**ANALÍZIS(2)** | **II. ZÁRTHELYI megoldása** | **2002. április 18.**
Műszaki Informatika szak | B kurzus | Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

**1. feladat (10 pont)**

Határozza meg az alábbi hatványsor konvergenciasugarát, majd adjon meg egy olyan intervallumot, amelyen a konvergencia egyenletes!

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!\, e^n \frac{(x+7)^n}{n^n} = \sum_{1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

$$a_n = \frac{n!\, e^n}{n^n} \quad ; \quad x_0 = -7$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!\, e^{n+1}\, n^n}{(n+1)^{n+1}\, n!\, e^n} = \frac{(n+1)\, e\, n^n}{(n+1)^{n+1}} =$$

$$= \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{e}{e} = 1 = \frac{1}{R} \longrightarrow R = 1$$

$-8 \quad -7 \quad -6$

Pl. $I = [-7, -6.5] \subset (-8, -6) = (x_0 - R, x_0 + R) \Rightarrow$ a konv. egyenletes $I$-n

**2. feladat (16 pont)**

$$f(x) = e^{-x^4}, \qquad g(x) = \sin(2x^3)$$

a) Írja fel az $f$ és $g$ függvények $x_0 = 0$ körüli Taylor sorainak első négy nem nulla tagját! Adja meg e sorok konvergencia tartományait!

b) Az integranduszt nyolcadfokú Taylor polinomjával közelítve számítsa ki az $\int_0^{0.1} e^{-x^4}\, dx$ integrál értékét közelítően! Adjon becslést azt elkövetett hibára!

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x^4} + x^4 - 1}{x^5 \sin(2x^3)} = ?$
A számláló és a nevező megfelelő Taylor sorfejtése segítségével oldja meg a feladatot!

a) $e^u = \sum_0^\infty \frac{u^n}{n!}$ ; $u \in \mathbb{R}$ és $\sin u = \sum_1^\infty (-1)^{n+1} \frac{u^{2n-1}}{(2n-1)!}$ ; $u \in \mathbb{R}$

$$e^{-x^4} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{4n}}{n!} = \underbrace{\boxed{1 - x^4 + \frac{x^8}{2!}}}_{}{}^{T_8(x)} - \frac{x^{12}}{3!} + \dots , \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sin(2x^3) = \sum_1^\infty (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{4n-2}}{(2n-1)!} =$$

$$= 2x^3 - \frac{2^3 x^9}{3!} + \frac{2^5 x^{15}}{5!} - \frac{2^7 x^{21}}{7!} + \dots , \quad x \in \mathbb{R}$$

b.) $$I = \int_0^{0,1} (1 - x^4 + \dots)\, dx = x - \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{2!\,9} - \frac{x^{13}}{3!\,13} + \dots \Big|_0^{0,1} =$$

$$= \underbrace{0,1 - \frac{0,1^5}{5} + \frac{0,1^9}{2!\,9}}_{:=a} - \frac{0,1^{13}}{3!\,13} + \dots \approx a$$

$$|H| < \frac{0,1^{13}}{3!\,13}$$ , mivel Leibniz sor

c.) $$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^8}{2!} - \frac{x^{12}}{3!} - \dots}{2x^8 - \frac{2^3 x^{14}}{3!} + \dots} = \lim_{x \to 0} \frac{x^8}{x^8} \, \frac{\frac{1}{2!} - \frac{x^4}{3!} + \dots}{2 - \frac{2^3 x^6}{3!} + \dots} = \frac{\frac{1}{2!}}{2} = \frac{1}{4}$$

e2020418/ B12

**3. feladat (15 pont)**

$$\sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)\, x^{2k-2}$$

a) Írja fel a sor összegfüggvényét és határozza meg a sor konvergenciatartományát!

