Mészáros Tamás
slovi@math.bme.hu
math.bme.hu/~slovi

1)

a, Hány megoldás a fv.-ben?

$$a x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 + a x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 + x_2 + a x_3 = 1$$

kibővített együttható mátrix

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right] \xleftrightarrow{s_1 \leftrightarrow s_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[s_3 - s_1]{s_2 - a s_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 1-a \end{array}\right] \xrightarrow{s_3 - (1+a) s_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & \underbrace{(1-a)-(a-1)(1+a)}_{2-a-a^2} & 1-a \end{array}\right]$$

lépcsős alak:

Nincs megoldás, ha $\exists$ ilyen sor: $\emptyset \dots \emptyset \mid * \neq \emptyset$

Ha ilyen nincs, van megoldás

Vezérelemek/lépcsők száma = változók száma $\Rightarrow$ 1 mo.

— 〃 — $<$ — 〃 — $\Rightarrow \infty$ mo.

$$2 - a - a^2 = 0$$

$(2+a)(1-a) = 0 \Rightarrow a = 1 \to$ 1 db nemnulla sor $\Rightarrow \infty$ mo.

$a = -2 \to$ nincs mo. utolsó sor miatt

$a \neq 1, -2 \to$ 1 mo.

Vektortér milyen test felett

$(a_1, a_2, \dots, a_n)$ $a_i \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$

Véges testek p prím szám $\Rightarrow \mathbb{F}_p \to$ p-vel vett osztási maradékok

$\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

+	0	1
0	0	1
1	1	0

$\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\} = \{-1, 0, 1\}$

2) $\mathbb{F}_3$

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1$$
$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$
$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1$$
$$x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

1 ($\mathbb{F}_3$ felett $-1 = 1$ lenne itt)

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{s_1 - s_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & +1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 - x_4 = -1 \\ x_2 - x_4 = 1 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = x_4 - 1 \\ x_2 = x_4 + 1 \\ x_3 = x_4 \end{array}$$

mivel $\mathbb{F}_3$-ban vagyunk, 3 mo. van!
(x_4 3 féle érték lehet)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t-1 \\ t+1 \\ t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ Affin altér

3.)

$\underset{m\times n}{A}\overset{n\times 1}{x} = \underset{m\times 1}{b}$ lin. egyenletrendszer

Homogén rész: $Ax = \emptyset \rightarrow$ Megoldása altér $= V$

$Ax = b$ általános megoldása:

$x_{ált} = x_{part} + V$ (affin alteret képez)

$\underset{m\times n}{A} \in \mathbb{R}^{m\times n} \rightarrow$ nevezetes alterek:
- sortér: $S(A) \subseteq \mathbb{R}^n$
- oszloptér: $O(A) \subseteq \mathbb{R}^m$
- nulltér: $N(A) \subseteq \mathbb{R}^n = \{x \mid Ax = \emptyset\}$

$v_1, v_2, \dots, v_k$

$\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k\}$

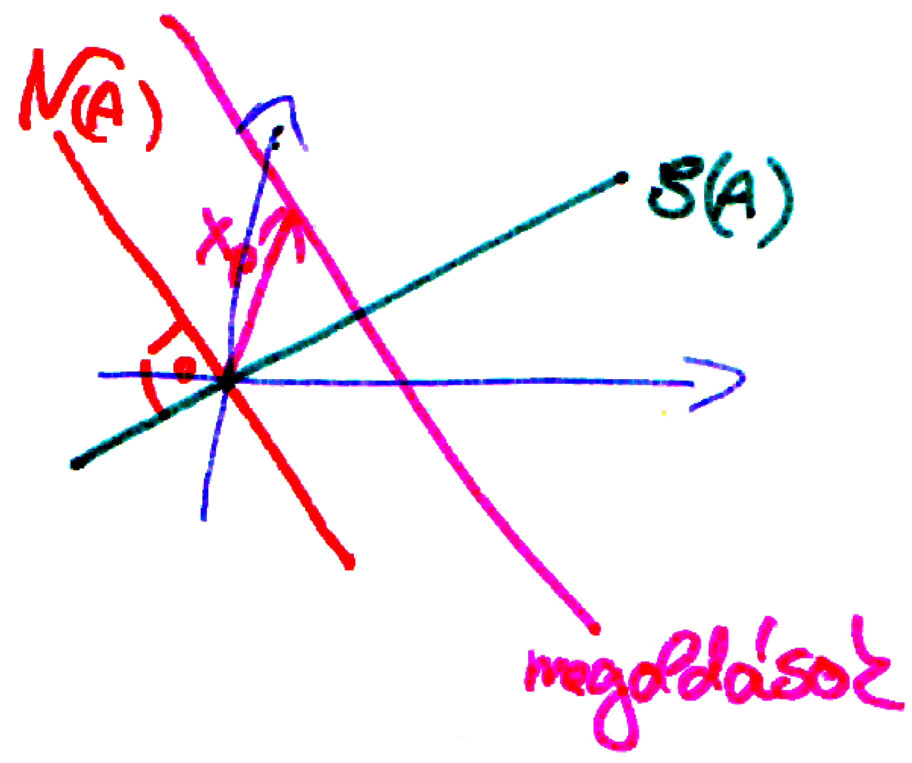
$\dim \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k) = \mathrm{rang}[v_1 | v_2 | \dots | v_k]$ (rang = mennyi független, gauss eliminációval számolható)

Dimenziótétel

1: $S(A)$, $N(A)$ egymás merőleges kiegészítő alterei

Vagyis: $S(A) \perp N(A)$

$\dim S(A) + \dim N(A) = n$



(legkisebb abszolútértékű mo.) egyetlen legrövidebb dolog az sortérbe esik. 😊

4.)

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$

$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

2 szabad paraméter: $x_2 = t$, $x_4 = s$ $\Rightarrow$ $x_1 = 2 - t$, $x_3 = 1 - s$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-t \\ t \\ 1-s \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{N(A)}$$

sortérbe essen

egyértelmű ~~sortér~~ sortérbe eső mo.

min. absz. értékű mo.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0{,}5 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0{,}5 \end{array}\right]$$

Zh: ápr. 2. 18-20
ápr. 23. 18-20 - pót
30%-ban számít a vizsgajegybe
lesz elővizsga

gyak Felsőbb matek - Lin. algebra 02. 18.

5.)
$\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\3\\-2\end{pmatrix}$

1 vektor lin. ftlen $\Leftrightarrow$ nem $\underline{\emptyset}$
2 vektor lin ftlen $\Leftrightarrow$ egyik nem számszorosa a másiknak
Itt a 4 vektor lin. fgtlen, ha a belőlük alkotott $\underline{A}$ mátrix rangja 4.

