A 3. vizsga megoldásai (2014. június 12.)

(1)

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/3} \underset{\uparrow}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/3}{n} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/3}{n} x^{2n}$$

binomiális sorfejtés, ha

$|-x^2| < 1$ azaz $|x| < 1$

3 pont

$$I = \int_0^{1/3} \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx = \int_0^{1/3} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/3}{n} x^{2n} \right) dx \underset{\uparrow}{=}$$

egy. konv $(0, 1/3)$-n

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/3}{n} \underbrace{\int_0^{1/3} x^{2n}\,dx}_{\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^{1/3}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/3}{n} \frac{1}{3^{2n+1}} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

3 pont

$$\binom{-1/3}{n} = \frac{(-1/3)(-1/3-1)(-1/3-2)\dots(-1/3-n+1)}{n!}$$

n db negatív szám szorzata

> 0, ha n páros

< 0, ha n páratlan

$\Rightarrow$ nem alternáló sort kaptunk!

$$S_N = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \binom{-1/3}{n} \frac{1}{3^{2n+1}} \cdot \frac{1}{2n+1}$$ -gyel való becslés esetén

$$H = |I - S_N| = \sum_{n=N}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/3}{n} \frac{1}{3^{2n+1}} \cdot \frac{1}{2n+1} \le$$

4 pont

mivel $\binom{-1/3}{n} = \frac{(-1/3)(-4/3)\cdot(-7/3)\dots\left(-\frac{3n-2}{3}\right)}{n!} = (-1)^n \frac{1\cdot 4\cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{3^n n!} =$

$$= (-1)^n \underbrace{\frac{1}{(3\cdot 1)}}_{\le 1} \cdot \underbrace{\frac{4}{(3\cdot 2)}}_{\le 1} \cdot \underbrace{\frac{7}{(3\cdot 3)}}_{\le 1} \cdots \underbrace{\frac{3n-2}{(3\cdot n)}}_{\le 1}$$ miatt $(-1)^n \binom{-1/3}{n} < 1$

$\frac{1}{9^N} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{9}{8} \cdot \frac{1}{9^N}$

$$\le \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{3^{2n+1}} \cdot \frac{1}{2n+1} \le \frac{1}{3\cdot(2N+1)} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{9^n} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2N+1} \cdot \frac{1}{9^N}$$

$$\frac{3}{8}\,\frac{1}{3N+1}\,\frac{1}{5^N} < 10^{-2} \quad \text{ha} \quad N \geq 2$$

$\rightsquigarrow$ $N = 2$ elég

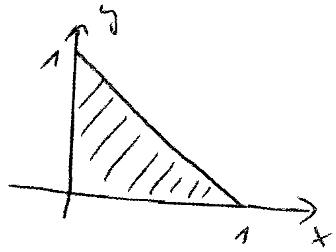
$$S_2 = \sum_{n=0}^{1} (-1)^n \binom{-1/3}{n} \frac{1}{3^{2n+1}} \cdot \frac{1}{2n+1} =$$

$$= \underbrace{\binom{-1/3}{0}}_{1} \frac{1}{3} - \underbrace{\binom{-1/3}{1}}_{-1/3} \frac{1}{3^3} \cdot \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3} + \frac{1}{3^5}}}$$

(2)

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - x - y$$

T:



lokális szélsőértékhelyek: $\boxed{3 \text{ pont}}$

$f'_x(x,y) = 3x^2 - 1 = 0 \rightsquigarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

$f'_y(x,y) = 3y^2 - 1 = 0 \rightsquigarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

lehetséges szélsőértékhely

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

ezek közül egyik sincs a T tartományban

$\Downarrow$

Mivel $f(x,y)$ folytonos, ezért a határokon veheti fel a szélsőértékeit!

- $x = 0, \ 0 \le y \le 1$

$g(y) := f(0,y) = y^3 - y \rightsquigarrow g'(y) = 3y^2 - 1 = 0 \iff y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$f\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3} - 1\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$f(0,0) = 0$

$f(0,1) = 0$ $\boxed{2 \text{ pont}}$

- $y = 0, \ 0 \le x \le 1$ -n a szimmetria miatt hasonlóan:

$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$

$f(1,0) = 0$ $\boxed{1 \text{ pont}}$

- $y = 1 - x, \ 0 \le x \le 1$

$g(x) := f(x, 1-x) = x^3 + (1-x)^3 - x - (1-x) = x^3 + (1-x)^3 - 1$

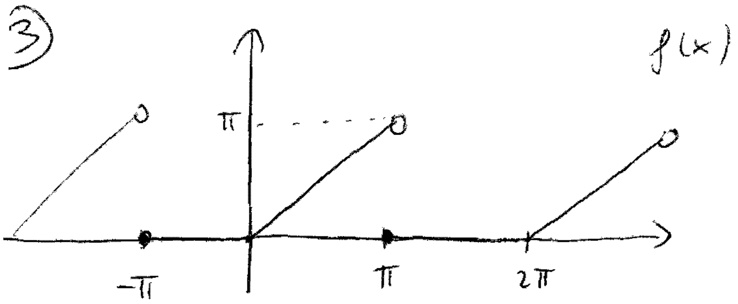
$g'(x) = 3x^2 - 3(1-x)^2 = 6x - 3 = 0 \rightsquigarrow x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} < -\frac{2}{3\sqrt{3}}$$ $\boxed{3 \text{ pont}}$