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{4^{k-1}} = ?, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)\, 4^{k-1} = ?$

a.) $\displaystyle s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)\, x^{2k-2}, \quad x \in (-R, R)$

$$s(x) = \left( \int_0^x s(x)\,dx \right)' = \frac{d}{dx} \int_0^x \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1) x^{2k-2}\, dx =$$

$$= \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1) \frac{x^{2k-1}}{2k-1} \Big|_0^x = \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} x^{2k-1} = \left( \frac{x}{1-x^2} \right)'$$

$R=1$, mert geom. sor

$$s(x) = \frac{1\cdot(1-x^2) - x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$$

$R=1$ most is. A végpontokat az eredeti sornál kell ellenőrizni.

$$x = \pm 1: \quad \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)(\pm 1)^{2k-2} = \sum_{1}^{\infty} \underbrace{(2k-1)}_{\not\to 0} = \infty$$

(+ tagú, az általános tag $\not\to 0$)

KT.: $(-1, 1)$

b.) $\displaystyle\sum_1^{\infty} \frac{2k-1}{4^{k-1}} = \sum_1^{\infty} (2k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-2} = s\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^2}$

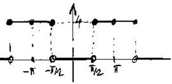
$\displaystyle\sum_1^{\infty} (2k-1)\, 4^{k-1} = \sum_1^{\infty} (2k-1)\, 2^{2k-2}$ div., mert $2 \notin (-1, 1)$

**4. feladat (12 pont)**

Határozza meg az alábbi függvény Fourier sorát (összegfüggvénye legyen $\phi$)!

$$f(x)=\begin{cases} 4, & \text{ha } x\in[-\pi,-\pi/2]\cup[\pi/2,\pi] \\ 0, & \text{ha } x\in(-\pi/2,\pi/2)\end{cases} \qquad f(x)=f(x+2\pi),\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$\phi(x)=?$




$$\phi(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx\ ;\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx$$

$f$ páros $\Rightarrow$ $b_k=0$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}4\,dx=\frac{2}{\pi}4\frac{\pi}{2}=4$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)\cos kx}_{\text{páros}}\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}4\cos kx\,dx=\frac{8}{\pi}\left.\frac{\sin kx}{k}\right|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{8}{\pi k}\left(0-\sin k\frac{\pi}{2}\right)$$

$$a_k=\begin{cases}0, & \text{ha } k=2l \\ -\frac{8}{\pi k}, & \text{ha } k=4l-3 \\ \frac{8}{\pi k}, & \text{ha } k=4l-1\end{cases}$$

$$\phi(x)=\underbrace{2}_{\frac{a_0}{2}}+\frac{8}{\pi}\left(-\cos x+\frac{\cos 3x}{3}-\frac{\cos 5x}{5}+\frac{\cos 7x}{7}-\dots\right)$$

$$\phi(x)=\begin{cases}f(x), & \text{ha } x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \\ 2, & \text{ha } x=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}$$

A14
Z20200418/BM.

**5. feladat (17 pont)**

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

a) Folytonos-e, totálisan deriválható-e az $f$ függvény az origóban?

b) $f'_x(0,0)=?$, $\quad f'_x(x,y)=?$, $\quad f'_x(1,\sqrt{\pi/2})=?$

$\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{(1,\sqrt{\pi/2})}=?$, ha $\underline{e}=[1,0]$

a) $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y^2}{y^2}=1\neq f(0,0)=0$

$\Rightarrow f$ nem folytonos $(0,0)$-ban $\Rightarrow$ nem differenciálható $(0,0)$-ban

Vagy

$\lim\limits_{x\to 0} f(x,mx)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin m^2x^2}{x^2+m^2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin m^2x^2}{m^2x^2}\,\dfrac{m^2}{1+m^2}=\dfrac{m^2}{1+m^2}$

Mivel függ $m$-től $\Rightarrow\nexists$ a hé $\Rightarrow f$ nem folyt. $(0,0)$-ban.

b.) $f'_x(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{0-0}{h}=0$

Ha $(x,y)\neq(0,0)$: $\quad f'_x(x,y)=\sin y^2\,\dfrac{-2x}{(x^2+y^2)^2}$

$f'_x(1+\sqrt{\pi/2})=\dfrac{-2}{(\frac{\pi}{2}+1)^2}$

Az iránymenti derivált definíciójából következik, hogy ha $\underline{e}=\underline{i}$, akkor $\left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{(1,\sqrt{\pi/2})}=f'_x(1,\sqrt{\tfrac{\pi}{2}})=\dfrac{-2}{(\frac{\pi}{2}+1)^2}$

Z20204118/B/5.

