ANALÍZIS(2) **I. ZÁRTHELYI** **2005. március 17.**

Műszaki Informatika szak β változat Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (20 pont)

Vezesse be az $u=y^3$ új változót az alábbi differenciálegyenletbe, majd határozza meg az $y(0)=1$ kezdeti értékhez tartozó megoldását:

$$3y^2y' - 3y^3 = e^{3x} + x$$

1.mo.: $u=y^3 \Rightarrow u'=3y^2y'$

Behelyettesítve: $u'-3u=e^{3x}+x$ 3

(H): $u'-3u=0 \Rightarrow u'=3u \Rightarrow \frac{du}{dx}=3u \Rightarrow \int\frac{du}{u}=\int 3dx$

$\Rightarrow \ln u = 3x \Rightarrow u=e^{3x}$ egy $\neq 0$ megoldás.

Ezért $u_H = Ce^{3x}$ 4, $C\in\mathbb{R}$

(I): $u_{ip}=c(x)e^{3x}$ 1 $\Rightarrow u_{ip}'=c'e^{3x}+c\cdot 3e^{3x}$ 1

Behelyettesítve (I)-be:

$c'e^{3x}+\cancel{c3e^{3x}}-\cancel{3ce^{3x}}=e^{3x}+x$ 1

$c'=1+xe^{-3x} \Rightarrow c=x+\int xe^{-3x}\,dx$ 3

$f=x$, $g'=e^{-3x}$; $f'=1$, $g=-\frac{1}{3}e^{-3x}$ (parciálisan int.)

$c=x-\frac{x}{3}e^{-3x}+\frac{1}{3}\int e^{-3x}dx = x-\frac{x}{3}e^{-3x}-\frac{1}{9}e^{-3x}$ 1

$u_{ip}=xe^{3x}-\frac{x}{3}-\frac{1}{9}$ és $u_{iá}=u_H+u_{ip}$ 1

$\Rightarrow u_{iá}=Ce^{3x}+xe^{3x}-\frac{x}{3}-\frac{1}{9}$ 1

Visszatérve az eredeti változóra:

$y^3=Ce^{3x}+xe^{3x}-\frac{x}{3}-\frac{1}{9}$ 1 $C\in\mathbb{R}$

$y(0)=1$: $1=C-\frac{1}{9} \Rightarrow C=\frac{10}{9}$ 2 : $y^3=\frac{10}{9}e^{3x}+xe^{3x}-\frac{x}{3}-\frac{1}{9}$ 1

$(y=\sqrt[3]{\ldots\ldots})$

2. megoldás: Mivel állandó együtthatójú, érvényes rá az n-edrendűnél tanult módszer.

H: $u'-3u=0$, $u=e^{\lambda x}$: $\lambda-3=0 \Rightarrow \lambda=3$

$u_H=Ce^{3x}$ 4

$u_{ip}=Ae^{3x}x+Bx+C$ 3 . . . 6 kezdeti felt. 3

külső rez.

2. feladat (25 pont)

a) Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y''+6y'+10y=\cos x$$

b) Írjon fel egy olyan homogén lineáris, konstans együtthatós differenciálegyenletet, melynek megoldásai között szerepel az

$$y=5e^{-x}+\sin 3x$$

$\boxed{17}$

a) (H): $\lambda^2+6\lambda+10=0$ 1 $\Rightarrow \lambda_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{36-40}}{2}=\frac{-6\pm j2}{2}=-3\pm j$ 1

$y_H=C_1e^{-3x}\cos x+C_2e^{-3x}\sin x$ 4

(I): 10 | $y_{ip}=A\cos x+B\sin x$ 2

6 | $y_{ip}'=-A\sin x+B\cos x$

1 | $y_{ip}''=-A\cos x-B\sin x$

$\cos x\cdot(10A+6B-A)+\sin x\cdot(10B-6A-B)=\cos x$ 3

$\Rightarrow$ 1 $9A+6B=1$, 1 $9B-6A=0$ $\Rightarrow A=\frac{1}{13}$ 1 és $B=\frac{2}{39}$ 1

$y_{iá}=y_H+y_{ip}$ 1 $=C_1e^{-3x}\cos x+C_2e^{-3x}\sin x+\frac{1}{13}\cos x+\frac{2}{39}\sin x$ 1

b) $\boxed{8}$

$y=\underbrace{5\cdot e^{-x}}+\underbrace{\sin 3x}$

$\Downarrow$ $\lambda_1=-1$ 1, $\Downarrow$ $\lambda_{2,3}=\pm j3$ 2 gyökei a karakterisztikus egyenletnek 2

