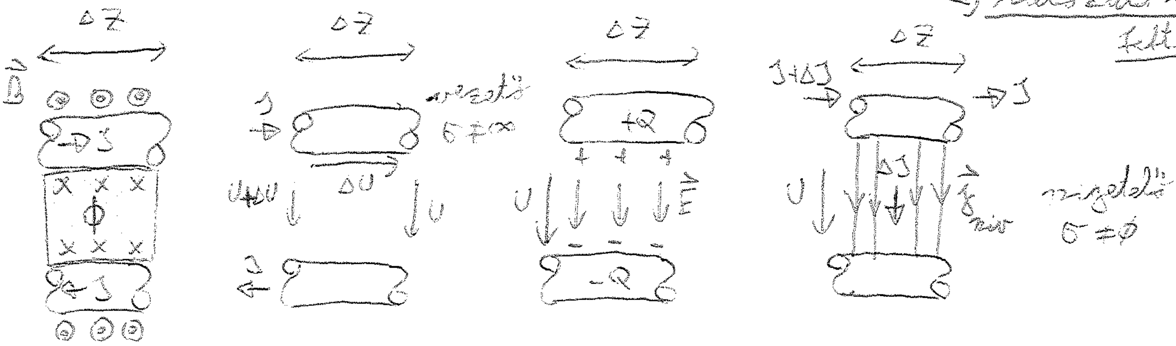
A távvezeték egy differenciálisan rövid (dz) szakaszát koncentrált paraméterű kétkapuként modellezzük.

$\Rightarrow$ hosszegységre vonatkoztatott paraméterek: L', R', C', G'

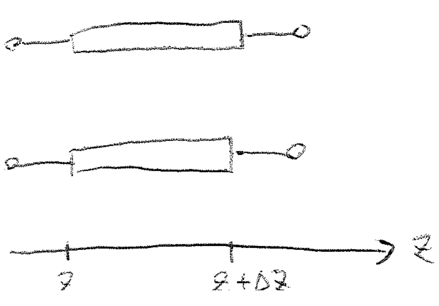
Távvezeték: – 2 db párhuzamos, z irányban ∞ hosszú vezető

! • Kell: • $\underset{\text{tér}}{d} \ll \underset{\text{hullámhossz}}{\lambda}$, • z-re transzverzális EM (TEM) tér $\left\{ \begin{array}{l} \vec{E} \perp \vec{H} \\ \vec{E} \perp \vec{v} \\ \vec{H} \perp \vec{v} \end{array} \right.$

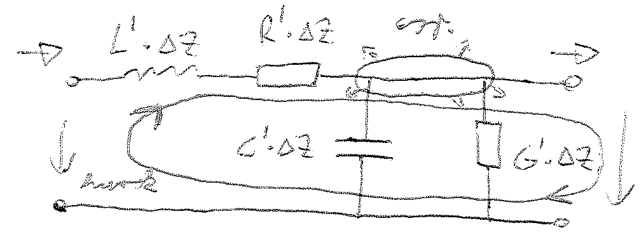
• egyetlen, z függő u és i adattal leírható → hálózati modellezés feltétele



L'	R'	C'	G'
$L' = \dfrac{\Phi/\Delta z}{J}$	$R' = \dfrac{\Delta U/\Delta z}{J}$	$C' = \dfrac{Q/\Delta z}{U}$	$G' = \dfrac{\Delta J/\Delta z}{U}$
[H/m]	[Ω/m]	[F/m]	[S/m]
indukált fesz ↓ Lenz ↓ U_z csökken ↓ SOROS	ohmos feszesés ↓ U_z csökken ↓ SOROS	áram töltést visz oda ↓ áthalad ↓ I_z csökken ↓ SÖNT	szivárgó áram ↓ I_z csökken ↓ SÖNT



$\Rightarrow$



$\dfrac{i(z,t)}{u(z,t)}$ $\left.\dfrac{i((z+\Delta z),t)}{u((z+\Delta z),t)}\right\}$ z függő u és i

Távíróegyenletek:

$$\boxed{u(z+\Delta z,t) = u(z,t) + \overbrace{\frac{\partial u(z,t)}{\partial z}\cdot\Delta z}^{\Delta u}}$$

$$\boxed{i(z+\Delta z,t) = i(z,t) + \underbrace{\frac{\partial i(z,t)}{\partial z}\cdot\Delta z}_{\Delta i}}$$

$$\boxed{\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\bullet(z+\Delta z,t)-\bullet(z,t)}{\Delta z} = \frac{\partial\bullet(z,t)}{\partial z}}$$

$$-u(z,t) + L'\cdot\Delta z\cdot\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} + R'\cdot\Delta z\cdot i(z,t) + \left(u(z,t) + \frac{\partial u(z,t)}{\partial z}\cdot\Delta z\right) = 0 \quad \Big/ :\Delta z,\ \Delta z\to 0$$

$$\cancel{-i(z,t) + C'\Delta z\cdot\frac{\partial u(z,t)}{\partial t} + G'\Delta z}$$

$$-i(z,t) + C'\cdot\Delta z\cdot\frac{\partial u(z+\Delta z,t)}{\partial t} + G'\cdot\Delta z\cdot u(z+\Delta z,t) + \left(i(z,t) + \frac{\partial i(z,t)}{\partial z}\cdot\Delta z\right) = 0 \quad \Big/ :\Delta z,\ \Delta z\to 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} = -L'\cdot\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} - R'\cdot i(z,t)} \quad \text{(I)}$$

$$\boxed{\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -C'\cdot\frac{\partial u(z,t)}{\partial t} - G'\cdot u(z,t)} \quad \text{(II)}$$

$\Rightarrow$ **1 változós:** $\frac{\partial\,\text{(I)}}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = \text{(II)}$ $\qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial i(z,t)}{\partial z}\right)$

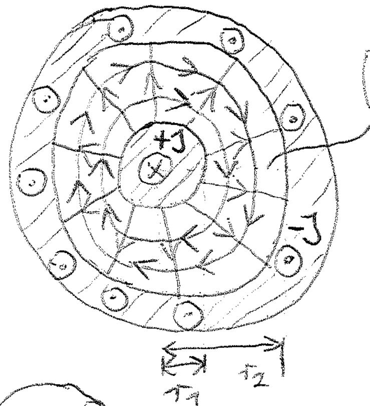
$$\boxed{\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} = L'C'\cdot\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} + (L'G' + R'C')\cdot\frac{\partial u(z,t)}{\partial t} + R'G'\cdot u(z,t)}$$

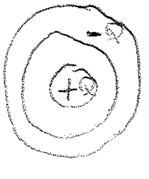
EMT VT37 | TV elrendezések, H, E, geom → TV paraméterek

Koaxiális kábel

$\vec{E}$ $\vec{H}$

ε, μ_0





$$\operatorname{div}(\varepsilon\vec{E}) = \rho$$

$$\oint_S \vec{E}\, d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon}$$

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{r}$$

$$\boxed{\varphi(r) = \frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_0}{r}}$$

$$\cancel{U = \int_{r_1}^{r_2} \varphi(r)\, dr =}$$

$$\boxed{U = \varphi(r_1) - \varphi(r_2) = \frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}$$

$$\oint_l \vec{H}\, d\vec{l} = J$$

$$\boxed{H = \frac{J}{2\pi} \cdot \frac{1}{r}}$$

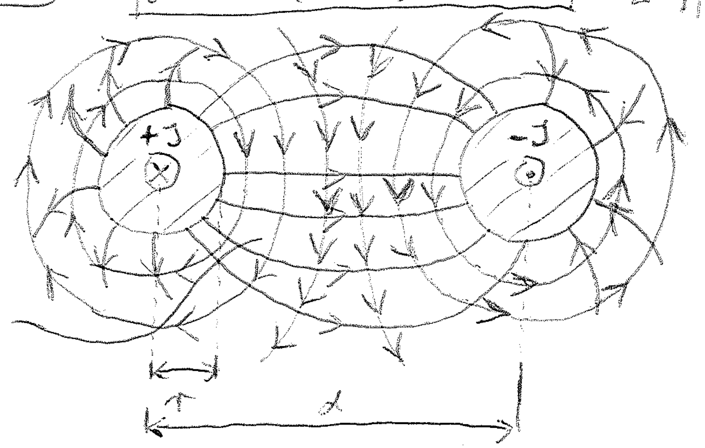
$$\boxed{\Phi'} = \int_{r_1}^{r_2} \mu \cdot H(r)\, dr = \boxed{\frac{\mu J}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}}$$

hosszegységre

$r \ll d$ — Lecher (kettős) vezeték

$\vec{E}$ $\vec{H}$

ε, μ_0



+Q (1) -Q (2)

$$E_+ = \frac{+q}{2\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{r}$$

$$E_- = \frac{-q}{2\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{r}$$

$$\varphi(r) = \varphi_1(r) + \varphi_2(r) = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\left(\ln \frac{r_0}{r_+} - \ln \frac{r_0}{r_-}\right)$$

$$\boxed{\varphi(r) = \frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_-}{r_+}}$$

$$U = \varphi(r) - \varphi(d) = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\overbrace{\left(\ln \frac{d}{r} - \ln \frac{r}{d}\right)}^{2 \ln \frac{d}{r}} =$$

$$\boxed{U = \frac{q}{\pi\varepsilon} \ln \frac{d}{r}}$$

$$\boxed{H = \frac{J}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{d-r}\right)}$$

$$\cancel{\Phi' = \int_r^{d-r} \mu \cdot H(r)\, dr = \frac{\mu J}{2\pi}\left(\ln \frac{1}{d-r} - \ln \frac{1}{r}\right)}$$

$$\boxed{\Phi'} = \int_r^{d-r} \mu \cdot H(r)\, dr = \cancel{\frac{\mu J}{2\pi}\left(\ln d - \ln(d-r)\right)}$$

$$= \frac{\mu J}{2\pi}\underbrace{\left(\ln \frac{d-r}{r} - \ln \frac{r}{d-r}\right)}_{2 \cdot \ln \frac{d-r}{r}} \approx \boxed{\frac{\mu J}{\pi} \ln \frac{d}{r}}$$

koax	Lecher
$$C' = \frac{q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{r_2}{r_1}} \quad > \quad C' = \frac{q}{U} = \frac{\pi\varepsilon}{\ln\frac{d}{r}}$$

$$G' = \frac{2\pi\sigma}{\ln\frac{r_2}{r_1}} \quad > \quad G' = \frac{\pi\sigma}{\ln\frac{d}{r}}$$

$$L' = \frac{\Phi'}{I} = \frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1} \quad < \quad L' = \frac{\Phi'}{I} = \frac{\mu}{\pi}\ln\frac{d}{r}$$

($L_{\text{külső}}$)

$$\left(R' = \frac{1}{\sigma A_1} + \frac{1}{\sigma A_2} \right) \quad \sim \quad \left(R' = \frac{2}{\sigma A} \right)$$

R' a skin-hatás miatt NEM számítható statikus modellel!!!

ideális TV: $R' = \emptyset$, $G' = \emptyset$

→ veszteségmentes (Joule-hő)

$$\mu = \mu_0$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$$

$$L' \cdot C' = \mu_0 \cdot \varepsilon = \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \neq \text{[illegible]}$$

SPEC ESET:
SZINUSZOS ÁLL. ÁLL.