**6. feladat (13 pont)**

a) Írja le az $m$-változós függvény totális deriválhatóságának definícióját az értelmezési tartomány $\underline{a}$ belső pontjában! $\quad \operatorname{grad} f(\underline{a}) = ?$

b) Totálisan differenciálható-e az $f(x, y, z) = x^2 y z^4$ függvény?
$\operatorname{grad} f(P_0) = ?$ , ha $\quad P_0 = (2, -1, 1)$

c) Írja fel az $f$ függvény $P_0$-n átmenő szintfelülete $P_0$-beli érintő síkjának az egyenletét!

a.) L... jegyzet !

b) $f'_x = 2xyz^4$ ; $f'_y = x^2 z^4$ ; $f'_z = x^2 y \, 4z^3$ : mindenütt léteznek és folytonosak $\Rightarrow f$ mindenütt totálisan deriválható

$\operatorname{grad} f(P_0) = \left(f'_x \underline{i} + f'_y \underline{j} + f'_z \underline{k}\right)\Big|_{P_0} = -4\underline{i} + 4\underline{j} - 16\underline{k}$

c.) $\underline{n} = \operatorname{grad} f(P_0)$ miatt

$-4(x-2) + 4(y-(-1)) - 16(z-1) = 0$

**7. feladat (10 pont)**

$$g(x,y) = f\left(\frac{2x}{y+1}\right), \qquad f \in C^2_{\mathbb{R}} \quad \text{(egyváltozós)}$$

a) $g'_x = ?, \quad g'_y = ?, \quad g''_{yy} = ?$

b) Az $f$ függvény $x_0 = 0$ pontra támaszkodó másodrendű Taylor polinomja:

$$T_2(x) = 2 + 5x + 6x^2$$

$f'(0) = ?, \quad f''(0) = ?, \quad g'_x(0,0) = ?, \quad g''_{yy}(0,0) = ?$

a.) $g'_x = f'\left(\frac{2x}{y+1}\right) \frac{2}{y+1}$

$g'_y = f'\left(\frac{2x}{y+1}\right) 2x \frac{-1}{(y+1)^2}$

$g''_{yy} = f''\left(\frac{2x}{y+1}\right) \frac{-2x}{(y+1)^2} \frac{-2x}{(y+1)^2} + f'\left(\frac{2x}{y+1}\right) (-2x) \frac{-2}{(y+1)^3}$

b.) $f'(0) = 5 \; ; \; \frac{f''(0)}{2!} = 6 \Rightarrow f''(0) = 12$

$g'_x(0,0) = f'(0) \cdot 2 = 10$

$g''_{yy}(0,0) = f''(0) \cdot 0 + f'(0) \cdot 0 = 0$

z 20204418 / B A

**8. feladat (10 pont)**

Határozza meg az $f(x,y) = e^{x^2+y^2+xy}$ lokális szélsőérték helyeit és azok jellegét!

$f'_x = e^{x^2+y^2+xy}\,(2x+y) = 0$
$f'_y = e^{x^2+y^2+xy}\,(2y+x) = 0$ } $x=0$ és $y=0$ pontban lehet lok. szé

$D(x,y) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}$

$D(x,y) = \begin{vmatrix} e^{x^2+y^2+xy}(2x+y)^2 + e^{x^2+y^2+xy}\cdot 2 & e^{\cdots}(2y+x)(2x+y) + e^{\cdots}\cdot 1 \\ \text{u.a} & e^{\cdots}(2y+x)^2 + e^{\cdots}\cdot 2 \end{vmatrix}$

$D(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4-1 = 3 > 0$ és $f''_{xx}(0,0) = 2 > 0$,

tehát lokális minimum van $(0,0)$-ban

---

*Pótfeladat (csak az elégségeshez javítjuk ki):*

**9. feladat (10 pont)**

$$f(x) = (1+x)^{-1/4}, \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{1+7x^3}}$$

a) Írja fel az $f$ és $g$ függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorait és adja meg a sorok konvergenciasugarait!

b) $g^{(12)}(0) = ?$, $\quad g^{(13)}(0) = ?$
A sorfejtésből adjon választ!

a.) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/4}{n} x^n \qquad R = 1$

$g(x) = (1+7x^3)^{-\frac{1}{4}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/4}{n} 7^n x^{3n} \qquad |7x^3| < 1 \to |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{7}} = R$

b.) $a_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}$ miatt

$g^{(12)}(0) = 12!\, a_{12} = 12! \binom{-1/4}{4} 7^4$

$g^{(13)}(0) = 13!\, a_{13} = 0$