$\Rightarrow$ abszolút maximum $= 0$ $\quad (0,0), (0,1), (1,0)$ -ban

abszolút minimum $= -\frac{3}{4}$ $\quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$-ben $\boxed{1 \text{ pont}}$

3)



$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{4}$$ $\boxed{1\text{ pont}}$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left\{\underbrace{\left[x\frac{\sin kx}{k}\right]_0^{\pi}}_{=0} - \underbrace{\int_0^{\pi}\frac{\sin kx}{k}\,dx}_{\left[-\frac{\cos kx}{k^2}\right]_0^{\pi}}\right\} =$$

$u = x \rightsquigarrow u' = 1$

$v' = \cos kx \quad v = \frac{\sin kx}{k}$

$$= \frac{1}{\pi k^2}\left[\cos k\pi - 1\right] = \frac{1}{\pi k^2}\left[(-1)^k - 1\right] = \begin{cases} 0 & \text{, ha } k \text{ páros} \\ -\frac{2}{\pi k^2} & \text{, ha } k \text{ páratlan} \end{cases}$$

$\boxed{3\text{ pont}}$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left\{\left[-\frac{x\cos kx}{k}\right]_0^{\pi} + \underbrace{\int_0^{\pi}\frac{\cos kx}{k}\,dx}_{\left[\frac{\sin kx}{k^2}\right]_0^{\pi} = 0}\right\} =$$

$u = x \quad v' = \sin kx$

$u' = 1 \quad v = -\frac{\cos kx}{k}$

$$= -\frac{\pi\cos k\pi}{\pi k} = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$ $\boxed{3\text{ pont}}$

A Fourier-sor:

$$\Phi(x) = \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k+1)^2}\cos(2k+1)x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx$$ $\boxed{1\text{ pont}}$

A Dirichlet-tétel értelmében a Fourier-sor a szakadási pontok, azaz a $(2k+1)\cdot\pi$ pontok kivételével előállítja a függvényt.

$\boxed{2\text{ pont}}$

1)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\[2mm] 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \underset{\substack{x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi}}{=} \lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos\varphi\sin\varphi}{r}=\lim_{r\to 0} r\underbrace{\cos\varphi\sin\varphi}_{\text{korlátos}}=0$$

$$0 = f(0,0)$$

$\boxed{2\text{ pont}}$

vagyis f folytonos az origóban

b) ha $(x,y)\neq(0,0)$

$$f'_x(x,y)=\frac{y\sqrt{x^2+y^2}-xy\cdot\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

$$f'_y(x,y)=\frac{y\sqrt{x^2+y^2}-xy\cdot\frac{1}{2}\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

$\boxed{4\text{ pont}}$

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

hasonlóan $f'_y(0,0)=0$

c) Ha f deriválható $(0,0)$-ban, akkor a deriváltja $(0,0)$ lehet csak, vagyis

$$f(x,y)=f(0,0)+f'_x(0,0)\cdot x+f'_y(0,0)y+\varepsilon(x,y)$$ -ból

$$\varepsilon(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$, melyre

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\cdot y}{x^2+y^2}\underset{\substack{x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi}}{=}\lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}=\cos\varphi\sin\varphi$$

$$\not\exists$$

(függ φ-től)

vagyis f nem deriválható $(0,0)$-ban $\boxed{4\text{ pont}}$

(5) ha $\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A v = \underline{a} \times \underline{v} = \det \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} = -y\,\underline{i} + (x-z)\,\underline{j} + y\,\underline{k} = \begin{pmatrix} -y \\ x-z \\ +y \end{pmatrix}$$

ebből, vagy az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ bázisvektorok képéből leolvasható, hogy A mátrixa a standard bázisban:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

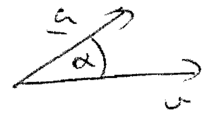
|| 4 pont

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda^2+1) - \lambda = -\lambda(\lambda^2+2) = 0$$

$\hookrightarrow$ $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \sqrt{2}\,i$, $\lambda_3 = -\sqrt{2}\,i$

|| 3 pont

(Megj.: mivel $|\underline{a} \times \underline{v}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{v}| \cdot \sin\alpha$



szerint $\underline{a} \times \underline{a} = 0$ mutatja, hogy 0 sajátérték $\underline{a}$ sajátvektorral, valamint mivel $\underline{\underline{A}}$ antiszimmetrikus ($\underline{\underline{A}}^T = -\underline{\underline{A}}$) $\rightarrow$ 0-n kívül csak tisztán képzetes sé-i lehetnek)

Mivel A $\mathbb{R}$ feletti leképezés így a komplex sajátvektorokat nem kell kiszámolni ($\underline{\underline{A}}$ nem diagonalizálható $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$-ban)

|| 3 pont