EJT VI 38 | TV Helmholtz, ált. mo: bemutat értelm.

$$\boxed{x(z,t)} = \hat{X}(z)\cdot\cos(\omega t+\varphi(z)) = \mathrm{Re}\Big\{\underbrace{\underbrace{\hat{X}(z)\cdot e^{j\varphi_x(z)}}_{\text{komplex amplitúdó}}\cdot e^{j\omega t}}_{\text{komplex időfv.}}\Big\} =$$

$$= \boxed{\mathrm{Re}\left\{\overline{X}(z)\cdot e^{j\omega t}\right\}}$$

$\boxed{\omega:}$ gerjesztő körfrekvencia

$$\overline{U}(z) = U(z) = \hat{U}(z)\cdot e^{j\varphi_U(z)}$$

$$\overline{J}(z) = J(z) = \hat{J}(z)\cdot e^{j\varphi_J(z)}$$

Távíró egyenletek: $\frac{\partial x}{\partial t} \to \overbrace{j\omega\overline{X}}^{\frac{\partial x}{\partial t}\text{ komplex amplitúdója}}\cdot e^{j\omega t}$

itt már egyvált. deriváltak vannak!

$$\boxed{\frac{\partial U(z)}{\partial z} = \frac{dU(z)}{dz}}$$

$$\frac{\partial U(z)}{\partial z} = -j\omega L'\cdot J(z) - R'\cdot J(z) = -(j\omega L'+R')\cdot J(z)$$

$$\frac{\partial J(z)}{\partial z} = -j\omega C'\cdot U(z) - G'\cdot U(z) = -(j\omega C'+G')\cdot U(z)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 U(z)}{\partial z^2} = (j\omega L'+R')\cdot(j\omega C'+G')\cdot U(z)}$$

$\boxed{\text{Helmholtz egyenlet}}$: közönséges másodrendű diff.egyenlet

$$\boxed{\frac{\partial^2 U(z)}{\partial z^2} - \gamma^2\cdot U(z) = \emptyset}$$

$$\boxed{\gamma = \sqrt{(j\omega L'+R')(j\omega C'+G')}}$$: terjedési együttható

sajátértékek: $\boxed{\pm\gamma}$

Hullámimpedancia:

$$\boxed{Z_0 \triangleq \frac{(j\omega L'+R')}{\gamma} = \sqrt{\frac{j\omega L'+R'}{j\omega C'+G'}}}$$

általános megoldás:

$$U(z) = U_1^+ \cdot e^{-\gamma \cdot z} + U_1^- \cdot e^{+\gamma \cdot z}$$

$$J(z) = -\frac{1}{(j\omega L' + R')} \cdot \frac{\partial U(z)}{\partial z}$$

$$J(z) = \frac{U_1^+}{Z_0} \cdot e^{-\gamma \cdot z} - \frac{U_1^-}{Z_0} \cdot e^{+\gamma \cdot z} =$$

$$= J_1^+ \cdot e^{-\gamma \cdot z} + J_1^- \cdot e^{+\gamma \cdot z}$$

$$Z_0 = \frac{U_1^+}{J_1^+} = -\frac{U_1^-}{J_1^-}$$

Hullámimpedancia: feszültség- és áramhullám közti kapcsolat !

Értelmezés: táplált, reflektált/visszavert

Pozitív (U_1^+/J_1^+) és negatív (U_1^-/J_1^-) z irányba terjedő, csillapított, szinuszos feszültség-/áramhullámok szuperpozíciójaként adódik a feszültség/áram hely-idő-függvénye.

$U_1^+, J_1^+, U_1^-, J_1^-$ a vezeték végein elhelyezett lezárás (peremfeltételek) ismeretében számítható

Komplex érték!!

EMT VT 79 | TV hullámparaméterek: fázissebesség, hullámh. + ideális TV

Terjedési e.h.:

$$\gamma = \sqrt{(j\omega L' + R')(j\omega C' + G')} = \alpha + j\beta$$

$$[\gamma] = [\alpha] = [\beta] = \frac{rad}{m}$$

α: csillapítási e.h

hullámimpedancia: $$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega L' + R'}{j\omega C' + G'}}$$

β: fázisegyütth.

$$\beta = \frac{\omega}{v} \Rightarrow$$ fázissebesség: $$v = \frac{\omega}{\beta} \quad \left[\frac{m}{s}\right]$$

↳ hullámterjedési sebesség

! $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $Re\{Z_0\} \geq 0$ } 2-ből 1 gyök!

szabadtéri hullámhossz:

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad [m]$$

$U_1^+, U_1^-, I_1^+, I_1^-$ KOMPLEXEK!

HULLÁM: térbeli és időbeli periodicitás

vezetéken jelének hullámhossza:

$$\Lambda = \frac{v}{\omega/2\pi} = \frac{2\pi}{\beta} \quad [m]$$

$z=0$ fázishoz képest mennyit késik

Ha $U_1^- = 0$ ÉS U_1^+ valós!

~~$u(z,t) = U_1^+ e^{\alpha z} \cdot$~~

$$u(z,t) = \overbrace{|U_1^+|}^{\text{valós}} \cdot e^{-\alpha \cdot z} \cdot \cos(\omega t - \beta \cdot z) =$$

$$= |U_1^+| \cdot e^{-\alpha \cdot z} \cdot \cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)\right)$$

burkológörbe → csillapodás

v sebességgel terjed $+z$ irányba

Ideális TV: $R' = 0$, $G' = 0$

$$\gamma = \sqrt{j\omega L' \cdot j\omega C'} = j\omega\sqrt{L' \cdot C'} = j\beta \Rightarrow$$ nincs csillapodás

$$\beta = \omega\sqrt{L'C'} \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{L'C'}}$$

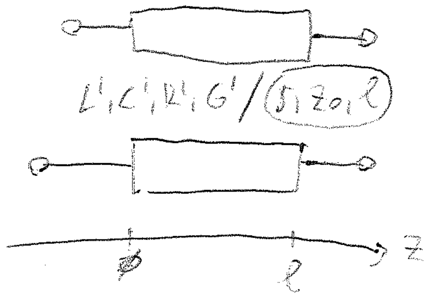
$$Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = R_0$$ valós

$$\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

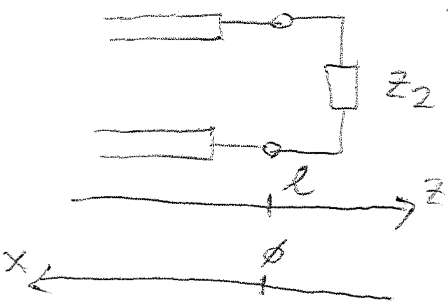
$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} \approx c \cdot \frac{2}{3}$$

koax: $\varepsilon_r = 2{,}3 \Rightarrow \sqrt{\varepsilon_r} \approx 1{,}5 = \frac{3}{2}$

EMT VT40 | refl. tény., zreo. lezárások ⇒ u, i



Passzív lezárás Z_2 ⇒ $\boxed{\mathrm{Re}\{Z_2\} \geq 0}$



$$\boxed{x = l - z}$$

$$\boxed{\begin{aligned} U(x) &= U_2^+ e^{\gamma x} + U_2^- e^{-\gamma x} \\ I(x) &= \underbrace{\frac{U_2^+}{Z_0} e^{\gamma x}}_{-x \text{ irányba}} - \underbrace{\frac{U_2^-}{Z_0} e^{-\gamma x}}_{+x \text{ irányba terjed}} \end{aligned}}$$

Z_2 szerint: beeső (incident) | visszavert/reflektált (reflected)

Reflexiós tényező:

$$\boxed{\bar{r} = \bar{\Gamma} = \frac{\bar{U}_{refl}}{\bar{U}_{beeső}} = \frac{\bar{U}_r}{\bar{U}_i}}$$

2-es oldal: $\boxed{z = l}$, $\boxed{x = 0}$

$$\boxed{r_2 \underset{x=0}{=} \frac{U_2^-}{U_2^+}}$$ komplex! $\Rightarrow$ $\boxed{U_2^- = r \cdot U_2^+}$

$$Z_2 = \frac{U_2}{I_2} \overset{x=0}{=} Z_0 \frac{U_2^+ + U_2^-}{U_2^+ - U_2^-} = Z_0 \cdot \frac{1+r}{1-r}$$

$$\Rightarrow \boxed{r = \Gamma = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0}} \xrightarrow[Z_2 \text{ passzív}]{\boxed{\mathrm{Re}\{Z_2\} \geq 0}} \boxed{|r| \leq 1}$$

ideális TV: $\boxed{\gamma = j\beta}$

$$\boxed{\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}}$$

$$\boxed{\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}}$$

Illesztett lezárás: $\boxed{Z_2 = Z_0}$

$$\boxed{r = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = \phi}$$

$$\left.\begin{array}{l} U(x) = U_2^+ e^{j\beta x} \\ J(x) = \dfrac{U_2^+}{Z_0} e^{j\beta x} \end{array}\right\} \text{tisztán } \boxed{\text{haladó hullám}}$$

Szakadás: $\boxed{Z_2 = \infty}$

$$\boxed{r = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = +1}$$

$$U(x) = U_2^+ \left(e^{j\beta x} + e^{-j\beta x}\right) = 2 \cdot U_2^+ \cdot \cos(\beta x)$$

$$J(x) = \frac{U_2^+}{Z_0} \left(e^{j\beta x} - e^{-j\beta x}\right) = 2 j \cdot \left(\frac{U_2^+}{Z_0}\right) \cdot \sin(\beta x)$$

Rövidzár: $\boxed{Z_2 = \phi}$

$$\boxed{j = e^{j\frac{\pi}{2}}}$$

$$\boxed{r = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = -1}$$

$$U(x) = U_2^+ \left(e^{j\beta x} - e^{-j\beta x}\right) = 2 j \cdot U_2^+ \cdot \sin(\beta x)$$

$$J(x) = \frac{U_2^+}{Z_0} \left(e^{j\beta x} + e^{-j\beta x}\right) = 2 \cdot \left(\frac{U_2^+}{Z_0}\right) \cdot \cos(\beta x)$$

$$\boxed{\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\omega t)} \; !$$

$\boxed{|r| = 1}$

$\Downarrow$

Totális reflexió

$\Downarrow$

Állóhullám

- hely és időfüggés külön argumentumban

$\rightarrow$ $\exists x$:

$\boxed{u(x,t) \equiv \phi \;, \forall t\text{-re}}$

$\rightarrow$ kioltási hely

EMT VT 47 tetszőleges (reaktív) lezárás (Γ) ; állóh., haladóh. felbontás

$\Rightarrow$ hullámkép energetikai tartalma: reaktancia (X)

