Villamosmérnök A3 (2013 ősz) 2. vizsgazh ZH

Minden feladat 12 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. Legyen F az az $[x, y]$ síkon nyugvó R sugarú, m magasságú kifelé irányított hengerpalást, amelynek tengelye a z-tengely, és $v(r) = \mathbf{k} \times r$. $\int_F v \, df =?$

2. Legyen F a $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,1)$ csúcsokkal adott háromszöglap úgy irányítva, hogy a $(0,-1,1)$ vektor egy felületi normálisa, és legyen $v(x, y, z) = (xy, xz, xyz)$! $\int_F \operatorname{rot} v \, df =?$

3. Legyen K az origó, L a 2 középpontú 1 sugarú, pozitívan irányított körvonal és $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$! (a) $\int_K f(z) \, dz =?$ (b) $\int_L f(z) \, dz =?$

4. Oldja meg az $y' = x - y + 1$ differenciálegyenletet!

5. (a) Mit nevezünk egy $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vektorfüggvény potenciálfüggvényének?
Igazak-e a következő állítások?
(b1) Ha $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ folytonos, akkor van potenciálfüggvénye.
(b2) Ha $v : G \to \mathbb{R}^2$ folytonosan deriválható a $G \subseteq \mathbb{R}^2$ egyszeresen összefüggő nyílt halmazon és itt $\operatorname{rot} v = 0$, akkor v-nek van potenciálfüggvénye G-n.
(c) Mit nevezünk egy komplex függvény izolált szingularitási helyének?

Villamosmérnök A3 (2013 ősz) **2. vizsgazh ZH**

Minden feladat 12 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. Legyen F az az $[x, y]$ síkon nyugvó R sugarú, m magasságú kifelé irányított hengerpalást, amelynek tengelye a z-tengely, és $v(r) = \mathbf{k} \times r$. $\int_F v\, df = ?$

Megoldás. F r-beli normálisa a $\mathbf{k}$ és r által kifeszített síkban van és így merőleges $\mathbf{k} \times r$-re. Ezért F-en $v_n = 0$, amiből $\int_F v\, df = \int_F v_n\, |df| = 0$.

VAGY Gauss-Osztrogradszkij tétellel: legyen H az a henger, amelynek palástja F, F^+ pedig ennek kifelé irányított felülete. $\int_{F^+} v\, df = \int_F v\, df$, mert a henger alap- és fedőlapján a felület normálisa ($-\mathbf{k}$ ill. $\mathbf{k}$) persze merőleges az integrandusra ($\mathbf{k} \times r$). De $\int_{F^+} v\, df = \int_H \operatorname{div} v\, dV = 0$, mert $v(r) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-y, x, 0)$ miatt $\operatorname{div} v(r) = 0$.

VAGY a definícióból: a palást egyenlete: $r(u, v) = (R\cos u, R\sin u, v)$, $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, m]$; $r_u \times r_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -R\sin u & R\cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (R\cos u, R\sin u, 0)$. Az integrandus $v(r) = (-y, x, 0)$ (ld. fent), így

$$\begin{aligned}\int_F v\, df &= \int_0^{2\pi}\int_0^m v(r(u,v))(r_u(u,v) \times r_v(u,v))\, dv du \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^m (-R\sin u, R\cos u, 0)(R\cos u, R\sin u, 0)\, dv du = \int_0^{2\pi}\int_0^m 0\, dv du = 0.\end{aligned}$$

2. Legyen F a $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,1)$ csúcsokkal adott háromszöglap úgy irányítva, hogy a $(0,-1,1)$ vektor egy felületi normálisa, és legyen $v(x,y,z) = (xy, xz, xyz)$! $\int_F \operatorname{rot} v\, df = ?$

Megoldás. A Stokes-tétel miatt $\int_F \operatorname{rot} v\, df = \int_L v\, dr$, ahol L a $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,1)$, $(0,0,0)$ háromszögvonal. De v a befogókon 0, ezért $\int_L v\, dr = \int_{L'} v\, dr$, ahol L' az átfogó. Ennek egyenlete $r(t) = (1-t, t, t)$, $t \in [0,1]$, így

$$\begin{aligned}\int_{L'} v\, dr &= \int_0^1 v(r(t))\dot r(t)\, dt = \int_0^1 ((1-t)t, (1-t)t, (1-t)t^2)(-1, 1, 1)\, dt \\ &= \int_0^1 t^2 - t^3\, dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}\end{aligned}$$

