1	2	3	4	5
10	9	10	5	34

NÉV: .... NEPTUN-KÓD: .... Gyak vezető neve: ....

Matematika A4 (Valószínűségszámítás), **2. zárthelyi, 2013. 12. 02., ELSŐ MENET: 8 óra.** *Munkaidő: 45 perc.*
A normális eloszlással kapcsolatos valószínűségeket elég, ha megadja a Φ függvénnyel vagy valamilyen Excel függvénnyel.

1. Tegyük fel, hogy (X, Y) sűrűségfüggvénye: $f(x, y) = (2x + 4y)/3 \quad (0 < x < 1,\ \ 0 < y < 1)$ **a)** Számolja ki a $P(Y < X^2)$ valószínűséget? **b)** Határozza meg az $X = 0.5$ feltétel mellett Y várható értékét! (5-5 pont)

2. Tegyük fel, hogy egy hegycsúcson az éjféli hőmérséklet (X) és a déli hőmérséklet (Y) Celsius fokokban mért értéke kétdimenziós normális eloszlást követ. A korrelációs együttható 0.8. A várható értékek: -2.5 , illetve 15.5 Celsius fok, a szórások egyenlőek: 3 Celsius fok. **a)** Éjfél és dél között mennyi a hőmérséklet emelkedésének, vagyis $Y - X$-nek a várható értéke és szórása? **b)** Mennyi a valószínűsége annak, hogy a hőméséklet emelkedése több, mint 15 Celsius fok, feltéve, hogy kevesebb, mint 20? (5-5 pont)

3. (A 2. feladat folytatása) **a)** Mennyi a valószínűsége annak, hogy éjfélkor nem fog fagyni, vagyis $X > 0$, ha délben 20 Celsius fokot mérnek? **b)** Mennyi a várható hőmérséklet délben, ha éjfélkor a hőmérséklet x Celsius fok? (5-5 pont)

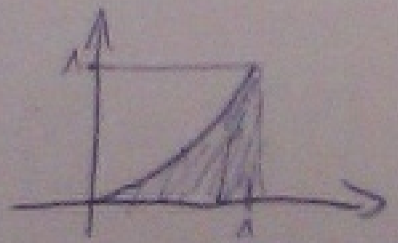
4. (A 2. feladat folytatása) Szimulálja Excellel a hőmérséklet emelkedését! (5 pont)

A4 2.ZH

1.

$$f(x,y) = \frac{2x+4y}{3} \qquad 0<x<1,\quad 0<y<1$$

a) $$P(Y<X^2) = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{x=0}^{1}\left[\frac{2xy+2y^2}{3}\right]_0^{x^2} dx =$$



$$= \int_0^1 \frac{2x^3+2x^4}{3}\,dx = \left[\frac{\frac{x^4}{2}+\frac{2x^5}{5}}{3}\right]_0^1 = \frac{3}{10}$$

5 pont

b) $$f_{2|1}(y|X=x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{2x+4y}{2x+2}$$

$$f_1(x) = \int_0^1 f(x,y)\,dy = \left[\frac{2xy+2y^2}{3}\right]_0^1 = \frac{2x+2}{3}$$

$$E(Y|X=0,5) = \int_0^1 y\cdot f_{2|1}(y|X=0,5)\,dy = \int_0^1 y\cdot\frac{1+4y}{1+2}\,dy = \left[\frac{\frac{y^2}{2}+\frac{4y^3}{3}}{3}\right]_0^1 = \frac{11}{18}$$

5 pont

2. $r(X,Y)=0,8$

X: éjjel $\quad E(X)=-2,5 \quad D(X)=D(Y)=3$

Y: dél $\quad E(Y)=15,5$

a) $E(Y-X)=E(Y)-E(X)=\underline{\underline{18}}\ °C$ ✓

$Cov(X,Y)=r(X,Y)\cdot D(X)\cdot D(Y)=0,8\cdot 3\cdot 3=\underline{7,2}$

$D^2(Y-X)=D^2(Y)+D^2(-X)\mp 2\cdot Cov(X,Y)=9+9\mp 2\cdot 7,2=32,4$

$D(Y-X)=\underline{\underline{\sqrt{32,4}\approx 5,5}}$

4 pont

b) $P(Y-X>15\mid Y-X<20)=\dfrac{P(15<Y-X<20)}{P(Y-X<20)}=\underline{\underline{\dfrac{\Phi\left(\frac{20-18}{5,5}\right)-\Phi\left(\frac{15-18}{5,5}\right)}{\Phi\left(\frac{20-18}{5,5}\right)}}}$ ✓

pl. Excel: $\Phi\left(\frac{20-18}{5,5}\right)=$ NORMDIST(20, 18, 5.5, TRUE)

5 pont

a)

$P(X>0 \mid Y=20) = ?$ Feltételes várható ért.

várható érték:

$\mu_f = \mu_x + (y-\mu_y)\cdot r(x,y)\cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = -2,5 + (20-15,5)\cdot 0,8\cdot \frac{3}{3}$

$\mu_f = 1,1$

szórás:

$\sigma_f = \sigma\cdot\sqrt{1-r^2} = 3\cdot\sqrt{1-0,8^2} = 1,8$

$P(X>0 \mid Y=20) = 1 - \Phi\left(\frac{0-1,1}{1,8}\right)$

$P(X>0 \mid Y=20) = 1 - P(X<0 \mid Y=20)$

5 pont

b) $X=x$

$E(Y)=?$

$E(Y) = \mu_y + (x-\mu_x)\cdot r(x,y)\cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 15,5 + (x+2,5)\cdot 0,8\cdot\frac{3}{3} = 0,8x + 17,5$

5 pont