- ideális TV: $\boxed{\gamma = j\beta}$

$\boxed{\mathrm{Re}\{Z_2\} \leq \phi} \Rightarrow \boxed{|\Gamma| \leq 1}$

$\boxed{Z_2 = R + jX} \Rightarrow \boxed{\Gamma = |\Gamma| \cdot e^{j\varphi}}$

$$\boxed{U(x)} = U_2^+\left(e^{j\beta x} + |\Gamma| e^{j\varphi} \cdot e^{-j\beta x}\right) = U_2^+\left(e^{j\beta x} \overbrace{+ |\Gamma| e^{j\beta x} + |\Gamma| e^{j\varphi} \cdot e^{-j\beta x}} - |\Gamma| e^{j\beta x}\right) =$$

$$= \boxed{U_2^+ \cdot (1 - |\Gamma|) \cdot e^{j\beta x} + 2 U_2^+ \cdot |\Gamma| \cdot e^{j\varphi/2} \cdot \cos(\beta x - \varphi/2)} = \boxed{U_h(x) + U_á(x)}$$

$$\boxed{|U_h(x)| = |U_2^+| \cdot (1 - |\Gamma|) = \text{konst.}} \Rightarrow \text{tisztán haladó} \quad (+x)$$

$$\boxed{|U_á(x)| = 2 |U_2^+| \cdot |\Gamma| \cdot |\cos(\beta x - \varphi/2)|} \Rightarrow \text{tisztán álló}$$

$\Rightarrow$ [a felbontás egy állandó (fázis) erejéig egyértelmű] !

$$\boxed{e^{jx} + e^{-jx} = 2\cos x}$$

$$\boxed{e^{jx} - e^{-jx} = 2j \sin x}$$

$$\boxed{J(x)} = \frac{U_2^+}{Z_0}\left(e^{j\beta x} - |\Gamma| e^{j\varphi} \cdot e^{-j\beta x}\right) = \frac{U_2^+}{Z_0}\left(e^{j\beta x} \overbrace{- |\Gamma| e^{j\beta x}} \overbrace{+ |\Gamma| e^{j\beta x} - |\Gamma| e^{j\varphi} \cdot e^{-j\beta x}}\right)$$

$$= \boxed{\frac{U_2^+}{Z_0} \cdot \left[(1 - |\Gamma|) \cdot e^{j\beta x} + 2j \cdot e^{j\varphi/2} \cdot |\Gamma| \cdot \sin(\beta x - \varphi/2)\right]} = \boxed{J_h(x) + J_á(x)}$$

$$\boxed{|J_h(x)| = \left|\frac{U_2^+}{Z_0}\right| \cdot (1 - |\Gamma|) = \text{konst.}}$$

$$\boxed{|J_á(x)| = \left|\frac{U_2^+}{Z_0}\right| \cdot 2 |\Gamma| \cdot |\sin(\beta x - \varphi/2)|}$$

Ideális TV: $\boxed{Z_0 = R_0}$ + $\boxed{Z_2 = jX_2}$ } ideális TV lezárása reaktanciával

⇒ lezárás nem vesz fel hatásos teljesítményt + távvez. is veszt. ment

(⇒ u és i biztos, hogy nincs fázisban)

→ nincs hatásos telj áramlás ⊛

$\boxed{\text{spec eset:}}$ szakadás, rövidzár : ekkor is csak meddő áramlás van

$\boxed{Z_2 = jX_2}$ ⇒ $$\boxed{r = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = \frac{jX - Z_0}{jX + Z_0} = -\frac{Z_0 - jX}{Z_0 + jX} = 1 \cdot e^{j\varphi}}$$

⇒ $\boxed{|r| = 1}$ ⇒ $\boxed{\text{állóhullám}}$

⊛ • térben: amplitúdók $\lambda/4$-el eltolva (u, i)
• időben $T/4$ késés másikhoz képest • $\boxed{L:}$ i késik
• $\boxed{C:}$ i siet

~~(energia áramlás nincs)~~

• szakadás, rövidzár: energiaáramlás nincs, csak teljesítmény-lengés a $\lambda/4$ szakaszon : $\boxed{\text{egyik max} \to \text{másik } \phi}$

elektromos ⇄ mágneses

– lezárásnál van ϕ hely
⇒ $\boxed{\phi \text{ telj}}$

• jX: távvezeték végén nincs ϕ hely (feszültség/áram csomópont)
⇒ van a lezárásnak is meddő lengése

(azonos interferenciakép (amplitúdó eloszlás), csak térben eltolva)

~~$P(z)$ ...~~

~~Komplex telj~~

~~$\boxed{\text{Komplex telj.}}$~~ ~~$P(z) = \frac{1}{2Z_0}\left(|U^+|^2 - |U^-|^2\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{U(z) \cdot I(z)^*\right\}$~~

~~• ideális → független z-től~~

~~• felírható: $\boxed{P_{oe} + P_{ref}}$~~

~~$P_{oe}(z) = P_{oe} = \frac{1}{2} \frac{U_+^2}{...}$~~

$\boxed{\text{EMT VT42}}$ fesz. ampl. min és max helyei a TV mentén a lezárás ismeretében

$$\boxed{U(x) = U_2^+ \cdot (1-|r|) \cdot e^{j\beta x} + 2 \cdot U_2^+ \cdot |r| \cdot e^{j\varphi/2} \cdot \cos(\beta x - \varphi/2)}$$

$$\boxed{r = |r| \cdot e^{j\varphi}}$$

$$|U_h(x)| = |U_2^+| \cdot (1-|r|)$$

$$|U_\acute{a}(x)| = 2|U_2^+| \cdot |r| \cdot \cos(\beta x - \varphi/2)$$

$$|U(x)|_{max} = |U_2^+| \cdot (1+|r|) \Rightarrow \underline{\cos(\beta x - \varphi/2) = 1}$$

$$|U(x)|_{min} = |U_2^+| \cdot (1-|r|) \Rightarrow \underline{\cos(\beta x - \varphi/2) = 0}$$

$\boxed{\text{max. hely:}}$ $\boxed{\cos(\beta x - \varphi/2) = 1}$

$$\beta x - \varphi/2 = k\pi$$

$$\boxed{X_M = \frac{k\pi + \varphi/2}{\beta}}, \quad \boxed{k \in N} \quad - \quad \boxed{\frac{k\pi}{\beta} = k \cdot (\Lambda/2)}$$

$\boxed{\text{min. hely:}}$ $\boxed{\cos(\beta x - \varphi/2) = 0}$

$$\beta x - \varphi/2 = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad \boxed{\Lambda = \frac{2\pi}{\beta}}$$

$$\boxed{X_m = \frac{\pi/2 + k\pi + \varphi/2}{\beta}} = X_M + \frac{\pi/2}{\beta} = \boxed{X_M + \Lambda/4}$$

$$\left.\begin{array}{l} |r_{min}| \to r_{max} \\ |r_{max}| \to r_{min} \end{array}\right\} \boxed{\text{térben}}\ \text{~~eltolás~~}$$

<u>ampl. eloszlás</u>

ÉMT VT 43 | állóhullámarány, → nagyfr. imp. mérés

voltage standing wave ratio → VSWR

$$\boxed{\sigma = VSWR = \frac{|U(x)|_{max}}{|U(x)|_{min}} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}}$$

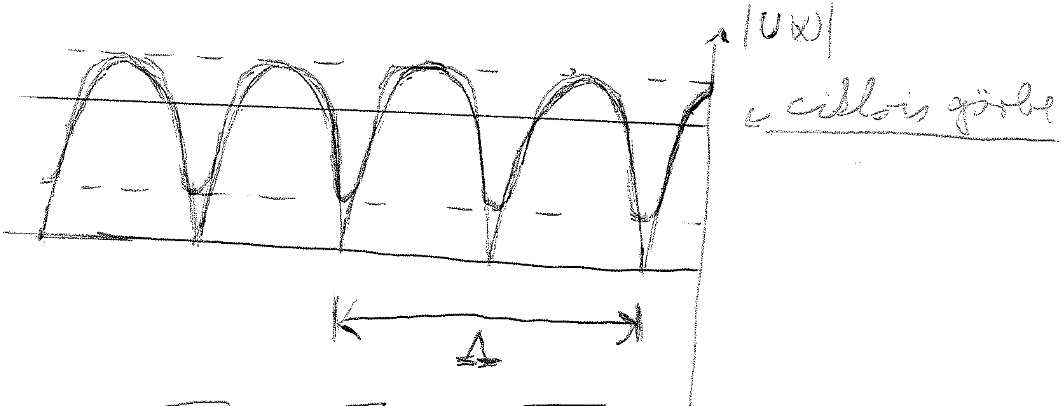
$$\boxed{|U(x)|_{max} = |U_2^+| + |U_2^-|}$$

$$\boxed{|U(x)|_{min} = |U_2^+| - |U_2^-|}$$

$$\boxed{\sigma \in [1 ; +\infty[}$$

haladó hullám — állóhullám

Interferenciakép (amplitúdóeloszlás):



$\sigma \not\to \infty$, $\sigma \neq 1$	$\sigma = 1$	$\sigma \to \infty$
	haladó	álló
általános	illesztett	reakt
$Z_2 = R + jX$	$Z_2 = Z_0$	$Z_2 = jX$, $= 0$, $= \infty$

$\boxed{\text{Nagyfrekv. imp. mérés:}}$ $\boxed{Z = ?}$

$\cancel{Z_2 = Z?}$

1) $\boxed{Z_2 = Z}$

- σ kiszámítása
- $|U(x)|_{max}$ helyek megkeresése

2) $\boxed{Z_2 = 0}$ (rövidzár)

- $|U(x)|_{max}$-ok Δx eltolódásának megmérése

$$\sigma = \frac{1+|r|}{1-|r|} \quad \Rightarrow \quad \boxed{|r| = \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1}}$$

umax hely:

$$\boxed{r = |r|\, e^{j\varphi}}$$

1) $\cos(\underbrace{\beta x - \varphi/2}_{2\pi}) = 1$

$$\boxed{x_1 = \frac{2\pi + \varphi/2}{\beta}}$$

2) $r = -1 = e^{j\pi}$

$$\boxed{x_2 = \frac{2\pi + \pi/2}{\beta}}$$

$$\boxed{\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{\pi}{2\beta} - \frac{\varphi}{2\beta} = \frac{\pi - \varphi}{2\beta}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\varphi = \pi - \Delta x \cdot 2\beta}$$

$x = l - z$

$\boxed{\Delta x = -\Delta z}$

ismert: $\boxed{\gamma, Z_0, l;\ \sigma, \Delta x}$

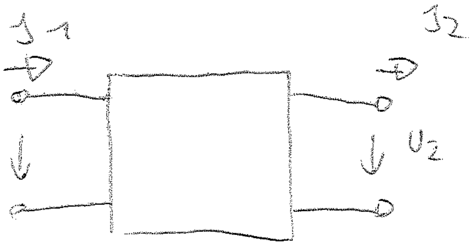
$\gamma \to j\beta$

$$\boxed{Z = \frac{U_2}{I_2} \underset{x=0}{=} \frac{U(0)}{I(0)} = Z_0 \cdot \frac{1+r}{1-r} = Z_0 \cdot \frac{1+|r|\, e^{j\varphi}}{1-|r|\, e^{j\varphi}}}$$

$$\boxed{Z = Z_0 \cdot \frac{(\sigma+1) + (\sigma-1)\cdot e^{j(\pi - \Delta x \cdot 2\beta)}}{(\sigma+1) - (\sigma-1)\cdot e^{j(\pi - \Delta x \cdot 2\beta)}} = Z_0 \cdot \frac{(\sigma+1) - (\sigma-1)\cdot e^{-j\Delta x \cdot 2\beta}}{(\sigma+1) + (\sigma-1)\cdot e^{-j\Delta x \cdot 2\beta}}}$$

$\boxed{\text{EMT VT 44}}$ 2kapu TV, láncparam, $\underbrace{\text{T-}\Pi \text{ helyett. kép}}$ tekinthető-e koncentr. param. elosztott megvalósításnak?