A rangja: $r(A) \leq 3$, mert 3 sora van.

$\begin{bmatrix}1&2&1&5\\3&-3&0&3\\1&1&1&-2\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&2&1&5\\0&-9&-3&-12\\0&-1&0&-7\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&2&1&5\\0&1&0&7\\0&3&1&4\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&0&1&-9\\0&1&0&7\\0&0&1&-17\end{bmatrix} \to \begin{array}{c}\begin{bmatrix}1&0&0&8\\0&1&0&7\\0&0&1&-17\end{bmatrix}\\ a_1\ a_2\ a_3\ a_4\end{array}$ Látható, hogy $r(A)=3$

Sorműveletek során az oszlopok közti lin. öf. nem változnak. $\Rightarrow a_4 = 8a_1 + 7a_2 + (-17)a_3$

6.) Megoldások alteret alkotnak?
a, $3x_1 - 2x_3 + x_4 = 0$
Homogén egyenletrendszer $\Rightarrow$ mo.-sok alteret alkotnak

b., $x_1 x_3 = x_2 x_4$

$\underline{a}$ (0, 0, 1, 1)
$\underline{b}$ (1, 1, 0, 0)

$\underline{a}$, és $\underline{b}$-re teljesül az összefüggés, de $\underline{a}+\underline{b}$-re nem igaz $\Rightarrow$ nem altér
($\underline{0}$ benne van?, számmal szorzás, összeadás)

c., $x_3 \geq x_4$

2D: $x \geq y$

szorzás sérül: $\underline{a}$ (0, 0, 2, 1)-re igen, de $\lambda=-1$-re $\lambda\underline{a}$-ra nem igaz
$\lambda\underline{a}$ (0, 0, -2, -1)

7.) $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&6\\3&5&9\\0&1&0\end{bmatrix}$ dim $S(A)$, $O(A)$, $N(A)$ = ?

dim $S(A) = r(A)$
dim $O(A) = r(A)$
dim $N(A) = \underset{\text{oszlopok száma}}{n} - \dim S(A) = 3 - r(A)$ (dimenziótétel)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 2 \Rightarrow \cancel{SA} \quad \dim S(A) = 2$$

$$\dim \mathcal{R}(A) = 2$$

$$\dim N(A) = 3 - 2 = 1$$

gyak. Felsőbb matek - Lin. alg. 03.04

①

$\underline{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\underline{c}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ Kérdés: $\underline{d}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\in \mathrm{Span}(\underline{a},\underline{c})$

$\underline{d}\in \mathrm{Span}(\underline{a},\underline{c}) \Leftrightarrow \underline{d}=x\underline{a}+y\cdot\underline{c}$

$x\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \rightarrow$ 2 ismeretlenes 3 egyenletből álló lin. e. rendszer

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&1&2\\1&2&1\\1&4&-1\end{array}\right)\sim\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&-1\\0&3&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

nincs ellentmondásos sor

$\Downarrow$

$\exists$ megoldás

$\Downarrow$

$d\in \mathrm{Span}(\underline{a},\underline{c})$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}x=3\\y=-1\end{matrix}$$

②

$V=\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\4\\7\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\5\\8\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\6\\9\end{bmatrix}\right)\leq \mathbb{R}^3$ itt kell bázis!

$$\underline{\underline{A}}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&-6&-12\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

V-ben bázis: $\begin{bmatrix}1\\4\\7\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\5\\8\end{bmatrix}$

$V=\mathcal{O}(A)$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

az oszlopok közti lin. öf. megmaradtak

$$\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\Rightarrow \underline{o}_3=(-1)\,\underline{o}_1+2\,\underline{o}_2$$

<u>Kiegészítés:</u>

$A\rightarrow \mathcal{S}(A),\ \mathcal{O}(A)$

$\hookrightarrow$ másik bázis: redukált alakban a nem $\emptyset$ sorok

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow$$ $\mathcal{S}(A)$-nak bázisa $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$, de $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ is

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\alpha\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\Rightarrow \alpha=1,\ \beta=2$$

(3) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$

$B^{-1} = ?$

szimmetrikus $B^T = B$

$\underset{n\times n}{B} \cdot \underset{n\times n}{X} = \underset{n\times n}{I_n}$

$X = (x_1|x_2|\dots|x_n)$

$B\cdot X = (Bx_1 | Bx_2 | \dots | Bx_n)$, where $Bx_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $Bx_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, …, $Bx_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\left(B \middle| \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(B \middle| \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(B \middle| \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 9 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 19 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cancel{3}\,-1 & \cancel{-6}\,3 & -3 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & 14 & -11 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -11 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

szimmetrikus

LU felbontás

$\underset{n\times n}{A} = L \cdot U$ — Gauss eliminációt kódolja

U: felső Δ mx

L: egység alsó Δ mx $\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{bmatrix}$

Osztani nem szabad!!

(4.) $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & 8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[s_3 - 2s_1]{s_2 + \frac{3}{2}s_1,\ -\left(-\frac{3}{2}\right)} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{s_3 - (-3)s_2} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = U$

$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

Sorcsere se szabad! Ha mégis kell $\Rightarrow$ PLU felbontás

5. Megoldás LU felbontással!

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+8x_2 &= -2 \\ -x_1-x_2 &= -2 \end{aligned}\right\}$$

$$A=\begin{bmatrix}2 & 8\\ -1 & -1\end{bmatrix} \quad b=\begin{pmatrix}-2\\ -2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{s_2-\left(-\frac{1}{2}\right)s_1} \begin{bmatrix}2 & 8\\ 0 & 3\end{bmatrix}=U$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}=L$$

$$\underline{A}\,\underline{x}=\underline{b}$$

$$\underline{L}\,\underbrace{\underline{U}\,\underline{x}}_{\underline{y}}=\underline{b}$$

$$\underline{L}\,\underline{y}=\underline{b} \Rightarrow y_1=-2$$

$$-\frac{1}{2}y_1+y_2=-2 \rightarrow y_2=-3$$

$$\underline{U}\,\underline{x}=\underline{y} \rightarrow \begin{aligned} 2x_1+8x_2 &= -2 \\ 3x_2 &= -3 \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$x_2=-1$$
$$x_1=3$$