$\Rightarrow (\lambda-(-1))\underbrace{(\lambda-j3)(\lambda+j3)}_{\lambda^2+9}=0$ 1

$\lambda^3+\lambda^2+9\lambda+9=0$ 1 a karakterisztikus egyenlet

$\Rightarrow y'''+y''+9y'+9y=0$ 1

3. feladat (12 pont)

$$y' = x - e^{3y}$$

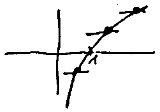
a) Mely pontokban van lokális minimuma a differenciálegyenlet megoldásainak, feltéve, hogy minden ponton halad át megoldás?
(Ne próbálja megoldani a differenciálegyenletet!)

b) Rajzolja le ennek a differenciálegyenletnek két izoklináját és jelölje be rajta az iránymezőt!

a.) Szükséges feltétel differenciálható függvénynél a lokális szélsőérték létezésére: 1

$y' = x - e^{3y} = 0$ 1 $\Rightarrow x = e^{3y} \Rightarrow y = \frac{1}{3}\ln x$ 1

Tehát



$y = \frac{1}{3}\ln x$ pontjaiban lehet lok. sz.é.

$y'' = 1 - e^{3y}\cdot 3y'$ 2

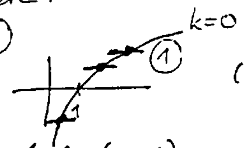
Az előző görbe pontjaiban ($y'=0$ miatt): $y'' = 1$ 1

Tehát a görbe pontjaiban $y' = 0$ és $y'' > 0 \Rightarrow$ lok. min. van 2

b.) Az izoklinák egyenlete:

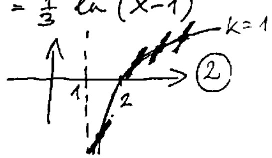
$x - e^{3y} = K$ 1

$K := 0$: $y = \frac{1}{3}\ln x$



1 (Ez a fenti)

$K := 1$ $x - e^{3y} = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{3}\ln(x-1)$



2

4. feladat (10 pont)

Írja fel az

$$\frac{dx}{dt} = 4x + 25y \qquad \frac{dy}{dt} = x + 4y$$

differenciálegyenlet-rendszer együttható mátrixának sajátértékeit, sajátvektorait valamint a differenciálegyenlet-rendszer összes megoldását!

$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 4 & 25 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ Ennek a sajátértékeit és sajátvektorait kell meghatároznunk.

$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 25 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2 - 25 = 0 \Rightarrow 4 - \lambda = \pm 5$ 2

$\Rightarrow \lambda_1 = 9, \ \lambda_2 = -1$ 1

$(\underline{\underline{A}} - \lambda_1 \underline{\underline{E}})\underline{s}_1 = \underline{0}$: $(\underline{\underline{A}} - 9\underline{\underline{E}})\underline{s}_1 = \underline{0}$ 2 $\left.\begin{array}{cc} \cancel{-5} & \cancel{25} \\ 1 & -5 \end{array}\right| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}$

Tehát $s_{11} - 5s_{12} = 0$, $s_{12} := 1$, $s_{11} = 5$: $\underline{s}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ 1

$(\underline{\underline{A}} - \lambda_2 \underline{\underline{E}})\underline{s}_2 = \underline{0}$: $(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{E}})\underline{s}_2 = \underline{0}$ $\left.\begin{array}{cc} \cancel{5} & \cancel{25} \\ 1 & 5 \end{array}\right| \begin{array}{c} \cancel{0} \\ 0 \end{array}$

Tehát $s_{21} + 5s_{22} = 0$, $s_{22} := 1$, $s_{21} = -5$: $\underline{s}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ 1

$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{9t}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ 3 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

5. feladat (18 pont)

a) Definiálja a függvénysorozat egyenletes konvergenciájának, illetve normában való konvergenciájának fogalmát!

b) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = ?$, ha $f_n(x) = e^{-3nx} + x^2$.

c) Egyenletesen konvergál-e a fenti f_n függvénysorozat a $[0,2]$ intervallumon?

d) $\|f_n - f\| = ?$, ha $x \in [2,4]$

(uniform norma.) Egyenletesen konvergál-e az f_n az $[2,4]$ intervallumon?

a.) Egyenletes konvergencia ($f_n \rightrightarrows f$)

D 1

$f_n \rightrightarrows f$ $H_1 \subset H$-n (H_1 általában intervallum), ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists N(\varepsilon)$ (független x-től): $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$, $x \in H_1$

2

D (f_n) *normában konvergál* f-hez, ha $\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \| = 0$. 2

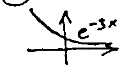
Vagy a következő is jó D_2-ként:

(D) (f_n) a H halmazra vonatkozó uniform normában konvergál f-hez, ha
$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\| = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in H}|f_n(x)-f(x)|\right)=0.$$

b.) $f(x)=\lim_{n\to\infty}\left((e^{-3x})^n+\underset{\downarrow\ x^2}{x^2}\right) = \begin{cases}1, & \text{ha } x=0 \quad (1)\\ x^2, & \text{ha } x>0 \quad (2)\end{cases}$

c.) $[0,2]$-ön nem egyenletes a konvergencia, mert bár f_n-ek folytonosak itt, de az f határfüggvény nem folytonos. (4)

d.) $\|f_n-f\|_{[2,4]} = \sup_{x\in[2,4]}|f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in[2,4]}(e^{-3x})^n = (e^{-6})^n$ (2) (1) (1)



$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{[2,4]} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{e^6}\right)^n = 0$ (1) $\Rightarrow f_n \xrightarrow{u} f$ $[2,4]$-en (1)

$\Rightarrow f_n \rightrightarrows f$ $[2,4]$-en (1)

6. feladat (15 pont)

a) Írja le a $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ függvénysor egyenletes konvergenciájának eldöntésére használható, valamint a függvénysor összegfüggvényének folytonosságára vonatkozó tételeket!

b)
$$\lim_{x\to0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(n^2x+1)}{3x^2+4^n}$$

a.) ... **Weierstrass kritérium**
(Egy elégséges tétel függvénysor egyenletes konvergenciájára.)

(T) Ha $\exists(b_k)$, hogy $|f_k(x)|\le b_k$; $x\in H$; $k=0,1,\dots$ és $\sum_{k=0}^{\infty}b_k$ konvergens numerikus sor, akkor $\sum_{k=0}^{\infty}f_k(x)$ egyenletesen és abszolút konvergens H-n. (2)

(T_1) Ha $f_k\in C^0_{[a,b]}$ és $[a,b]$-n $\sum_{k=0}^{\infty}f_k(x)$ egyenletesen konvergens ($s_n\rightrightarrows s$ $[a,b]$-n). akkor az $s(x)=\sum_{k=0}^{\infty}f_k(x)$ összegfüggvény folytonos az $[a,b]$ intervallumon. (2)

b.) Ez a folytonosságra vonatkozó tétel alkalmazását igényli

$f_n(x)=\frac{(-1)^n\cos(n^2x+1)}{3x^2+4^n}\in C^0_R$ (1)

$|f_n(x)| = \frac{|\cos\dots|}{3x^2+4^n}\le\frac{1}{4^n}$ (1) (1); $\sum\left(\frac14\right)^n$ konv. geom. sor $\left(0<q=\frac14<1\right)$ (2)

W.krit (1) $\Rightarrow \sum_{1}^{\infty}f_n(x)$ egyenletesen konvergens R-en.

Tehát T_1^* alkalmazható: (1)

$\lim_{x\to0}\sum_{n=1}^{\infty}\dots = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to0}\frac{(-1)^n\cos(n^2x+1)}{3x^2+4^n}$ (1) $=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos1}{4^n}$ (1) $=\cos1\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{4}\right)^n=$

$=\cos1\,\frac{-\frac14}{1-\left(-\frac14\right)}$ (2)

Pótfeladat (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):

7. feladat (10 pont)

Adja meg az
$$y'=\frac{(y^2+3y)\ (2x+6)}{x^2+4x+13}$$
differenciálegyenlet összes megoldását!

$y\equiv0$ ill. $y\equiv-3$ megoldás (1)

$\int\frac{1}{y(y+3)}\,dy = \int\frac{2x+6}{x^2+4x+13}\,dx$ (2)

$\frac{1}{y(y+3)}=\frac{A}{y}+\frac{B}{y+3}$ $\quad 1=A(y+3)+By$ $\quad y=-3:\ B=-\frac13$; $\ y=0:\ A=\frac13$ (2)

$\frac{2x+6}{x^2+4x+13}=\frac{2x+4}{x^2+4x+13}+2\,\frac{1}{(x+2)^2+9}=\underset{\frac{f'}{f}}{\frac{2x+4}{x^2+4x+13}}+\frac29\,\frac{1}{1+\left(\frac{x+2}{3}\right)^2}$ (2)

$\underbrace{\frac13\left(\ln|y|-\ln|y+3|\right)}_{(1)}=\underbrace{\ln(x^2+4x+13)+\frac29\,\frac{\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3}}{\frac13}+C}_{(2)}$,

ill. $y\equiv0$, ill. $y\equiv-3$