$\boxed{\text{Lánc ref. irányok:}}$



Lánc paraméterek:

$$\boxed{\begin{bmatrix} U_1 \\ J_1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ J_2 \end{bmatrix}}$$

$\boxed{z=0}$

$$U_1 = U_1^+ + U_1^-$$

$$J_1 = \frac{U_1^+}{Z_0} - \frac{U_1^-}{Z_0}$$

$\boxed{z=l}$

$$U_2 = U_1^+ e^{-\gamma l} + U_1^- e^{\gamma l}$$

$$J_2 = \frac{U_1^+}{Z_0} e^{-\gamma l} - \frac{U_1^-}{Z_0} e^{\gamma l}$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ J_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{Z_0} & -\frac{1}{Z_0} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{E}}} \begin{bmatrix} U^+ \\ U^- \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_2 \\ J_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{-\gamma l} & e^{\gamma l} \\ \frac{1}{Z_0} e^{-\gamma l} & -\frac{1}{Z_0} e^{\gamma l} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{D}}} \begin{bmatrix} U^+ \\ U^- \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} U^+ \\ U^- \end{bmatrix} = \underline{\underline{D}}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ J_2 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} U_1 \\ J_1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{D}}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ J_2 \end{bmatrix}}$$

$$\underline{\underline{D}}^{-1} = \underbrace{\frac{1}{\left(-\frac{1}{Z_0} - \frac{1}{Z_0}\right)}}_{-\frac{Z_0}{2}} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{Z_0} e^{\gamma l} & -e^{\gamma l} \\ -\frac{1}{Z_0} e^{-\gamma l} & e^{-\gamma l} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \cdot \begin{bmatrix} b_2 & -a_2 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix}}$$

$\mathrm{ch}\, x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$	$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$
$\mathrm{sh}\, x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$	$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$

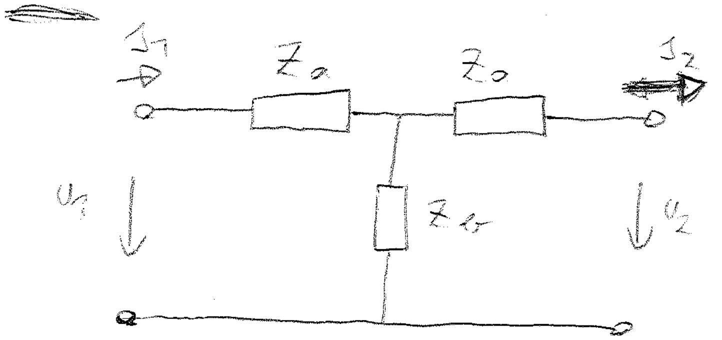
$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{D}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{e^{\gamma l}}{2} & \frac{Z_0 \cdot e^{\gamma l}}{2} \\ \frac{e^{\gamma l}}{2} & \frac{-Z_0 \cdot e^{-\gamma l}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{Z_0} & -\frac{1}{Z_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{\gamma l}+e^{\gamma l}}{2} & Z_0 \cdot \frac{e^{\gamma l}-e^{-\gamma l}}{2} \\ \frac{1}{Z_0} \cdot \frac{e^{\gamma l}-e^{\gamma l}}{2} & \frac{e^{\gamma l}+e^{-\gamma l}}{2} \end{bmatrix}$$

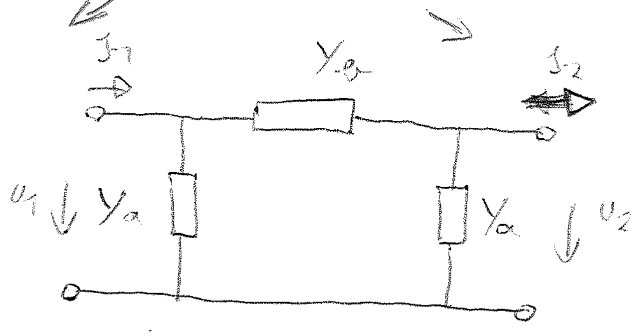
$$\boxed{A = \begin{bmatrix} ch(\gamma l) & Z_0 \cdot sh(\gamma l) \\ \frac{1}{Z_0} \cdot sh(\gamma l) & ch(\gamma l) \end{bmatrix}}$$

reciprok: $\boxed{\det \underline{A} = 1}$

szimmetrikus: $\boxed{A_{11} = A_{22}}$

Adás ref. irány továbbra is





$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{Z}} \cdot \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{Y}} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

$\cancel{U_1 = (Z_a + Z_b) J_1 + \ldots}$

$U_1 = (Z_a + Z_b) J_1 - Z_b J_2$

$-Z_b = Z_{12}$

$\boxed{Z_b = -Z_{12}}$

$\boxed{Z_a = Z_{11} - Z_b = Z_{11} + Z_{12}}$

$J_1 = Y_a U_1 + Y_b (U_1 - U_2) =$

$= (Y_a + Y_b) U_1 - Y_b U_2$

$-Y_b = Y_{12}$

$\boxed{Y_b = -Y_{12}}$

$\boxed{Y_a = Y_{11} - Y_b = Y_{11} + Y_{12}}$

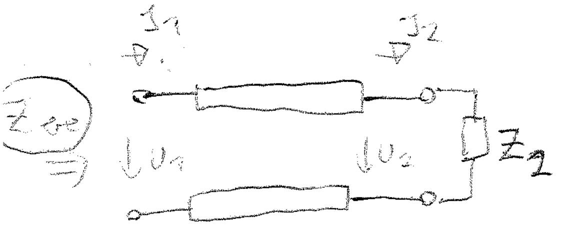
$\Rightarrow$ Nem teljesíthető koncentrált param. hálózati megvalósításuk, mert a tagok NEM racionális törtfüggvényei ω-nak. ~~(lásd~~

$\rightarrow$ lásd γ és Z_0 ω függése $\Rightarrow$ Ezek nem valódi impedanciák, csak adott ω-hoz hely. érvényes.

EMT VT 45

bemeneti imp.

⇒ illesztési feladathoz hogy használható?



$$\boxed{Z_2 = \frac{U_2}{I_2}}$$

$$\boxed{Z_{be} \triangleq \frac{U_1}{I_1}} \qquad \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} ch(\gamma l) & Z_0 \cdot sh(\gamma l) \\ \frac{1}{Z_0} \cdot sh(\gamma l) & ch(\gamma l) \end{bmatrix}$$

$$\cdot \frac{Z_0}{I_2}$$

$$\boxed{Z_{be} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2 \cdot ch(\gamma l) + Z_0 \cdot I_2 \cdot sh(\gamma l)}{\frac{U_2}{Z_0} \cdot sh(\gamma l) + I_2 \cdot ch(\gamma l)} = Z_0 \cdot \frac{Z_2 \cdot ch(\gamma l) + Z_0 \cdot sh(\gamma l)}{Z_2 \cdot sh(\gamma l) + Z_0 \cdot ch(\gamma l)}}$$

Ideális távvezeték:

$$\boxed{ch(\gamma l) = ch(j\beta l) = \cos(\beta l)}$$

$$\boxed{sh(\gamma l) = sh(j\beta l) = j \cdot \sin(\beta l)}$$

$$\boxed{Z_{be} = Z_0 \cdot \frac{Z_2 \cdot \cos(\beta l) + j \cdot Z_0 \cdot \sin(\beta l)}{j Z_2 \cdot \sin(\beta l) + Z_0 \cdot \cos(\beta l)}}$$

$\boxed{Z_2 = Z_0} \Rightarrow \boxed{Z_{be} = Z_0}$

illesztési feladat: $\boxed{Z_0 \text{ keresése}}$

$\boxed{Z_2 = 0} \Rightarrow \boxed{Z_{be,rz} = j \cdot Z_0 \cdot tg(\beta l)}$

$\boxed{Z_2 = \infty} \Rightarrow \boxed{Z_{be,üj} = -j \cdot Z_0 \cdot ctg(\beta l)}$

$$\boxed{Z_0 = \sqrt{Z_{be,rz} \cdot Z_{be,üj}}}$$

illesztési feladat: TV szakaszok lapcsolás

→ 2. TV bemeneti impedanciája legyen egyenlő az 1. TV hullámimpedanciájával

EMT VT 46 homogén hullámegyenlet: $\vec{E}, \vec{H}$

homogén (+izotróp+lin) közeg:

$\mu, \sigma, \varepsilon = \text{áll}$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{B} &= \mu \vec{H} \\ \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} \\ \vec{J} &= \sigma \vec{E} \end{aligned}}$$

! Nincs forrás:

$$\boxed{\begin{aligned} \rho &= 0 \\ J_{be} &= 0 \\ E_{be} &= 0 \end{aligned}}$$ (*)

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &\neq 0 \\ J &\neq 0 \end{aligned}}$$

Vektoriális hullámegyenletek:

$$\boxed{\begin{aligned} \text{rot}\, \vec{H} &= \sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \text{rot}\, \vec{E} &= -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \text{div}\, \vec{H} &= 0 \\ \text{div}\, \vec{E} &= 0 \end{aligned}}$$ (*)

$$\text{rot}\,\text{rot}\, \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \text{rot}\, \vec{H} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\text{rot}\,\text{rot}\, \vec{E} = \underbrace{\text{grad}\, \underbrace{\text{div}\, \vec{E}}_{0}}_{0} - \Delta \vec{E}$$

$$\boxed{\Delta \vec{E} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

$$\boxed{\cancel{\Delta \vec{E} + \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}}$$

$$\text{rot}\,\text{rot}\, \vec{H} = \left(\sigma + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) \text{rot}\, \vec{E} = \left(\sigma + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) - \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\text{rot}\,\text{rot}\, \vec{H} = \underbrace{\text{grad}\, \underbrace{\text{div}\, \vec{H}}_{0}}_{0} - \Delta \vec{H}$$

$$\boxed{\Delta \vec{H} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

$$\boxed{\cancel{\Delta \vec{H} + \mu\sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \vec{0}}}$$

EMT VT47 térbeli vektor kompl. ampl. (szin. áll. áll.)
EM hullámok Helmholtz egyenlete E-re