6. Megoldás LU felbontással!

$$\left.\begin{aligned} 2x_1-2x_2-2x_3 &= -4 \\ -2x_2+2x_3 &= -2 \\ -x_1+5x_2+2x_3 &= 6 \end{aligned}\right\}$$

$$A=\begin{pmatrix}2 & -2 & -2\\ 0 & -2 & 2\\ -1 & 5 & 2\end{pmatrix} \underset{s_3-\left(-\frac{1}{2}\right)s_1}{\overset{s_2-0s_1}{\sim}} \begin{pmatrix}2 & -2 & -2\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & 4 & 1\end{pmatrix} \overset{s_3-(-2)s_2}{\sim} \begin{pmatrix}2 & -2 & -2\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}=U \qquad \underline{b}=\begin{pmatrix}-4\\ -2\\ 6\end{pmatrix}$$

$$L=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{2} & -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\underline{A}\,\underline{x}=\underline{b}$$

$$\underline{L}\,\underbrace{\underline{U}\,\underline{x}}_{\underline{y}}=\underline{b}$$

$$\underline{L}\,\underline{y}=\underline{b} \Rightarrow \begin{aligned} y_1 &= -4 \\ y_2 &= -2 \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}y_1-2y_2+y_3=6 \Rightarrow y_3=6-4-2=0$$

$$\underline{U}\,\underline{x}=\underline{y}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1-2x_2-2x_3 &= -4 \\ -2x_2+2x_3 &= -2 \\ 5x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x_3 &= 0 \\ x_2 &= 1 \\ x_1 &= -1 \end{aligned}$$

⑦ Inverz LU felbontással!

A^{-1} : $A x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (1.) $\qquad A x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (2.) $\qquad A x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (3.)

$\| \; [x_1 | x_2 | x_3]$

(1.) $L y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} y_1 = 1 \\ y_2 = 0 \end{array}$

$\cancel{y_3 = 0} \quad -\frac{1}{2} y_1 - 2y_2 + y_3 = 0 \Rightarrow y_3 = +\frac{1}{2}$

$U x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ -2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_3 = 1/2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = 1/10 \\ x_2 = +1/10 \\ x_1 = 3/10 \end{array}$

(2.) $L y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_2 = 1 \end{array}$

$-\frac{1}{2} y_1 - 2y_2 + y_3 = 0 \Rightarrow y_3 = 2$

$U x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 5x_3 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = 2/5 \\ x_2 = -\frac{1}{10} \\ x_1 = 3/10 \end{array}$

(3.) $L y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ -\frac{1}{2} y_1 - 2y_2 + y_3 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow y_3 = 1$

$U x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_3 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = 1/5 \\ x_2 = 1/5 \\ x_1 = 2/5 \end{array}$

Tehát: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{10} & \frac{3}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

8.) PLU-felbontás

$$\tilde{P}A = LU \longrightarrow A = \tilde{P}^{-1}LU = PLU$$

$\tilde{P}$ ↑ permutációs mátrix

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

1. sorba a 2.-at
2. –"– az 1.-t
3. –"– a 3.-t

$$\tilde{P}^{-1} = \tilde{P}^{T} = P$$

9.) PLU felbontás!

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_4-(-2)S_1]{S_2-1S_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_2 \leftrightarrow S_4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

L-t frissíteni kell

$$\xrightarrow{S_4-2S_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = U$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cancel{1}\,-2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cancel{-2}\,1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{frissítés}}$$

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

10. Bázis felbontás

~~(Lehet cserélni, osztani, stb....)~~

$\underset{m \times n}{A}$ $\quad r(A) = r$

$\| $

$\underset{m \times r}{B} \circ \underset{r \times n}{R}$

teljes oszloprangú $\quad$ teljes sorrangú

Redukált lépcsős alakig Gauss-al. (Lehet cserélni, osztani, stb.)

R - redukált lépcsős alak

B - eredeti mx.-nak a vezérelemekhez tartozó oszlopai

11.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \to R$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Determináns

$M_{n\times n} \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$

- 2 sort felcserélünk → (-1)-szeres
- 1 sort λ-val szorzunk → λ-szoros
- 1 sor λ-szorosát a másikhoz adjuk → nem válto.
- $\det(I_n) = 1$

$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & d_3 \end{pmatrix} = d_1 d_2 d_3 \quad , \quad \det\begin{pmatrix} d_1 & & * \\ & d_2 & \\ 0 & & d_3 \end{pmatrix} = d_1 \cdot d_2 \cdot d_3$$

$d_2, d_3 \neq 0$

Megj.:

$\exists\ \emptyset$ sor $\Rightarrow \det = \emptyset$

$\exists$ 2 azonos sor $\Rightarrow \det = \emptyset$

1.)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 9 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} \underset{\substack{S_2 \to 2\cdot t \\ S_4 \to 3\cdot t \\ S_1 \leftrightarrow S_2}}{=} 2\cdot 3\cdot(-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 9 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-6) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{S_2 \leftrightarrow S_3}{=} (-1)(-6) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{S_4 - \frac{1}{3}S_3}{=} 6\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{vmatrix} = 6\cdot 1\cdot 1\cdot 3\cdot \frac{4}{3} = 24$$

Kifejtési tétel

$\underset{n\times n}{A} \rightsquigarrow a_{ij}$ - i. sor j. eleme

$A_{ij} =$ a_{ij}

törlöm $\Rightarrow (n-1)\times(n-1)$ det.

$$A = \begin{pmatrix} + & - & + & \\ -a_{21} & +a_{22} & - \dots & a_{2n} \\ + & - & & \\ - & + & & \end{pmatrix} \text{ 2. sor}$$

$\rightsquigarrow \det A = (-1) a_{21}\cdot A_{21} + 1 a_{22}\cdot A_{22} \dots$

Megj.:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \underset{S_2 - \frac{c}{a}S_1}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{c}{a}b \end{vmatrix} = a\cdot\left(d - \frac{c}{a}b\right) = ad - cb$$

2.

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 9 & 6 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 0\cdot\begin{vmatrix} 4 & 9 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 6 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 6 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 9 & 6 \\ 2 & 7 & 6 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 9 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot\left(2\cdot\overbrace{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}}^{-3} - 7\overbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}^{0} + 6\overbrace{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}}^{2}\right) - 3\cdot\left(2\cdot\overbrace{\begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}^{15} - 4\overbrace{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}^{6} +\right) = 3\cdot 6 - 3\cdot 6 = 0$$

[illegible]

További tulajdonságok:

$\det(A^T) = \det(A)$

$\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$ Áll. A $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

$\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$

$\det(\lambda\cdot \underset{n\times n}{A}) = \lambda^n\cdot\det(A)$

3.