VAGY a definícióból. F egyenlete: $r(u,v) = (u, v, v)$, $u \in [0,1]$, $v \in [0, 1-u]$; $r_u \times r_v = (0, -1, 1)$. $\operatorname{rot} v = (xz - x, -yz, z - x)$. Tehát

$$\begin{aligned}\int_F \operatorname{rot} v\, df &= \int_0^1\int_0^{1-u} (uv - u, -v^2, v - u)(0, -1, 1)\, dv du = \int_0^1\int_0^{1-u} v^2 + v - u\, dv du \\ &= \int_0^1 \frac{(1-u)^3}{3} + \frac{(1-u)^2}{2} - u(1-u)\, du = -\frac{(1-u)^4}{12} - \frac{(1-u)^3}{6} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

3. Legyen K az origó, L a 2 középpontú 1 sugarú, pozitívan irányított körvonal és $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$! (a) $\int_K f(z)\, dz = ?$ (b) $\int_L f(z)\, dz = ?$

Megoldás. (a) f reguláris egy a K-t a 0 kivételével a belsejével együtt tartalmazó egyszeresen összefüggő nyílt halmazon (pl. az origó középpontú, 3/2 sugarú nyílt körlapon), de 0-ban megszüntethető szingularitása van mert $\lim_0 \frac{z}{e^z - 1} = \lim_0 \frac{1}{e^z} = 1$ véges; ezért $\operatorname{Res}_0 f = 0$ és azaz $u = e^x \sin y - xyz + \frac{1}{2}z^2 + c$.

4. $\int_K \frac{e^{z^6}-1}{z^6(z-1)}\, dz = ?$ ha K az origó középpontú, 2 sugarú pozitívan irányított kör-vonal.

$\int_K f(z)\, dz = \int_{K_0} f(z)\, dz + \int_{K_1} f(z)\, dz$, ahol K_0 és K_1 ... körvonal.

így a reziduum-tétel miatt $\int_K f(z)\ dz = 0$. (Vagy: mivel ez a határérték véges, van 0-nak olyan környezete, ahol f korlátos, és ebből is következik, hogy $\int_K f(z)\ dz = 0$.)
(b) 0 a Cauchy integráltétel miatt, mert f reguláris egy, az L-et a belsejével együtt tartalmazó nyílt egyszeresen összefüggő halmazon (pl. a 2 középpontú, 3/2 sugarú nyílt körlapon).

4. Oldja meg az $y' = x - y + 1$ differenciálegyenletet!

Megoldás. Lineáris differenciálegyenlet. y_{ha} ($y' = -y$ megoldása): Szinguláris megoldás: $y \equiv 0$. $\frac{dy}{dx} = -y \rightsquigarrow \int \frac{1}{y}\ dy \int -1\ dx \rightsquigarrow \ln|y| = -x + c_1 \rightsquigarrow |y| = c_2 e^{-x} (c_2 > 0)$, amiből a Bolzano-tétel miatt $y_{ha} = ce^{-x}$.

Az inhomogén egy partikuláris megoldása: $y = c(x)e^{-x} \rightsquigarrow y' = c'(x)e^{-x} - c(x)e^{-x}$; visszahelyettesítve $c'(x)e^{-x} - c(x)e^{-x} = x + 1 - c(x)e^{-x} \rightsquigarrow c'(x) = (x+1)e^x \rightsquigarrow c(x) = xe^x \rightsquigarrow$ $y_{ip} = x$, amiből az inhomogén általános megoldása $y_{ia} = y_{ha} + y_{ip} = ce^{-x} + x$.

5. (a) Mit nevezünk egy $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vektorfüggvény potenciálfüggvényének?
Igazak-e a következő állítások?
(b1) Ha $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ folytonos, akkor van potenciálfüggvénye.
(b2) Ha $v : G \to \mathbb{R}^2$ folytonosan deriválható a $G \subseteq \mathbb{R}^2$ egyszeresen összefüggő nyílt halmazon és itt $\operatorname{rot} v = 0$, akkor v-nek van potenciálfüggvénye G-n.
(c) Mit nevezünk egy komplex függvény izolált szingularitási helyének?

Megoldás. (a) $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a v egy potenciálfüggvénye, ha deriválható és $v = \operatorname{grad} u$.
(b1) Nem, pl. $v(r) = \mathrm{CROSS}(r) = (-y, x)$ folytonos, de nincs potenciálja, mert $\operatorname{rot} \mathrm{CROSS}(r) = 2 \neq 0$.
(b2) Igen, tétel volt.
(c) $z_0 \in \mathbb{C}$ az f izolált szingularitási helye, ha f z_0-ban nem, de z_0 egy lukas környezetében deriválható.