Komplex amplitúdóvektor:

$$\boxed{\overline{\vec{E}} = \overline{E}_x \vec{e}_x + \overline{E}_y \vec{e}_y + \overline{E}_z \vec{e}_z = \vec{E}_r + \vec{E}_i \cdot j}$$

$$\overline{E}_x = E_{rx} + j \cdot E_{ix} = \hat{E}_x \cdot e^{j\varphi_x}$$

$$\overline{E}_y = E_{ry} + j E_{iy} = \dots$$

$$\overline{E}_z = E_{rz} + j E_{iz} = \dots$$

$$\boxed{\vec{E}_x(t) = \vec{e}_x \cdot \mathrm{Re}\left\{\overline{E}_x \cdot e^{j\omega t}\right\}}$$

Az egyes vektorelemek (koordináták) szinuszos állandósult állapotban vannak. ⇒ koordinátánként értelmezett komplex amplitúdó

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}, t) = \mathrm{Re}\left\{\overline{\vec{E}}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t}\right\} = \begin{bmatrix} E_x(\vec{r}, t) \\ E_y(\vec{r}, t) \\ E_z(\vec{r}, t) \end{bmatrix}}$$

Hullámegyenlet:

$$\Delta \vec{E} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\Downarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow j\omega \; ; \; \vec{E} \Rightarrow \overline{\vec{E}}$$

$$\Delta \overline{\vec{E}} - j\omega\mu \cdot (\sigma + j\omega\varepsilon) \overline{\vec{E}} = \vec{0}$$

$$\boxed{\overline{\gamma} = \sqrt{j\omega\mu \cdot (\sigma + j\omega\varepsilon)}}$$ terjedési együttható

Helmholtz: (időfüggetlen hullámegyenlet)

$$\boxed{\Delta \overline{\vec{E}} - \overline{\gamma}^2 \cdot \overline{\vec{E}} = \vec{0}}$$

EMT VI 48

~~... ... ...~~
~~(... ...)~~ = ~~... ... E-re~~

Síkhullám
síkhull 1D Helmh. egy, mi a TEM típusú hullámterj?

$$\boxed{\Delta\vec{E} - \mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

Síkhullám-megoldás:

tér: $\boxed{\vec{E}(x,y,z) = \vec{e}_x \cdot E_x(z)}$
- x-irányú
- z-től függ

idő: $\boxed{E_x(z,t) = \mathrm{Re}\{\bar{E}_x(z)\cdot e^{j\omega t}\} = \hat{E}_x(z)\cdot\cos(\omega t + \varphi(z))}$

$$\Delta\vec{E} = \begin{bmatrix}\Delta E_x\\ \Delta E_y\\ \Delta E_z\end{bmatrix} = \vec{e}_x\cdot\Delta E_x = \vec{e}_x\cdot\left(\frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial z^2}\right) =$$

$$= \vec{e}_x\cdot\frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu\sigma\frac{\partial E_x}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

$$\Downarrow \frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow j\omega;\ E_x(z,t) \Rightarrow \bar{E}_x(z)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{E}_x(z)}{\partial z^2} - \mu j\omega\cdot(\sigma + \varepsilon j\omega)\bar{E}_x(z) = 0$$

$$\boxed{\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \bar{E}_x(z)}{\partial z^2} - \gamma^2\bar{E}_x(z) = 0} \quad \frac{d^2}{dz^2}!$$

$$\boxed{\frac{d^2 \bar{E}_x(z)}{dz^2} - \gamma^2\bar{E}_x(z) = 0}$$

~~Síkhullám az azonos~~
~~fázisú helyek egy~~
~~egyenesre illeszkednek~~ (*)

~~TEM: transzverzális EM terjedés~~
- a ~~hullámnak csak a terjedésre~~
~~merőlegesen van komponense~~

$\boxed{\vec{H}\perp\vec{E}}$; ~~$\vec{H}\perp\vec{e}_z$~~

- ~~z irányú terj.~~ ~~$\vec{E}\perp\vec{e}_z$~~
- ~~H és E~~ FÁZISBAN

(*) ~~a hullám minden időpillanatban vett képe ugyanolyan a síkban~~

(*) ~~egész hullámtérnek egy~~ ~~síkot~~

H kifejezése:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{e}_y \cdot \left(0 - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right)$$

$$\boxed{\frac{d\overline{E}_x}{dz} = -j\omega\mu \cdot \overline{H}_y}$$

$$\Rightarrow \boxed{-\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \vec{e}_y \cdot \frac{\partial E_x}{\partial z}} \qquad \boxed{\vec{e}_y \parallel \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \parallel \vec{H}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{H}(x,y,z) = H_y(z) \cdot \vec{e}_y}$$

$$\boxed{\frac{d^2 \overline{E}_x}{dz^2} - \gamma^2 \overline{E}_x = 0}$$

$$\boxed{\frac{d^2 \overline{H}_y}{dz^2} - \gamma^2 \overline{H}_x = 0}$$

$$\boxed{E_x(z) = E^+ e^{-\gamma z} + E^- e^{\gamma z}}$$

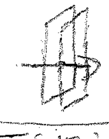
$$H_y(z) = \frac{1}{-j\omega\mu} \cdot \frac{dE_x(z)}{dz}$$

$$\boxed{H_y(z) = \frac{E^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{E^-}{Z_0} e^{\gamma z}}$$

$$\boxed{\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}}$$

$$\boxed{Z_0 = \frac{E^+}{H^+} = -\frac{E^-}{H^-} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}}$$

Síkhullám: Ha z irányba terjed: z = áll. síkokon helyfüggetlen az értéke
⇒ azonos fázisú pontok párhuzamos (z-re merőleges) síkokon vannak.



(Gömbhullám: távoltérben lokálisan síkhullám)

TEM: transzverzális EM: E és H merőlegesek egymásra és a terjedés irányára is (+ fázisban vannak) ?

$\boxed{\text{EMT VT 49}}$ síkhullám - TV analógia, mikor nem alkalmazható?

$\boxed{\text{SH}}$

$$U(z) = U_1^+ e^{-\gamma z} + U_1^- e^{\gamma z}$$

$$I(z) = \frac{U_1^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{U_1^-}{Z_0} e^{\gamma z}$$

$$\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}$$

$$Z_0 = \frac{R' + j\omega L'}{\gamma} = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$$

$\boxed{\text{TV}}$

$$E_x(z) = E^+ e^{-\gamma z} + E^- e^{\gamma z}$$

$$H_y(z) = \frac{E^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{E^-}{Z_0} e^{\gamma z}$$

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}$$

$$Z_0 = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}$$

TV	U	I	R'	L'	G'	C'
SH	E_x	H_y	–	μ	σ	ε

Analógia feltételei ($\boxed{!}$: $\varrho = 0$, $J_{be} = 0$, $E_{be} = 0$)

- TEM : E és H merőleges a terjedés z irányára
- $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$: tér szempontjából csak z-től függenek

→ z = áll. síkban helyfüggetlenek

Az analógia addig használható, amíg lineárisan polarizált síkhullámmal van, mely merőlegesen esik be egy közeghatárra: terjedés iránya $\parallel \vec{n}$

tartományonként homogén közeg

⇒ ebben az esetben definiálható bemeneti impedancia, reflexiós tényező állóhullámarány stb

$\boxed{\text{ÉRT VT50}}$ síkhullám ideális szigetelőben hullámparaméterek, fázissebesség, hullámhossz

Ideális szigetelő: $\boxed{\sigma = \emptyset}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\alpha = \emptyset}$

$$\boxed{\gamma = \sqrt{j\omega\mu \cdot j\omega\varepsilon} = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = j\beta}$$

$$\boxed{\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}}\boxed{= \frac{\omega}{v}} \qquad \boxed{v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}}\boxed{= \frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} \overset{\mu_r=1}{\doteq} \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}}$$

$$\boxed{\Lambda = \frac{2\pi}{\beta}}$$

$$\boxed{Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}} \qquad \boxed{Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \cdot \eta \overset{\mu_r=1}{\doteq} \frac{\eta}{\sqrt{\varepsilon_r}}}$$

Szabadtéri hullámimpedancia (μ_0, ε_0)

$$! \; \boxed{\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \boxed{120\pi}\,\Omega}$$

EMT VI 57 — fizik.: energ. terj., komplex Poynt. v.

Poynt.: • ~~teljesítménysűrűség~~ energiaáram-sűrűség vektor $\left[\frac{\frac{J}{s}}{m^2}\right] = \left[\frac{W}{m^2}\right]$

• energiaáram iránya

komplex amplitúdó vektorok: szinuszos állandósult állapotú vektorkomponensek

↳ amplitúdó és fázis elhelyezkedése

Komplex Poynting vektor:

$$\boxed{\overline{\vec{S}} = \frac{1}{2}\,\overline{\vec{E}} \times \overline{\vec{H}}^{*}} \quad \left[\frac{W}{m^2}\right]$$

Értelmezés:

$$\boxed{\oint_A \overline{\vec{S}}\, d\vec{A} = P + jQ}$$

adott V térfogat komplex teljesítménye (sugárzás)

$$\boxed{P = \mathrm{Re}\{P + jQ\} = \oint_A \mathrm{Re}\{\overline{\vec{S}}\}\, d\vec{A}}$$

adott V térfogat hatásos teljesítménye (sugárzás)

TEM síkhullám:

$$\boxed{\overline{\vec{S}} = \frac{1}{2}\,\overline{E}_x \cdot \overline{H}_y^{*} \cdot \vec{e}_z}$$

⇓

$$\boxed{\overline{S}_z = \frac{1}{2}\,\overline{E}_x \cdot \overline{H}_y^{*}}$$

⇓

Poynting vektor:

$$\boxed{\vec{S}_z = \mathrm{Re}\{\overline{S}_z \cdot e^{j\omega t}\} \cdot \vec{e}_z}$$

z-re merőleges A felület: $|\vec{S}_z|$

$$\boxed{\frac{P}{A} = \mathrm{Re}\{\overline{S}_z\} = \frac{1}{T}\int_0^T S_z(t)\, dt}$$