$\det(A^T) = \det(-A)$ $A: 2015\times 2015.$ $\det(A) = ?$

~~$\det(A^T) = \det(A) = \det$~~

$\det(A^T) = \det(A) = (-1)^{2015}\cdot\det(A) = -\det(A) \Rightarrow \det(A) = 0$

Cramer-szabály

$\underset{n\times n}{\bar{\bar{A}}}\,\bar{x} = \bar{b}$ Feltesszük: 1 mo. van

$\Updownarrow$

$x_i = \dfrac{|a_1|a_2|\ldots|a_{i-1}|b|a_{i+1}|\ldots|a_n|}{\det(A)}$ A teljes rangú

$\Updownarrow$

$\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

4.

$$2x_1 + 8x_2 = -2$$
$$-x_1 - x_2 = -2$$

$x_2 \to ?$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 8 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{18}{6} = 3 \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{6} = -1$$

Bázistranszformáció

$\mathbb{R}^n \rightsquigarrow B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ bázis

$v \in \mathbb{R}^n \longrightarrow [v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, ha $v = \alpha_1 \underline{b_1} + \alpha_2 \underline{b_2} + \dots + \alpha_n \underline{b_n}$

B és C is bázisok

$$X_{C \leftarrow B} \cdot [v]_B = [v]_C$$

$$X_{C \leftarrow B} = \left[[b_1]_C \,|\, [b_2]_C \,|\, \dots \,|\, [b_n]_C \right]$$

$[b_1]_C = ?$ Kell: $x_1, x_2, \dots x_n$, hogy $b_1 = x_1 \cdot c_1 + \dots + x_n c_n$

$$b_1 = \underbrace{[c_1 | c_2 | \dots | c_n]}_{C} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \rightarrow C \cdot \underline{x} = \underline{b_1}$$

bal oldal mindig uo. $\Rightarrow$ szimultán oldjuk meg

$$[C \,|\, \underset{[b_1|b_2|\dots|b_n]}{B}] \xrightarrow{\text{Gauss}} [I \,|\, X_{C \leftarrow B}]$$

$$X_{C \leftarrow B} = X_{B \leftarrow C}^{-1}$$

B_1, B_2, B_3 bázisok

$$X_{B_3 \leftarrow B_2} \cdot X_{B_2 \leftarrow B_1} = X_{B_3 \leftarrow B_1}$$

B bázis $= \{b_1 | b_2 | \dots | b_n\}$

$$X_{\underset{\text{standard bázis}}{\mathcal{E}} \leftarrow B} = [b_1 | b_2 | \dots | b_n] = B$$

$$X_{C \leftarrow B} = X_{C \leftarrow \mathcal{E}} \cdot X_{\mathcal{E} \leftarrow B} = X_{\mathcal{E} \leftarrow C}^{-1} \cdot X_{\mathcal{E} \leftarrow B} = C^{-1} \cdot B$$

5.)
$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \right\} \qquad X_{C\leftarrow B} = ?, \text{ Ha } [v]_B = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \rightsquigarrow [v]_C = ?$$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix}7\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix} \right\}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 8 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[S_1 - 2\cdot S_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & -4 & -1 & -3 & -1 \\ 8 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{S_2 - 3\cdot S_1 \\ S_3 - 3\cdot S_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & -4 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & -17 & 16 & 4 & 11 & 4 \\ 0 & -16 & 15 & 4 & 12 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{S_2 - S_3 \\ S_2\cdot(-1)}]{}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & -4 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -16 & 15 & 4 & 12 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{S_1 - 6S_2 \\ S_3 + 16\cdot S_2 \\ S_3(-1)}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & +2 & -1 & -9 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & +1 & -4 & -28 & -21 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{S_2 + S_3 \\ S_1 - 2S_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 47 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -27 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -28 & -21 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 7 & 47 & 35 \\ -4 & -27 & -20 \\ -4 & -28 & -21 \end{matrix}}_{X_{C\leftarrow B}}$$

$$[v]_C = X_{C\leftarrow B} \cdot [v]_B =$$

Lineáris transzformációk

$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris, ha $\varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w) \ \forall\, v,w \in \mathbb{R}^n$
$\varphi(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot \varphi(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$

Példa:

$\underset{m\times n}{A} \quad x \in \mathbb{R}^n \longrightarrow A\underline{x} \in \mathbb{R}^m$

Csak ilyenek vannak! ($\forall$ lin. leképezés megvalósítható mátrixszorzással)

Köv:
$\varphi(\underline{0}) = \underline{0}$

6.)
$$T\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2x-y\\x-3y\end{pmatrix} \quad \text{Lineáris-e?} \qquad T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\parallel$$
$$\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & -3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

mátrixszorzás $\Rightarrow$ Igen, lineáris

7.)

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x-y+1 \\ x-3y+1 \end{pmatrix}$$ Lineáris-e?

$$f(\underline{0}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \underline{0} \Rightarrow \text{nem lineáris} \qquad / f(\underline{0}) \stackrel{!}{=} \underline{0} /$$

8.)

$\mathbb{R}^2$

S: $y=x$-re tükrözés

T: origó körüli 60°-os forgatás

Á'ét:

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$B = \{b_1 | \dots | b_n\}$ bázis $\quad e = \{e_1 | \dots | e_m\}$ bázis

$$\Rightarrow [f]_{e \leftarrow B} = \left[[f(b_1)]_e, \dots [f(b_n)]_e \right]$$

$v \in \mathbb{R}^n$

$$[f]_{e \leftarrow B} \cdot [v]_B = [f(v)]_e$$

$$[S]_e = \left[S\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, S\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[S]_B = \left[\left[S\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_B, \left[S\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_B \right] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_B \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Á'ét:

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

B, e bázisok

$$[f]_B = [f]_{B \leftarrow B} = X_{B \leftarrow e} [f]_e X_{e \leftarrow B}$$

Most:

$$[S]_B = \underbrace{X_{B \leftarrow e}}_{X^{-1}_{e \leftarrow B}} \cdot [f]_e \cdot \underbrace{X_{e \leftarrow B}}_{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} =$$

9.

