1. feladat (14 pont)
Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását, és az $y(\pi) = -\pi$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldást:

$$y' + 2\,y\,\cos x = 5\,\mathrm{e}^{-2\sin x}$$

Mo. (H) $y' + 2\,y\,\cos x = 0 \quad \ldots \quad y_H = C\,\mathrm{e}^{-2\sin x}, \quad C \in \mathbb{R}$

(I) $y_{ip} = c(x)\,\mathrm{e}^{-2\sin x} \quad \ldots \quad c(x) = 5x$

$\Longrightarrow \quad y_{iá} = y_H + y_{ip} = C\,\mathrm{e}^{-2\sin x} + 5x\,\mathrm{e}^{-2\sin x}$
$-\pi = C + 5\pi \quad \Longrightarrow \quad C = -6\pi.$

---

2. feladat (6+14=20 pont)
a) Ismertesse a szétválasztható változójú differenciálegyenletek definícióját, és megoldásának módszerét (bizonyítás nem kell)!
b) Az $u = 2x+y$ új változó bevezetésével oldja meg az $y' = \dfrac{4}{2x+y}$ differenciálegyenletet (elegendő a megoldást implicit alakban megadni)!

Mo. *a*) Analízis 2 jegyzet 16-18. oldal.
b) $y = u - 2x \quad \Longrightarrow \quad y' = u' - 2$
Behelyettesítve:
$$u' - 2 = \frac{4}{u} \quad \Longrightarrow \quad u' = \frac{2u+4}{u}$$
: szeparábilis differenciálegyenlet.
Ezt megoldja:
$u \equiv -2$ (egyensúlyi helyzet) $\quad \Longrightarrow \quad 2x + y = -2$.
$u \neq -2$:
$$\frac{1}{2}\int \frac{u}{u+2}\,\mathrm{d}u = \int \mathrm{d}x \quad \ldots \quad \frac{u}{2} - \ln|u+2| = x + C$$
Így a megoldás:
$$\frac{2x+y}{2} - \ln|2x+y+2| = x + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

---

3. feladat (22 pont)
Adja meg az $y''' + y'' + y' + y = \mathrm{ch}(2x)$ differenciálegyenlet általános megoldását!

Mo. $\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1=0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda^2\,(\lambda+1)+(\lambda+1)=0 \quad\Longrightarrow\quad (\lambda+1)\,(\lambda^2+1)=0$
$\Longrightarrow \quad \lambda_1=-1\,,\ \lambda_2=i\,,\ \lambda_3=-i \quad\Longrightarrow\quad y_H=C_1\,\mathrm{e}^{-x}+C_2\sin x+C_3\,\cos x$
Mivel a jobb oldal $\mathrm{ch}(2x) = (\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x})/2$, így nincs külső rezonancia, azaz a próbafüggvény:

$$\begin{aligned}1\cdot|\quad y_{ip}&=A\,\mathrm{e}^{2x}+B\,\mathrm{e}^{-2x}\\ 1\cdot|\quad y'_{ip}&=2A\,\mathrm{e}^{2x}-2B\,\mathrm{e}^{-2x}\\ 1\cdot|\quad y''_{ip}&=4A\,\mathrm{e}^{2x}+4B\,\mathrm{e}^{-2x}\\ 1\cdot|\quad y'''_{ip}&=8A\,\mathrm{e}^{2x}-8B\,\mathrm{e}^{-2x}\end{aligned}$$

$$\cdots\quad A=\frac{1}{30},\ B=-\frac{1}{10} \quad\Longrightarrow\quad y_{ip}=\frac{1}{30}\,\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{10}\,\mathrm{e}^{-2x}$$

Így a keresett általános megoldás:

$$y_{iá}=y_H+y_{ip}=C_1\,\mathrm{e}^{-x}+C_2\,\sin x+C_3\,\cos x+\frac{1}{30}\,\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{10}\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

---

4. feladat (12+5=17 pont)
Konvergensek-e az alábbi sorok? Ha igen, adja meg az összegüket!