$\boxed{\bar{P}(z)}$ $\boxed{TV}$

$$\bar{P} = \frac{1}{2}\bar{U}\cdot\bar{J}^* =$$

$$= \frac{1}{2Z_0}\cdot\left(|U_1^+|^2 - |U_1^-|^2\right) =$$

$$= P^+ - P^-$$

$$P^+ = \frac{1}{2}\frac{|U^+|^2}{Z_0} = \frac{1}{2}\bar{U}^+\cdot(\bar{J}^+)^*$$

$$P^- = \frac{1}{2}\frac{|U^-|^2}{Z_0} = -\frac{1}{2}\bar{U}^-\cdot(\bar{J}^-)^*$$

$$\bar{P} = \frac{1}{2Z_0}\cdot\left(|U^+|+|U^-|\right)\left(|U^+|-|U^-|\right) =$$

$$= \frac{1}{2Z_0}\cdot|U(z)|_{max}\cdot|U(z)|_{min} =$$

$$= \frac{1}{2Z_0}\cdot\frac{|U(z)|_{max}^2}{\sigma}$$

$\Uparrow$

ideális TV

- $P \in \mathbb{R}$
- z-től ftlen

$\boxed{\bar{S}_z(z)}$ $\boxed{SH}$

$$\bar{S}_z = \frac{1}{2}\bar{E}_x\cdot\bar{H}_y^* = \frac{1}{2Z_0}\cdot\left(|E^+|^2 - |E^-|^2\right) =$$

$$\cancel{\frac{1}{2Z_0}\cdot\left(|U^+|^2 - |U^-|^2\right)}$$

$$= S_z^+ - S_z^-$$

EMT VT 52 | SH vezető anyagban, hullámparaméterek, behatolási mélység

⇒ nagyfrekv. terek árnyékolása

vezető: $\boxed{\sigma \gg \omega\varepsilon}$ ← jó vezető

kvázistacionárius közelítés $\left(\vec{J} \gg \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu\cdot\sigma} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\mu\sigma\omega}$$

$$\sqrt{j} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$$

45° forgatás

Behatolási / skin mélység:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\cdot\omega}}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\cdot\mu\cdot\sigma}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{s}\cdot\frac{Vs}{Am}\cdot\frac{1}{\Omega m}}} = \sqrt{m^2} = m$$

$$[\delta] = m$$

δ: hosszúság dimenziójú mennyiség

$$\gamma = (1+j)\cdot\frac{1}{\delta} = \frac{1}{\delta} + j\frac{1}{\delta} = \alpha + j\beta$$

$$\alpha = \beta = \frac{1}{\delta}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = \underbrace{\frac{1+j}{\sqrt{2}}}_{\sqrt{j}}\cdot\frac{\sqrt{\omega\mu\sigma}}{\sigma} = \frac{(1+j)}{\sigma}\cdot\frac{1}{\delta} = \frac{\gamma}{\sigma}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{2\pi f\mu\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{f\cdot\pi\mu\sigma}} \sim \frac{1}{\sqrt{f}}$$

Árnyékolás: két végtelen féltér: EM síkhullám $\sigma = 0$-ból $\sigma \gg \omega\varepsilon$-ba

víz → vez.

elf

vezető: ∞ féltér ⇒ $\boxed{E^- = 0}$

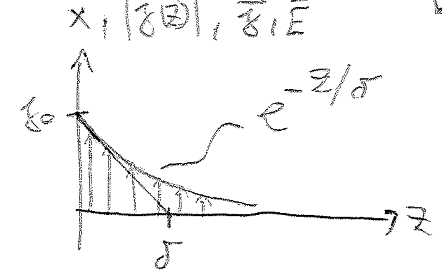
$J(z) \cancel{= \sigma E(z)} = \sigma E^+ \cdot e^{-j\beta z} = J_0 \cdot e^{-jz/\delta}$

$\cancel{|J(z)| = J_0}$

$$J(z) = \sigma E(z) = \sigma E^+ \cdot e^{-(\alpha + j\beta) z} = \underbrace{\sigma E^+}_{J_0} \cdot e^{-\frac{z}{\delta}} \cdot e^{-j\frac{z}{\delta}}$$

$$\boxed{|J(z)| = |J_0| \cdot e^{-z/\delta}} \boxed{\sim |E(z)|} \boxed{\sim |H(z)|}$$

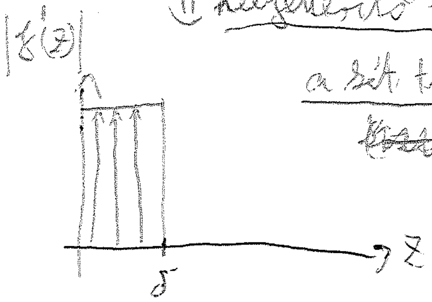
Áramkiszorítás !)



$\boxed{z > 5\delta :}$

$\boxed{J \approx 0} \Rightarrow \boxed{E = 0}$, $\boxed{H = 0}$

!! Helyettesítő közelítés: a két terület (J_0) ~~(???)~~ azonos



J_0

$$\boxed{\Lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi\delta > 5\delta}$$

↳ a vezetőben valójában nincs is hullám

⇒ Ha a beérkező hullám terjedési irányára merőlegesen egy legalább 5δ széles (-vastag) vezető lemezt helyezünk, a lemez túloldalán nem jön ki a TEM hullám.

EMT VT53 — áramkiszorítás, váltakozó áramú ellenállás ⇒ hengeres vezetőre közelítő számítás

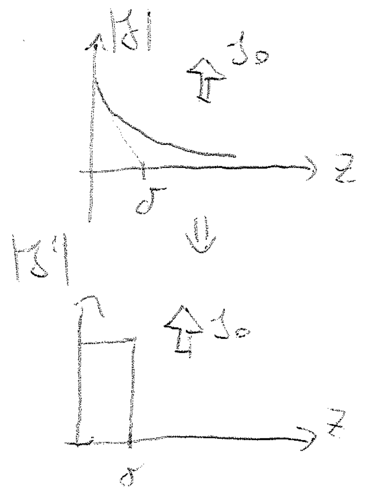
Áramkiszorítás:

Nagyfrekvencián az áramsűrűség nem oszlik el egyenletesen a vezető keresztmetszetén: J kívül a legerősebb és befelé haladva exponenciálisan csökken.

(Nagy f esetén a töltéseknek nincs idejük rendeződni)

Váltakozó áramú ellenállás

Ha egy $d>5\delta$ vastagságú vezető karába nagy f áramot vezetünk, élhetünk azzal a közelítéssel, hogy az áram a külső δ vastagságú karéjdarabban folyik, homogén áramsűrűséggel, belül pedig $J=0$.



Hengeres vezető:

J, f, r, l

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$$

$\Downarrow$

$\delta > r$

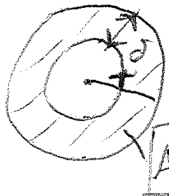
$\delta \sim r$

Egyenáramú közelítés

$$R' = \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{r^2\pi}$$

– teljes keresztmetszeten

$\Rightarrow$ $r \gg \delta$ $(r \gg 5\delta)$



$A \approx 2r\pi\cdot\delta$

$$R' = \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{2r\pi\cdot\delta}$$

$$R = \frac{1}{\sigma}\frac{l}{A}$$

$$R' = \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{A}$$

Ált.: $\vec{S} \Rightarrow P = \frac{1}{2}R\cdot|J|^2 \Rightarrow \boxed{R}$

Ha $r > \delta$:

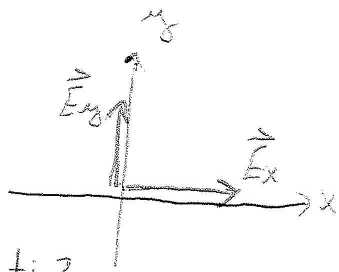
pontosabb közelítés:

$$A \approx 2\cdot\left(r-\frac{\delta}{2}\right)\cdot\pi\cdot\delta$$

$\boxed{\text{EMT VT 54}}$ síkhullám polarizációja
→ mikor alkalmazható a TV analógia?

$$\boxed{\begin{aligned} E_x(t, z=0) &= E_{x0}\cos(\omega t) \\ E_y(t, z=0) &= E_{y0}\cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y}$$



milyen pályát ír le $\vec{E}(t)$ végpontja?

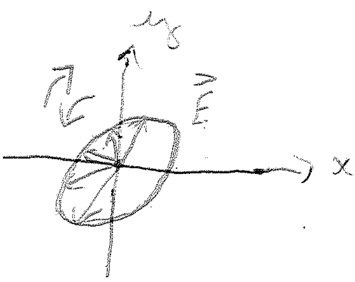
- z = áll. sík

Elliptikus polarizáció (általános) ⇒ Általános egyenlet:

$$\frac{E_x}{E_{x0}} = \cos(\omega t), \quad \frac{E_y}{E_{y0}} = \cos(\omega t + \varphi)$$

$\downarrow$ sin ⟶ $\downarrow$ cos(α+β)

⋮

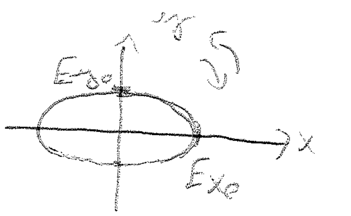


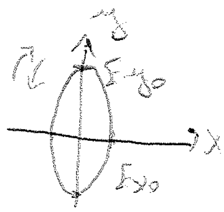
irány nincs megszabva

$\boxed{\varphi = \frac{\pi}{2}}$ x és y a fő- és melléktengely

$$\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\omega t)$$

→ egyik ~~max~~ → másik min

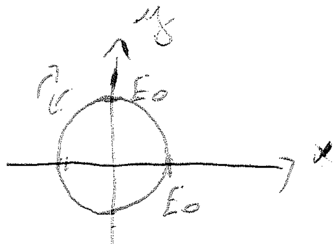




$$\boxed{\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2 = 1}$$

Cirkuláris polarizáció

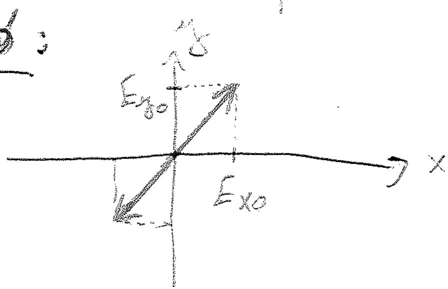
$\boxed{\varphi = \frac{\pi}{2}}$ és $\boxed{E_{x0} = E_{y0}}$

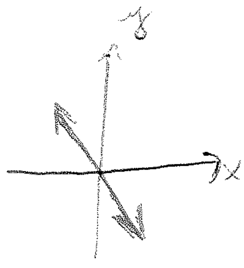


$$\boxed{E_x^2 + E_y^2 = E_0^2}$$

LINEÁRIS POLARIZÁCIÓ:

$\boxed{\varphi = k \cdot \pi}$

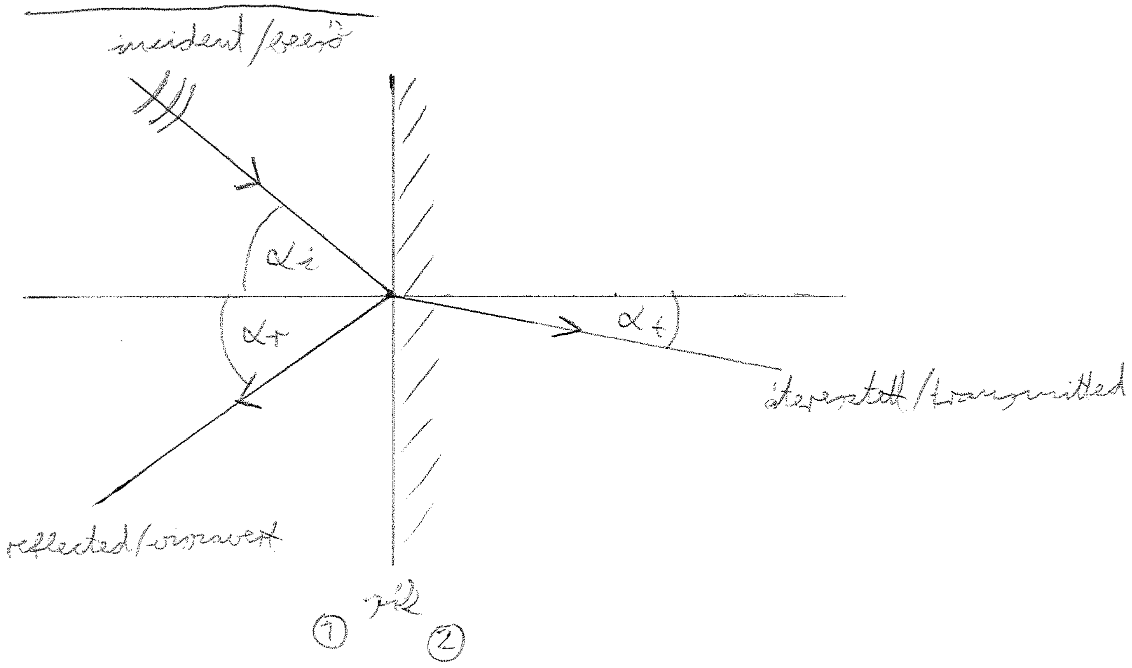




$\boxed{\text{TV analógia:}}$ Linearizált síkhullám esetén, mely közeghatár esetén a határfelületre merőleges terjedési irányú.