$P: x+y+z=0$ síkra vetítés

$$[P]_{\mathcal{E}} = \left[P\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, P\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, P\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right]$$

standard bázisban

Másik lehetőség

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\}$$

↳ könnyű legyen megmondani a képét

$$\left[P\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \underline{0}$$

$$\left[P\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\left[P\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [P]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$[P]_{\mathcal{E}} = X_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} \cdot [P]_{\mathcal{B}} \cdot X_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = \begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}^{-1}$$

Ált. eset:

Altérre való merőleges vetítés

$V \leq \mathbb{R}^n$ k dimenziós altér

⇝ bázis $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ $\quad \underset{n\times k}{\mathcal{B}} = [b_1, b_2, \dots, b_k]$

merőleges vetítés mátrixa $= \mathcal{B}(\mathcal{B}^T\mathcal{B})^{-1}\mathcal{B}^T = [P]_{\mathcal{E}}$

$\cancel{\mathcal{B}(\mathcal{B}^T\mathcal{B})^{-1}}$

$v = \underset{\in V}{w_1} + \underset{\in V^\perp}{w_2} \Rightarrow P(v) = w_1$

↖ ezt kell tudni

10.

$x+y+z=0$-ra merőleges vetítés

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\} \longrightarrow \text{bázis}$$

$$B=\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\\0&-1\end{bmatrix} \longrightarrow [P]_{\mathcal{E}}=B(B^TB)^{-1}B^T$$

$$B^T\cdot B=\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$$

$$(B^T\cdot B)^{-1}=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}$$

$$\cancel{B\cdot(B^TB)^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}}$$

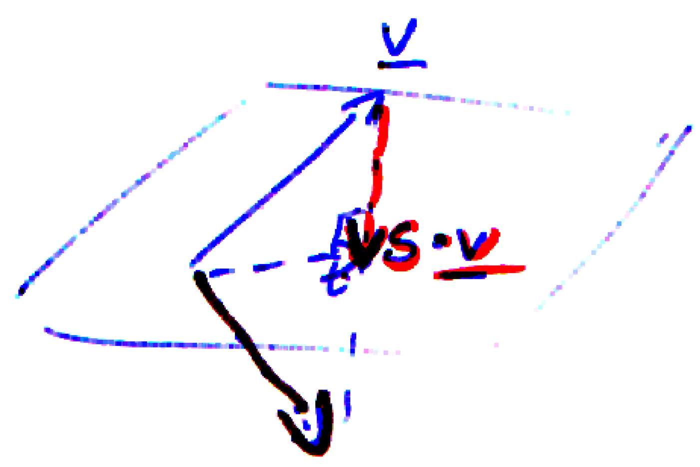
$$B\cdot(B^TB)^{-1}=\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\\0&-1\end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\-2&1\\1&-2\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{3}$$

$$B\cdot(B^TB)^{-1}\cdot B^T=\frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix}1&1\\-2&1\\1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}=[P]_{\mathcal{E}}$$

11.

$x+y+z=0$ $\quad S$: síkra vetítés ✓

Síkra tükrözés (Altérre tükrözés) $\rightarrow T$



$$S\underline{v}-\underline{v}+S\underline{v}=2S\underline{v}-\underline{v}=\underbrace{(2S-I)}_{T}\underline{v}$$

Merőleges vetítés altérre:

$V \leq \mathbb{R}^n$

$\hookrightarrow V \oplus V^\perp = \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \underline{a_1}, \underline{a_2}, \dots, \underline{a_k}$ bázis V-ben $\Rightarrow A = [\underline{a_1} | \underline{a_2} | \dots \underline{a_k}]$

$V \cap V^\perp = \{0\}$ $\rightsquigarrow v \in \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \exists!\, v_1, v_2$ $\quad v_1 \in V$, $v_2 \in V^\perp$, $v_1 + v_2 = v$

$\langle V, V^\perp \rangle = \mathbb{R}^n$

$\boxed{\mathrm{Proj}_V = A(A^TA)^{-1}A^T}$

merőleges vetítés

$\mathrm{Proj}_V(v) = v_1$

Általánosan:

$V, W \leq \mathbb{R}^n$ és $V \oplus W = \mathbb{R}^n$

$\forall v \in \mathbb{R}$ $\exists!\, v_1, v_2$ $\quad v_1 \in V$, $v_2 \in W$ $\quad v_1 + v_2 = v$

$v_1 \to$ v-nek a W-vel párhuzamosan a V-re vett vetülete

V-bázis $\underline{a_1}, \dots \underline{a_k}$

W-bázis $\underline{b_1}, \dots \underline{b_{n-k}}$

P- V-re vetítés W mentén

$\cancel{P(a_i) = a_i}$

$P b_j = \underline{0}$

$P a_i = a_i$

$$P[\underbrace{a_1 | a_2 | \dots | a_k}_{A} | \underbrace{b_1 | \dots b_{n-k}}_{B}] = [a_1 | a_2 | \dots a_k | \underline{0}]$$

$$\boxed{P = [A | \underline{0}] \cdot [\underline{A} | \underline{B}]^{-1}}$$

erre vetítek

e mentén

① $2x+3y-4z=0$ egyenletű síkra az $[1,2,3]$ vektor mentén vetítés!

$$B=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1/2&3/4\end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix}2&0\\0&4\\1&3\end{bmatrix}$$

$$P=[A|0]\cdot[A|B]^{-1}=$$

$$=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&4&0\\1&3&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&0&1\\0&4&2\\1&3&3\end{bmatrix}^{-1}=\dots$$

② $(3,0,-2,1)$ felbontani az $(1,0,3,-1)$ és $(-1,1,0,2)$ vektorok által kifeszített altérbe eső és erre merőleges komponensre.

I. mo.

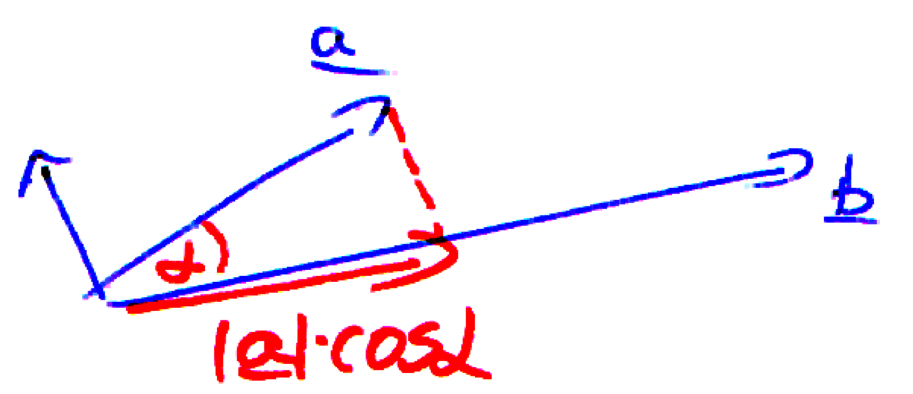
$\mathrm{Proj}_V = A(A^TA)^{-1}A^T$, ahol $A=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\\3&0\\-1&2\end{bmatrix}$

síkba eső komp.: $\mathrm{Proj}_V\cdot \underline{a}$

síkra merőleges komp.: $\underline{a}-\mathrm{Proj}_V\cdot\underline{a}$

II. mo.

$\underline{a}, \underline{b}$



$$\underline{a}_{b\parallel}=|\underline{a}|\cdot\cos\alpha\cdot\frac{\underline{b}}{|\underline{b}|}=\frac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{|\underline{b}|^2}\cdot\underline{b}$$