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n+2}+(-5)^{n-1}}{3^{2n+1}} \qquad\qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n+1}}{2^{3n+2}+(-5)^{n-1}}$$

Mo. *a*) A sor két konvergens geometriai sor összege, tehát számolhatjuk tagonként a sorösszeget és az eredményeket összegezzük.

$$s=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n+2}+(-5)^{n-1}}{3^{2n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{3}\cdot\frac{8^n}{9^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{-15}\cdot\frac{(-5)^n}{9^n}=s_1+s_2$$

A konstans is kiemelhető:

$$s=\frac{4}{3}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^n-\frac{1}{15}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-5}{9}\right)^n=\frac{\frac{32}{27}}{1-\frac{8}{9}}+\frac{\frac{5}{135}}{1-\frac{-5}{9}}$$

b) $\dfrac{3^{2n+1}}{2^{3n+2}+(-5)^{n-1}}=\left(\dfrac{2^{3n+2}+(-5)^{n-1}}{3^{2n+1}}\right)^{-1}$, és $\sum\dfrac{2^{3n+2}+(-5)^{n-1}}{3^{2n+1}}$ konvergens, vagyis $\left|\dfrac{2^{3n+2}+(-5)^{n-1}}{3^{2n+1}}\right|\to 0$, így $\left|\dfrac{3^{2n+1}}{2^{3n+2}+(-5)^{n-1}}\right|\to\infty$, tehát nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele, így a sor divergens.

5. feladat (19+8=27 pont)
Konvergensek-e az alábbi sorok? Ha igen, adjon becslést az $s \approx s_{99}$ közelítés hibájára!

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(n+4)\ 7^{n+1}} \qquad\qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+2}{5n^3+4n}$$

Mo. $a)$ Hányadoskritériummal :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)\ \ 2^n\ \ 7^{n+1}}{7^{n+2}\ \ (n+5)\ \ 2^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{7}\ \frac{1+\dfrac{4}{n}}{1+\dfrac{5}{n}} = \frac{2}{7} < 1$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konvergens}$$

Mivel $\dfrac{2^{n-1}}{(n+4)\ 7^{n+1}} \leq \dfrac{2^{n-1}}{7^{n+1}}$, így

$$|s-s_{99}| = \sum_{n=100}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(n+4)\ 7^{n+1}} \leq \sum_{n=100}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{7^{n+1}} = \frac{\dfrac{2^{99}}{7^{101}}}{1-\dfrac{2}{7}}$$

$b)$ Minoráns kritériummal $\quad \dfrac{3n^2+2}{5n^3+4n} \geq \dfrac{3n^2}{5n^3+4n^3} = \dfrac{1}{3n}$, és $\sum \dfrac{1}{3n}$ divergens, tehát a sor divergens.

IMSC feladat (15 IMSC pont) Egy motorcsónak sebessége állóvízben $v_0 = 20$ km/h. Teljes sebességgel halad, majd a motor leáll, és ezután 40 s alatt a csónak sebessége $v_1 = 8$ km/h-ra csökken. A víz ellenállása arányos a csónak sebességével. Mekkora a csónak sebessége 2 perccel a motor kikapcsolás után?

Mo. A mozgó csónakra az $F = -kv$ erő hat, ahol k arányossági tényező. Newton törvénye szerint az erő a tömeg és a gyorsulás szorzata. Ebből következik, hogy a mozgás differenciálegyenlete: $m\dfrac{dv}{dt} = -kv$, amiből $\int \dfrac{dv}{v} = -\int \dfrac{k}{m}dt$, vagyis $\ln v = -\dfrac{k}{m}t + C_1$.

A differenciálegyenlet általános megoldása tehát:

$$v = e^{-\frac{k}{m}t+C_1} = Ce^{-\frac{k}{m}t}.$$

A kezdeti feltétel $20 = v(0) = Ce^{-\frac{k}{m}0} = C$.
40 s$= \dfrac{1}{90}$ óra, tehát $8 = v\left(\dfrac{1}{90}\right) = 20e^{-\frac{k}{m}\cdot\frac{1}{90}}$, vagyis $e^{\frac{k}{m}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{90}$. 2 perc$= \dfrac{1}{30}$ óra, vagyis

$$v\left(\frac{1}{30}\right) = 20\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{90}\right]^{-\frac{1}{30}} = 20\left(\frac{5}{2}\right)^{-3} = \frac{32}{25} \text{ km/h}.$$