EMT VI 55 síkhullám anyaghatáron, merőleges beesés → TV analógia?

Ferde beesés (ált):



Snellius Descartes: ($\mu_r = 1$)

$\boxed{\alpha_r = \alpha_i}$

$$\boxed{\frac{\sin(\alpha_2)}{\sin(\alpha_1)} = \frac{\sin(\alpha_t)}{\sin(\alpha_i)} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}}}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{c/\sqrt{\varepsilon_{r2}}}{c/\sqrt{\varepsilon_{r1}}}}$$

$\boxed{E_{1t} = E_{2t}}$

Ha $K = 0$: $\boxed{H_{1t} = H_{2t}}$

Ha $\rho_s = 0$: ($\rho = 0$ feltételezve volt)

$\boxed{D_{1n} = D_{2n}}$ ⊛

$\boxed{B_{1n} = B_{2n}}$

csak $\vec{E}$: (H-t E-ből)

⊛ $\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$

$\boxed{E_{2n} = E_{1n} \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$ ⇒ Ha $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ ⇒ α_t kisebb lesz

Merőleges beesés: [Lineárisan polarizált TEM hullám esetén]

$\Downarrow$

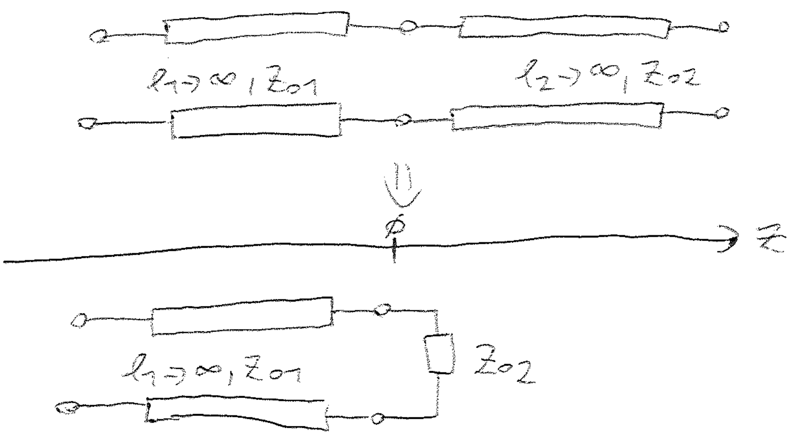
Távvezeték analógia

- csak tangenciális komponens van

→ **Közeghatáron folytonos átmenet** (távvezeték kaszkád kapcs.)

2 végtelen féltér: ① → ②

② - ből nincs visszaverődés (∞) $\Rightarrow$ $\boxed{Z_{be2} = Z_{02}}$



Határfelület: ($z=0$)

$$\left.\begin{aligned} E_{10} &= E_1^+ + E_1^- \\ E_{20} &= E_2^+ \end{aligned}\right\} \xrightarrow{E_{1t}=E_{2t}} \boxed{\underbrace{E_1^+}_{\text{beeső}} + \underbrace{E_1^-}_{\text{visszavert}} = \underbrace{E_2^+}_{\text{átvezetett}}} \text{ — komplex}$$

$$\left.\begin{aligned} H_{10} &= \frac{E_1^+}{Z_{01}} - \frac{E_1^-}{Z_{01}} \\ H_{20} &= \frac{E_2^+}{Z_{02}} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{H_{1t}=H_{2t}} \boxed{\frac{E_1^+}{Z_{01}} - \frac{E_1^-}{Z_{01}} = \frac{E_2^+}{Z_{02}}}$$

$$\boxed{Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}}$$

reflexiós tényező: $\boxed{Z_2 = Z_{02}}$

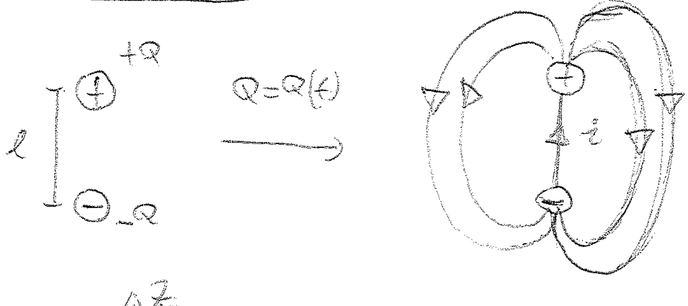
$$\boxed{r = \frac{E_1^-}{E_1^+} = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}}} \qquad \boxed{|r| \leq 1, \text{ ha } \mathrm{Re}\{Z_{02}\} \geq 0}$$

EMT VT 56 Hertz dipólus fogalma, elektr. és mágneses terének fő jellemzői
- közeltér, távoltér jelentése

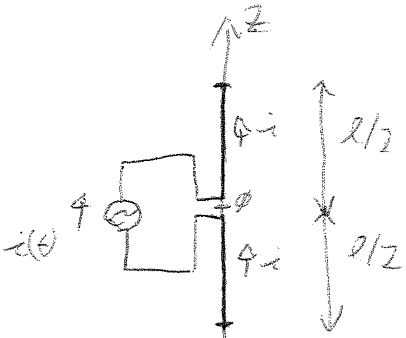
Hertz dipólus

Elemi sugárzó dipólus

$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ eltolási áram



Vékony vezetékből kialakított antenna előáll Hertz dipólusok szuperpozíciójaként.
⇒ áramelosztás ismeretében!



Elemi vezetékdarab, melyen $i(t) = I_0 \cdot \cancel{\sin}(\omega t)$ áram folyik

$\boxed{l \ll \lambda = \frac{c}{f}}$ ⇒ a vezeték mentén $I(z)$=állandó

gömbi koord. rdsz:

r, ϑ, φ

ϑ – elevációs szög; φ – azimutális szög

$\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$

$i(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t)$

$\boxed{\bar{I} = I_0 \cdot (-j)}$

Forgásszimmetria: $\boxed{\bar{\bar{E}}(r,\vartheta)}$, $\boxed{\bar{\bar{H}}(r,\vartheta)}$ φ-től nincs függés

közeltér: $\frac{1}{r^3}$ és $\frac{1}{r^2}$ szerint eltűnő tagok még jelentősek

távoltér: $\frac{1}{r^3} \approx 0$, $\frac{1}{r^2} \approx 0$ ⇒ csak $\frac{1}{r}$ szerint eltűnő tagok maradnak

közeltér:

$\bar{E}$:	$\bar{E}_r(r,\vartheta)$: $\frac{1}{r^3}, \frac{1}{r^2}$	$\bar{E}_\vartheta(r,\vartheta)$: $\frac{1}{r^3}, \frac{1}{r^2}, \frac{1}{r}$	$\bar{E}_\varphi(r,\vartheta) = 0$
H:	$\bar{H}_r(r,\vartheta) = 0$	$\bar{H}_\vartheta(r,\vartheta) = 0$	$\bar{H}_\varphi(r,\vartheta)$: $\frac{1}{r^2}, \frac{1}{r}$

távoltér: $\left(\frac{1}{r}\right)$

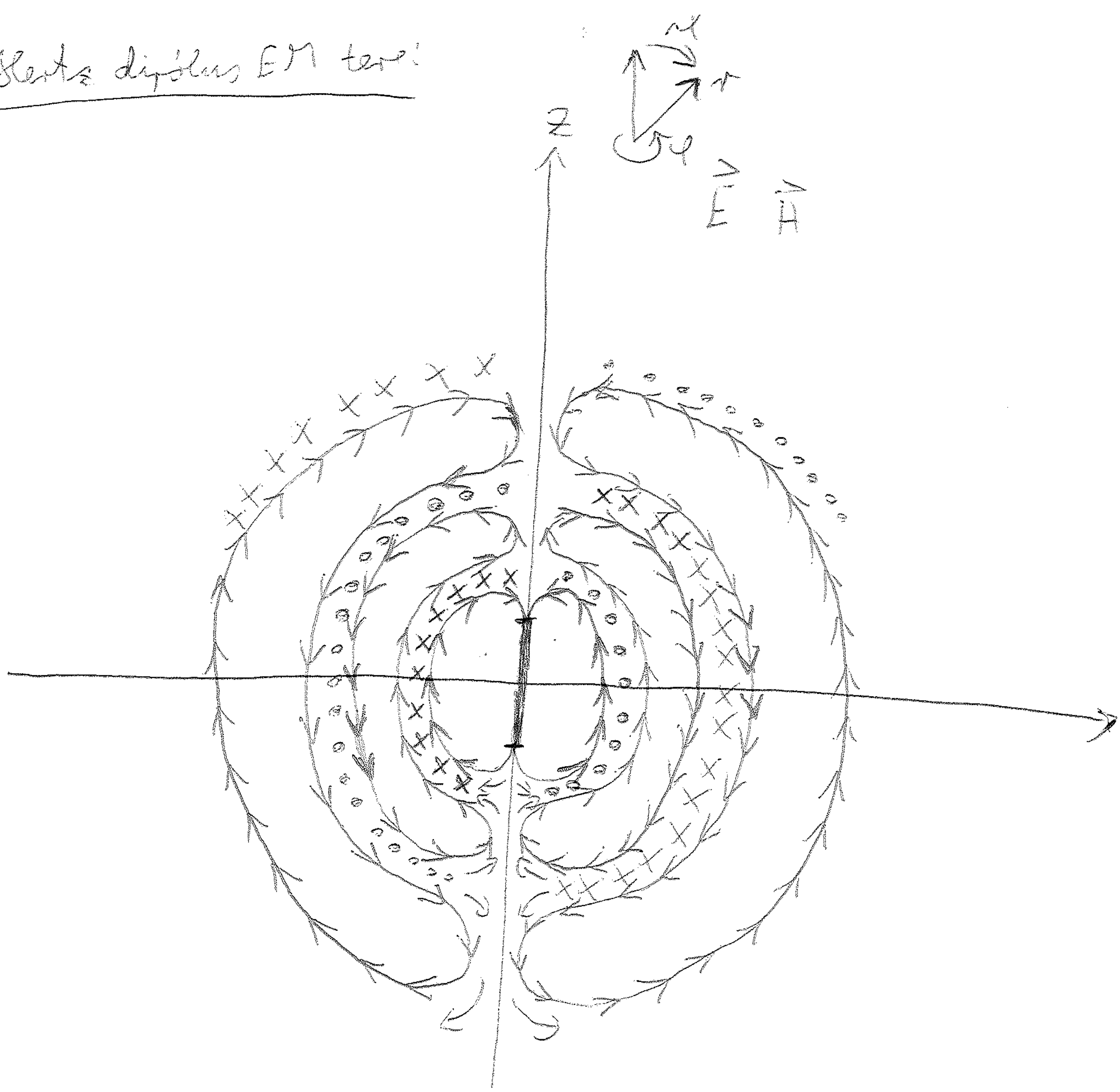
$$E_\vartheta(r,\vartheta) = Z_0 \cdot \frac{I_0 \cdot l}{2\lambda} \cdot \frac{\sin\vartheta}{r} \cdot e^{-j\beta r}$$

$$H_\varphi(r,\vartheta) = \frac{I_0 \cdot l}{2\lambda} \cdot \frac{\sin\vartheta}{r} \cdot e^{-j\beta r}$$

- fázisban
- $E \perp H$
- terjedésre merőlegesek (r irányba)

} TEM

Hertz dipólus EM tere:



$\boxed{\text{EMT VT 57}}$ Hertz dipólus távoltere, teljesítményáram.