Képtér/Magtér

$\varphi: \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m \qquad \text{lin} \Leftrightarrow \underset{m\times n}{A}$

magtér: $\mathrm{Ker}(\varphi)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \varphi(\underline{x})=\underline{0}\}=N(A)$

$\Updownarrow$

$\underline{\underline{A}}\,\underline{x}=\underline{0}$

képtér: $\mathrm{Im}(\varphi)=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^m \mid \exists x: \varphi(x)=y\}=\mathcal{O}(A)$

$\Updownarrow$

$\underline{\underline{A}}\,\underline{x}=y$

$Ax=b$

$[a_1|\dots a_n]$

$x_1\underline{a}_1+x_2\underline{a}_2+\dots+x_n\underline{a}_n=\underline{b}$

$\downarrow$

Megoldható: konzisztens

Nem megoldható: inkonzisztens

Inkonzisztens: $Ax = b$

$\Updownarrow$

$b \notin \mathcal{O}(A)$

pl.:
$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 11 \\ x - y - 2z &= -7 \\ 3x + 2y - z &= 2 \end{aligned}$$

Optimális mo.: olyan x, amelyre $\underline{\underline{A}}\,\underline{x}$ a lehető legközelebb van $\underline{b}$-hez

$\Downarrow$

$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \mathrm{proj}_{\mathcal{O}(A)}\, \underline{b}$

$\Updownarrow$

Normál egyenlet: $\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{x} = \underline{\underline{A}}^T \underline{b}$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 11 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 14 & 11 & -3 \\ 11 & 14 & 3 \\ -3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 21 \\ 44 \\ 23 \end{bmatrix} \\ A^T & A^T A \qquad\quad A^T b \end{array}$$

$\leadsto$ Gauss-elimináció $\leadsto$ optimális megoldások

$A^T A$: mindig szimmetrikus

Min. absz. értékű opt. mo.: $\underline{\underline{A}}^+ \underline{b}$

pszeudoinverz

Pszeudoinverz számolása

1) $\underset{m \times k}{A}$ max oszloprangú:

$$\underset{k \times m}{A^+} = (A^T A)^{-1} \cdot A^T$$

2) $\underset{k \times n}{A}$ teljes sorrangú

$$\underset{n \times k}{A^+} = A^T (A A^T)^{-1}$$

3) $r(\underset{m \times n}{A}) < m, n$

$$\underset{m \times n}{A} = \underset{m \times r}{B}\, \underset{r \times n}{R} \quad \text{bázisfelbontás} \qquad A^+ = R^+ \cdot B^+$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \overset{S_1 \leftrightarrow S_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \underset{S_3 - 3S_1}{\overset{S_2 - 2S_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \underset{S_2/5}{\overset{S_3 - S_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{S_1 + S_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

redukált alak

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^T \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 11 \\ 11 & 14 \end{bmatrix} \to (B^T B)^{-1} = \frac{1}{\underbrace{14^2 - 11^2}_{75}} \cdot \begin{bmatrix} 14 & -11 \\ -11 & 14 \end{bmatrix}$$

$$B^+ = \frac{1}{75} \begin{bmatrix} 14 & -11 \\ -11 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 25 & 20 \\ 20 & -25 & -5 \end{bmatrix} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 4 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R \cdot R^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}. \qquad (R \cdot R^T)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R^+ = R^T (R \cdot R^T)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow R^+ = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^+ = R^+ B^+ = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{15} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 4 & -5 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{45} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 7 & -5 & 2 \\ -5 & -10 & -5 \end{bmatrix}$$

min. absz. értékű opt. mo:

$$\underline{\underline{A}}^+ \underline{b} = \frac{1}{45} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 7 & -5 & 2 \\ 5 & -10 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix} = \dots$$

Bázistranszformáció:

$$[f]_B = \left[[f(b_1)]_B, [f(b_2)]_B, \dots [f(b_n)]_B \right]$$

B standard bázis: $B = \mathcal{E} \rightsquigarrow [f]_{\mathcal{E}} = [f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)]$

B, C bázis

$$X_{C \leftarrow B} [v]_B = [v]_C$$

$$[f]_C = X_{C \leftarrow B} [f]_B \, X_{B \leftarrow C}$$

$$X_{\mathcal{E} \leftarrow B} = [b_1 | \dots | b_n]$$

3)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$ egy leképezés ~~tr~~ mx.-a a standard bázisban.

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \qquad A_{\mathcal{B}} = ?$$

$$A_{\mathcal{B}} = X_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}} \cdot A_{\mathcal{E}} \cdot \underbrace{X_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}}_{\underline{\underline{B}}} = \underline{B}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{B}$$

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

II. mo:

Def. szerint:

$$[\varphi]_{\mathcal{B}} = \left[[\varphi(b_1)]_{\mathcal{B}}, [\varphi(b_2)]_{\mathcal{B}}, [\varphi(b_3)]_{\mathcal{B}} \right] = \left[\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \right] = \left[\qquad \right]$$

QR felbontás

$$\underset{m \times n}{A} = \underset{m \times n}{Q} \cdot \underset{n \times n}{R}$$

teljes oszloprangú

$r(A) = n \leq m$

R: felső △ mátrix

Q: szemiortogonális mátrix: oszlopai ortonormált rendszer

páronként ⊥-ek és 1 hosszúak

$$Q \cdot Q^T = I$$

$$Ax = b$$

$$QRx = b \qquad /Q^T$$

$$\underbrace{Q^T Q}_{I} Rx = Q^T b$$

$$Rx = Q^T b$$

1) Gram-Schmidt ortogonalizáció

$\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ lin. fgtlen vektor $\to \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k$ ortonormált rendszer

és $\mathrm{Span}(a_1, \dots, a_k) = \mathrm{Span}(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k)$

$$a_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix}-1\\4\\4\\-1\end{pmatrix} \quad a_3 = \begin{pmatrix}4\\-2\\2\\0\end{pmatrix}$$

