Valószínűségszámítás 1. pótzárthelyi megoldások
2016. április 15.

1. Mennyi $\mathbf{P}(A \mid \bar{B})$ ha $\mathbf{P}(A) = 0,4$, $\mathbf{P}(B) = 0,3$ és $\mathbf{P}(A+B) = 0,7$?
Megoldás: $\mathbf{P}(A \mid \bar{B}) = \frac{\mathbf{P}(A\bar{B})}{\mathbf{P}(\bar{B})} = \frac{\mathbf{P}(A)-\mathbf{P}(AB)}{1-\mathbf{P}(B)} = \frac{0,4}{0,7} = \frac{4}{7} = 0.57143$
$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A+B) - \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(B) = 0$

2. Milyen c értékre lesz a következő függvény sűrűségfüggvény? Mi ekkor az eloszlásfüggvény? Adja meg! Határozza meg azon változó várható értékét, amelynek a sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} c\,\mathrm{e}^{|x|} & x \in [-2,2] \\ 0 & \text{különben} \end{cases}.$$

Megoldás: $1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = c\int\limits_{-2}^{0} e^{-x}dx + c\int\limits_{0}^{2} e^{x}dx =$

$c \cdot \left(\int\limits_{-2}^{0} e^{-x}dx + \int\limits_{0}^{2} e^{x}dx \right) = c \cdot (2e^2 - 2) \Rightarrow c = \frac{1}{(2e^2-2)} = 0,078259$
$F_X(t) = c \cdot (e^2 - e^{-t})$, ha $-2 < t < 0$
és $F_X(t) = c \cdot (e^2 - 1 + e^t - 1)$, ha $0 < t < 2$
és $F_X(t) = 1$, ha $t > 2$, $F_X(t) = 0$, ha $t < -2$.
$\mathbf{E}X = c\left(\int\limits_{-2}^{0} x \cdot e^{-x}dx + \int\limits_{0}^{2} x \cdot e^{x}dx \right) = 0$

3. Egy számítógépes szervízben egy hónap húsz munkanapjából átlagosan hárman nincsen reklamáció. Poisson eloszlást feltételezve, mennyi annak a valószínűsége, hogy egy adott napon legalább öt reklamáció érkezik?
Megoldás: Ha X jelöli a reklamációk számát, akkor
$\mathbf{P}(X = 0) = e^{-\lambda} = \frac{3}{20} \Rightarrow \lambda = \ln\frac{20}{3}$. Így $\mathbf{P}(X \geq 5) = 1 - \sum\limits_{i=0}^{4} \mathbf{P}(X = i) = 1 - e^{-\lambda}\left[1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{6} + \frac{\lambda^4}{24}\right] =$
$1 - \frac{3}{20} \cdot \left[1 + \ln\frac{20}{3} + \frac{\left(\ln\frac{20}{3}\right)^2}{2} + \frac{\left(\ln\frac{20}{3}\right)^3}{6} + \frac{\left(\ln\frac{20}{3}\right)^4}{24} \right] \approx 1 - \frac{3}{20} \cdot 6,3743 = 0,043855$

4. Ha az X standard normális eloszlású valószínűségi változó, mi a sűrűségfüggvénye az $Y = X^2$ valószínűségi változónak? Mennyi Y várható értéke?
Megoldás: Ha $x > 0$:
$\mathbf{P}(Y < x) = \mathbf{P}(X^2 < x) = \mathbf{P}(|X| < \sqrt{x}) = \mathbf{P}(-\sqrt{x} < X < \sqrt{x}) =$
$= \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1$
A deriválás után kapjuk a sűrűségfüggvényt:

$$f_Y(x) = 2\varphi(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-\frac{x}{2}}, \text{ha } x > 0.$$

$\mathbf{E}Y = \mathbf{E}X^2 = \sigma^2 X = 1.$

5. Egy rekeszben 10 teniszlabda van, melyek közül 9 még használatlan. Három játékhoz kiveszünk találomra három labdát, majd a játék után visszarakjuk azokat a rekeszbe. (Nyilván, ha volt közöttük hasz nálatlan, az a játék során elveszti ezt a tulajdonságát.) Mennyi a valószínűsége annak, mindhárom kivételhez 2 új és 1 használt labda kerül a kezünkbe?
Megoldás: A szorzási szabállyal számolva: $\frac{\binom{9}{2}}{\binom{10}{3}} \cdot \frac{\binom{7}{2}\binom{3}{1}}{\binom{10}{3}} \cdot \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{21}{320} = 0,066$