$\boxed{\text{Távoltér}}$ $\boxed{\frac{1}{r^3} \approx 0 \,,\, \frac{1}{r^2} \approx 0}$

$\boxed{i(t) = I_0 \sin(\omega t)}$

szabadtér: $\boxed{\sigma = 0}$

$\boxed{Z_0 = \eta = 120\pi\ \Omega}$

valós

$$\boxed{\begin{array}{l} \bar{E}_{\vartheta}(r,\vartheta) = Z_0 \cdot \frac{I_0 \cdot l}{2\lambda} \cdot \frac{\sin\vartheta}{r} \cdot e^{-j\beta r} \\ \hline \bar{H}_{\varphi}(r,\vartheta) = \frac{I_0 \cdot l}{2\lambda} \cdot \frac{\sin\vartheta}{r} \cdot e^{-j\beta r} \end{array}}$$

$\Rightarrow$
- E és H fázisban vannak $\rightarrow$ csak hatásos teljesítményt szállítanak $\rightarrow$ $\boxed{\text{TEM}}$
- $E = Z_0 \cdot H$
- E és H merőlegesek egymásra és a terjedés irányára (r)
- $\boxed{E \sim \frac{1}{r}}$; $\boxed{H \sim \frac{1}{r}}$
- kis környezetben: $\boxed{\frac{\sin\vartheta}{r} \approx \text{áll.}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{lokálisan síkhullám}}$

$\boxed{\text{Komplex Poynting vektor:}}$

$$\boxed{\vec{S}} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* = \frac{1}{2} (\bar{E}_{\vartheta} \vec{e}_{\vartheta}) \times (\bar{H}_{\varphi}^* \vec{e}_{\varphi}) = \boxed{\bar{S}_r \cdot \vec{e}_r}$$

$$\boxed{\bar{S}_r(r,\vartheta) = S_r(r,\vartheta) = \frac{1}{2} Z_0 \cdot H_{\varphi}^2 = Z_0 \cdot \frac{I_0^2 \cdot l^2}{8\lambda^2} \cdot \frac{\sin^2\vartheta}{r^2}}$$

- valós $\Rightarrow$ hatásos telj. (Z_0 is valós)
- r irányú (terjedés iránya)
- $\boxed{\sim \frac{1}{r^2}}$

$\boxed{\bar{H} \cdot \bar{H}^* = H^2}$

sugárzási ellenállás

$$\boxed{P = \oint_A \vec{S}_r(r,\vartheta)\, d\vec{A} = \frac{1}{2} I_0^2 \cdot R_S}$$

$\boxed{\text{EMT VT58}}$ antennajellemzők → Hertz dip. ÉRTEK
iránykarakterisztika, sugárzási ellenállás
irányhatás, antennanyereség, hatásos felület

$\boxed{\text{Iránykarakterisztika / sugárzási karakt.:}}$

- adott irányban mellyen intenzitással sugároz az antenna

amplitúdó

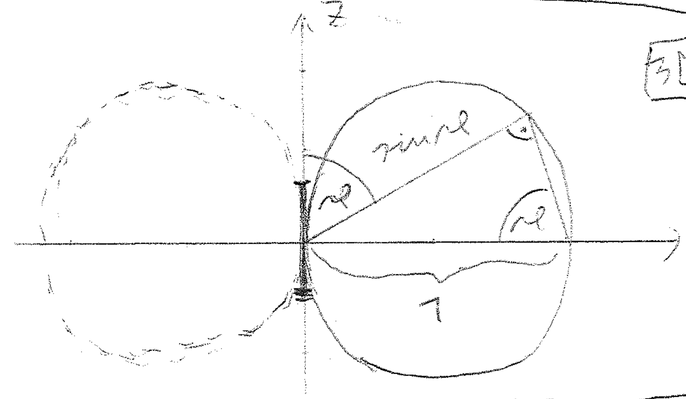
$\boxed{R:}$ távoltérben

$$\boxed{h(\vartheta,\varphi) = \frac{E(r=R,\vartheta,\varphi)}{\max\limits_{\vartheta',\varphi'}\left[E(r=R,\vartheta',\varphi')\right]}}$$

← normalizálja

egyenes antenna: $\boxed{\frac{\partial}{\partial\varphi} = 0} \Rightarrow \boxed{h(\vartheta,\varphi) = h(\vartheta)}$ forgásszimm.

$\boxed{\text{H-dip:}}$ $$\boxed{h(\vartheta) = \frac{E(r=R,\vartheta)}{E(r=R,\frac{\pi}{2})} = |\sin(\vartheta)|}$$



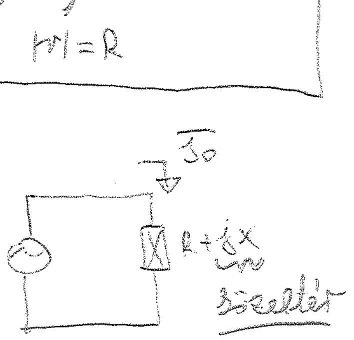
$\boxed{\text{3D: tórusz}}$

$\boxed{\text{Sugárzási ellenállás:}}$ $$\boxed{S_r(r,\vartheta) = Z_0\cdot\frac{I_0^2\cdot l^2}{8\lambda^2}\cdot\frac{\sin^2\vartheta}{r^2} = \frac{1}{2}Z_0\cdot|H_\varphi|^2}$$

$$\boxed{P_S = \oint\limits_{|r|=R} \mathrm{Re}\{\vec{S}\}\,d\vec{a}} \qquad \boxed{R_S = \frac{2P_S}{|I_0|^2}}$$

Jacobi det

$\boxed{\text{H-dip:}}$ $$P_S = \int_{\vartheta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} S_r(R,\vartheta)\cdot R^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$$



$$P_S = Z_0\cdot\frac{I_0^2\cdot l^2}{8\lambda^2}\cdot 2\pi\cdot\underbrace{\int_{\vartheta=0}^{\pi}\sin^3\vartheta\,d\vartheta}_{4/3}$$

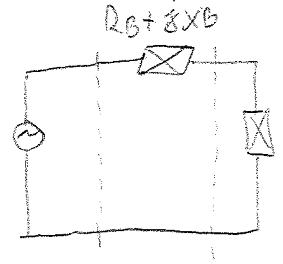
$$\boxed{P_S = Z_0\cdot\frac{I_0^2\cdot l^2}{3\lambda^2}\cdot\pi} \qquad \boxed{Z_0 = 120\pi\ \Omega}$$

$$\boxed{R_S} = \frac{2P_S}{I_0^2} = \frac{2\cdot 120\pi \cdot \pi}{3}\cdot\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 = \boxed{80\pi^2\cdot\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2\ \Omega}$$

Iránytényező:

antenna belső imp.

$$\boxed{D = \frac{S_{max}}{S_{átl}}} = \boxed{\frac{S_{max}}{\left(\frac{P_S}{4R^2\pi}\right)}}$$



$$\boxed{S_{max} = \max_{\vartheta,\varphi}\left[S(R,\vartheta,\varphi)\right]}$$

Antennanyereség:

$$\boxed{G = \frac{S_{max}}{S_{izotróp}} = \frac{S_{max}}{\left(\frac{P_{be}}{4R^2\pi}\right)}}$$

$$\boxed{P_{be} = P_S + P_{B,veszt}}$$

↳ jó vezetőképességű antenna:

$$\boxed{P_{be} \approx P_S}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{G \approx D}$$

H-dip:

$$S_{r\,max} = 120\pi\cdot\frac{I_0^2\cdot l^2}{8\lambda^2}\cdot\frac{1}{R^2} =$$

$$S_{r\,átl} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 80\pi^2\cdot\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2\cdot I_0^2}{4R^2\pi}$$

$$\boxed{D = \frac{S_{r\,max}}{S_{r\,átl}} = \frac{15}{10} = \boxed{\frac{3}{2}}}$$

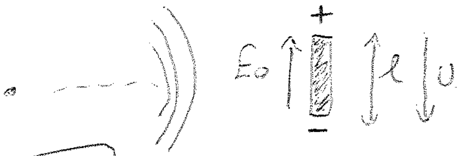
$$\boxed{A_R = \frac{P_{R\,max}}{S_0}}$$

reciprocitás: adó ⟷ vevő

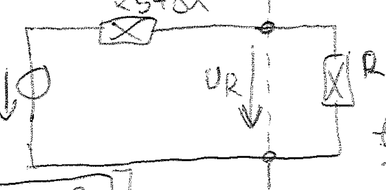
$$\boxed{\frac{A}{G} = áll}$$

$$\boxed{\frac{A}{G} = \frac{\lambda^2}{4\pi}}$$ ∀ antennára

Hatásos felület: vevő antenna: feszültség indukálódik



$$\boxed{U_i = E_0\cdot l}$$



teljesítmény-illesztés

Telj. ill.:

$$\boxed{U_R = \frac{E_0\cdot l}{2}}$$

$$P_{R} \Rightarrow \boxed{P_{R\,max} = \frac{1}{2}\frac{U_R^2}{R_S}} \neq \boxed{S_0 = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{Z_0}} \quad \overset{\Rightarrow}{\boxed{P_R}}_{\text{vett}} \Rightarrow \boxed{P_{R\,max}}$$

H-dip:

$$\boxed{P_{R\,max} = \frac{(E_0 l)^2}{8\cdot 80\pi^2(l/\lambda)^2}}$$

S_0: beérkező telj. sűr.

$$\boxed{S_0 = \frac{E_0^2}{2\cdot 120\pi}} \Rightarrow \boxed{A_R = \frac{3\cdot\lambda^2}{8\pi}}\ [m^2]$$