Köztes vektorok: $v_1, \dots, v_k$ ortogonális (páronként $\perp$)

$$u_i = \frac{v_i}{|v_i|}$$

$$v_1 = a_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

mert a hossz most még lényegtelen

$$v_2 = a_2 - a_{2_{v_1\parallel}} = a_2 - \frac{(a_2 \cdot v_1)}{|v_1|^2} v_1 = \begin{pmatrix}-1\\4\\4\\-1\end{pmatrix} - \cancel{\frac{6}{4}}\,\frac{3}{2} \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5/2\\5/2\\5/2\\-5/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$v_3 = a_3 - \frac{a_3 \cdot v_1}{|v_1|^2} v_1 - \frac{a_3 \cdot v_2}{|v_2|^2} v_2 = \begin{pmatrix}4\\-2\\2\\0\end{pmatrix} - \frac{4}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{-4}{4}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$u_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{v_2}{|v_2|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}$$

$$u_3 = \frac{v_3}{|v_3|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix}1 & -1 & 4\\1 & 4 & -2\\1 & 4 & 2\\1 & -1 & 0\end{bmatrix} \rightsquigarrow Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\1 & 1 & -1\\1 & 1 & 1\\1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$A = Q \cdot R \quad / Q^T$$

$$Q^T A = Q^T Q R = R \rightsquigarrow R = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\-1 & 1 & 1 & -1\\1 & -1 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 4\\1 & 4 & -2\\1 & 4 & 2\\1 & -1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 3 & 2\\0 & 5 & -2\\0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

Elemi ortogonális transzformációkkal

1) Givens-forgatás

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} \qquad r = \sqrt{a^2+b^2} \qquad \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \qquad \sin\alpha = -\frac{b}{r}, \quad \cos\alpha = \frac{a}{r}$$

(5)

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 15 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 15 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} \quad r = \sqrt{8^2+15^2} = 17 \longrightarrow \begin{bmatrix} 8/17 & 15/17 \\ -15/17 & 8/17 \end{bmatrix} \rightsquigarrow Q_1 = \begin{bmatrix} 8/17 & 0 & 15/17 \\ 0 & 1 & 0 \\ -15/17 & 0 & 8/17 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8/17 & 0 & 15/17 \\ 0 & 1 & 0 \\ -15/17 & 0 & 8/17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 15 & 12 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 12 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \quad r = 5 \longrightarrow \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & +4/5 \end{bmatrix} \rightsquigarrow Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \\ 0 & -3/5 & 4/5 \end{bmatrix}$$

$$Q_1 Q_2 A = \begin{bmatrix} 17 & 12 & -1 \\ 0 & 5 & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} = R$$

$$A = \cancel{R}\, Q_1^T Q_2^T R = QR \Rightarrow Q = Q_1^T Q_2^T$$

2) Householder-tükrözés.

$$\underline{a}, \underline{b} \qquad H_{a,b} = I - \frac{2}{(\underline{a}-\underline{b})^T(\underline{a}-\underline{b})} \cdot (\underline{a}-\underline{b}) \cdot (\underline{a}-\underline{b})^T$$

$$\underline{a} \to \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Konzultáció

Főleg számolás, elmélet kb, eldöntgetés, ilyesmi
Gyakorolni régi vizsga (komplexebb) inkább, mint régi zh

1. $(1,1,1,0),(1,3,5,0),(0,1,2,0)\in\mathbb{R}^4$ (2012. 12. 18. vizsga/3.)

Hány dimenziós alteret feszítenek?
Írjuk fel erre az altérre való merőleges vetítés mátrixát!

Oszlopokként jó berakni...

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\1&3&1\\1&5&2\\0&0&0\end{bmatrix}\overset{S_2-S_1}{\underset{S_3-S_1}{\sim}}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&4&2\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{S_3-2S_2}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\rightsquigarrow$$

altér bázisa (oszlopt.): vezérelemekhez tartozó eredeti oszlopok

lépcsős alak $\Downarrow$ rang = nem ∅ sorok száma = 2

2 dimenziós altér ~ V

V bázisa: $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\5\\0\end{pmatrix}\rightarrow A=\begin{pmatrix}1&1\\1&3\\1&5\\0&0\end{pmatrix}$

$$\mathrm{proj}_V=A(A^TA)^{-1}A^T$$

$$A^TA=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&3&5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&3\\1&5\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&9\\9&35\end{pmatrix}\rightarrow (A^TA)^{-1}=\frac{1}{3\cdot35-9\cdot9}\begin{pmatrix}35&-9\\-9&3\end{pmatrix}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}35&-9\\-9&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&1\\1&3\\1&5\\0&0\end{bmatrix}\frac{1}{24}\begin{bmatrix}35&-9\\-9&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&3&5&0\end{bmatrix}:\quad\begin{bmatrix}26&-6\\8&0\\-10&6\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}20&8&-4&0\\8&8&8&0\\-4&8&20&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}5&2&-1&0\\2&2&2&0\\-1&2&5&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\mathrm{proj}_V$$

Redukált lépcsős alakig:

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1/2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-1/2\\0&1&1/2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}a_1,a_2\text{ bázis}\\a_3=-\frac12 a_1+\frac12 a_2\end{matrix}$$

② $\underset{a_1}{(1,1,1,-1)}, \underset{a_2}{(1,0,0,3)}\ \underset{a_3}{(2,1,1,2)}$

Gram-Shmidt eljárással ortonormált

GS $\to$ $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ ortogonális rendszer és $\mathrm{Span}(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3) = \mathrm{Span}(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$

$\to$ $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3$ ONB az altérnek.

$\underline{u}_1 = \underline{a}_1 = (1,1,1,-1)$

$$\underline{u}_2 = \underline{a}_2 - \underbrace{\frac{\langle u_1; a_2\rangle}{|u_1|^2} u_1}_{a_2\text{-nek } u_1\text{-gyel } \parallel \text{ része}} = (1,0,0,3) - \frac{-2}{\underbrace{4}_{1^2+1^2+1^2+(-1)^2}}(1,1,1,-1) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) \rightsquigarrow (3,1,1,5)$$

a_2-nek u_1-re $\perp$ része

Ha már van 2 $\perp$, célszerű azokkal kezdeni

mert a hossz most nem számít

$$\underline{u}_3 = a_3 - \frac{\langle u_1, a_3\rangle}{|u_1|^2} u_1 - \frac{\langle u_2; a_3\rangle}{|u_2|^2} \underline{u}_2 = (2,1,1,2) - \cancel{\frac{4}{4}}\ 1\ (1,1,1,-1) - \cancel{\frac{18}{36}}\ \frac{1}{2}(3,1,1,5) = (0,0,0,0)$$

$\Downarrow$

a_3 függ a a_1, a_2-től

ortogonális bázis: u_1, u_2

ortonormált bázis: $v_1 = \frac{u_1}{|u_1|} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$v_2 = \frac{v_2}{|v_2|} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$

③ Lin. leképezés mátrixa : xy síkot $\pi/3$ szöggel elforgatja és az $(1,1,1)$ vektort helyben hagyja.

bázis $\mathbb{R}^3$-ban : $\left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \right\} \mathcal{B}$

$\downarrow$

$\begin{bmatrix}1/2\\ \sqrt{3}/2\\ 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}-\sqrt{3}/2\\ 1/2\\ 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

α szögű forgatás xy síkban: $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$

$$\underbrace{A_{\mathcal{B}}}_{(A_{\mathcal{B}})_{\mathcal{B}}} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0\\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A_{\mathcal{E}} = X_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} \cdot A_{\mathcal{B}} \cdot X_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = \mathcal{B} \cdot A_{\mathcal{B}} \cdot \mathcal{B}^{-1}$$

<u>2. mo.</u>

$$A_{\mathcal{E}} \underbrace{\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix}1/2 & -\sqrt{3}/2 & 1\\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{C} \xrightarrow{2.mo/A} A_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix}1/2 & -\sqrt{3}/2 & 1\\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}$$

$\xrightarrow{2.mo/B}$

$X \cdot B = C$

$B^T \cdot X^T = C^T \longrightarrow [B^T \mid C^T] \xrightarrow{\text{Gauss-elim.}} [I \mid X^T]$

Felsőbb matek - 04.07.

2. mo./A

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ A_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 1 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & * \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \end{array}$$

4.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ortogonális diagonalizáció + spektrálfelbontás

sajátérték, sajátvektor számítás

1. sé, sv.

$$\det(A-\lambda I) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1-\lambda \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2-4\right) - 2\left(2(1-\lambda)-4\right) + 2\left(4-2(1-\lambda)\right) =$$

$$= (1-\lambda)\underbrace{\left((1-\lambda)^2-4\right)}_{((1-\lambda)-2)((1-\lambda)+2)} - 4\cdot 2\left((1-\lambda)-2\right) =$$

$$= \left((1-\lambda)-2\right)\left((1-\lambda)\left((1-\lambda)+2\right)-8\right) =$$

$$= (-1-\lambda)\left(\underbrace{1-2\lambda+\lambda^2+2-2\lambda-8}_{\lambda^2-4\lambda-5}\right) = 0$$

$\lambda_1 = -1$

$\lambda_2 = 5$

$\lambda_3 = -1$

sajátvektorok:

$\lambda = -1$: $(A-\lambda I)x = \emptyset$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow x_1+x_2+x_3=0 \quad x_1 = -t-s$$

szabad param.

$x_2 = t$

$x_3 = s$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t-s \\ t \\ s \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sajátvektorok

$\lambda = 5$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \overset{S_1 \leftrightarrow S_2}{\underset{S_1/2}{\rightsquigarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

szabad p.
$x_3 = t$

$x_1 - x_3 = 0 \qquad x_1 = t$
$x_2 - x_3 = 0 \qquad x_2 = t$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diagonizálás

Keresek egy D diagonális mátrixot, ami hasonló A-hoz.

A hasonló D-hez, ha $\exists\, C$, hogy ~~BCx~~ $A = CDC^{-1}$

$A_{n \times n}$ diagonizálható, ha $\exists$ $n$db. fgtlen sajátvektora

C: sajátvektorokból álló mátrix
D: sajátértékekből

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad A = CDC^{-1}$$

A szimmetrikus: ortogonálisan diagonizálható

sajátvektorok megválaszthatók úgy, hogy ONB-t alkossanak

$C \rightsquigarrow Q \quad : Q^{-1} = Q^T$

$A = QDQ^T$

$$\lambda = 5 \;\to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad \lambda = -1 \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s$$

$t, s = ?$ hogy $\perp$-ek legyenek

$t = 1,\ s = -1 \quad ? \to (0, 1, -1)$
$t = 1,\ s = 1 \quad \to (-2, 1, 1)$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \qquad A = QDQ^T$$

merőlegesség, normálás

Spektrál felbontás:

$$A = \lambda_1 \cdot u_1 v_1^T + \lambda_2 u_2 v_2^T + \dots + \lambda_n u_n v_n^T$$

u_i: C oszlopai → sajátvektorok
v_i: C^{-1} sorai
λ_i: megfelelő sajátértékek

ortogonális/szimm. esetben: v_i: Q^T sorai

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = -1 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}} + (-1) \underbrace{\begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}}_{\begin{bmatrix} 4/6 & -2/6 & -2/6 \\ -2/6 & 1/6 & 1/6 \\ -2/6 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}} + 5 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}}_{\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}}$$

$$A = (-1) \underbrace{\left[\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right]}_{P_{-1}} + 5 \cdot \underbrace{\left[\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right]}_{P_5}$$

: spektrálfelbontás

P_{-1} ↑ sajátvektorok által kifeszített sajátaltérre való ~~⊥~~ projekció

P_5 ↑ 5-höz tartozó sajátaltérre való merőleges projekció

3. QR felbontás
- Gram-Schmidt ortog. → $Q \rightsquigarrow R = Q^T A$
- Householder-tükr.
- Givens forg.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Householder tükrözés

$\underline{a} \to \underline{b}$ $\quad H = I - \frac{2}{(\underline{b}-\underline{a})^T(\underline{b}-\underline{a})} (b-a)(b-a)^T$

tükrözés a hosszt nem változtatja

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eredeti vektor hossza

$$\underline{b} - \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \cancel{2}\,\cancel{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

eredeti vektor hossza

$$\underset{\underline{a}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \to \underset{\underline{b}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$\underline{b} - \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad H_2 = I - \frac{2}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{H_2 (H_1 \cdot A)}_{\text{elemi ortogonális mátrixok szorzata}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R \qquad A = \underbrace{H_2^T H_1^T}_{Q} \cdot R$$

QR felhasználása:

- egyenletrendszer $\quad Ax = b$

$$QRx = b$$

$$Rx = Q^T b \Leftarrow \text{őt egyszerű megoldani}$$

$\exists$ QR felb., ha teljes oszloprangú.