ANALÍZIS(2)
Mérnök Informatikus szak **I. ZÁRTHELYI** β **változat** **2011. március 10.**
Munkaidő: 90 perc
BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (13 pont)

a) Adja meg az

$$y' = (2y+1)\,\frac{\ln^3 x}{x}, \qquad x > 0$$

differenciálegyenlet összes megoldását!

b) Határozza meg az $y(1) = -3$ kezdeti értékhez tartozó megoldást!

(Mindkét esetben elég az implicit alak.)

$\boxed{11}$ a.) $y \equiv -\frac{1}{2}$, $x>0$ megoldás (2)

$y \neq -\frac{1}{2}$: $\int \frac{1}{2y+1}\,dy = \int \frac{1}{x}\ln^3 x\,dx$ (3)

$f' f^3$

$\frac{1}{2}\ln|2y+1| = \frac{\ln^4 x}{4} + C \qquad C\in\mathbb{R}$

(2) (3) (1)

$\boxed{2}$ b.) $y(1) = -3$:

$\frac{1}{2}\ln 5 = C \implies \frac{1}{2}\ln(-2y-1) = \frac{\ln^4 x}{4} + \frac{1}{2}\ln 5$

(2)

2. feladat (15 pont)

Határozza meg a következő differenciálegyenlet összes megoldását!

$$y' - \frac{2}{x}\,y = x^3 e^{3x}, \qquad x \neq 0$$

(H) $y' = \frac{2}{x}y$ $\quad y_H = C\cdot\varphi(x)$ alakú, ezért elég 1 megoldást megkeresnünk.

$\int \frac{1}{y}\,dy = 2\int\frac{1}{x}\,dx \implies \ln y = 2\ln x \implies y = x^2 = \varphi(x)$

$y_H = C\cdot x^2$ (5) $\qquad C\in\mathbb{R}$

$y_{ip} = c(x)\cdot x^2$ (2)

$y'_{ip} = c'\cdot x^2 + c\cdot 2x$

$(c'x^2 + c\,2x) - \frac{2}{x}cx^2 = x^3e^{3x} \implies c' = xe^{3x}$ (3)

an2z1110310/1.

$$c = \int x\, e^{3x}\, dx = \frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x} dx = \frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x}$$

$u = x \quad v' = e^{3x}$

$u' = 1 \quad v = \frac{e^{3x}}{3}$

$$y_{ip} = \frac{x^3}{3} e^{3x} - \frac{x^2}{9} e^{3x} \quad (3)$$

$$y_{id} = y_H + y_{ip} = \dots \quad (2)$$

3. feladat (16 pont)

a) Írja fel az

$$y' - \ln(5y^2) + 2x + \ln 5 = 0$$

differenciálegyenlet izoklináinak egyenletét! Rajzolja fel azt az izoklináját, amelynek pontjaiban teljesül a lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele! Jelölje be az iránymezőt ezen izoklina néhány pontjában!

Jelölje be az iránymezőt az $x_0 = 1, y_0 = 1$ pontban is!

b) Az $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}$ megoldása a fenti differenciálegyenletnek, akárhányszor differenciálható és átmegy a $(0, 1)$ ponton.

Van-e ennek a megoldásnak lokális maximuma az $x_0 = 0$ helyen?

a.) $y' = \ln 5y^2 - 2x - \ln 5$

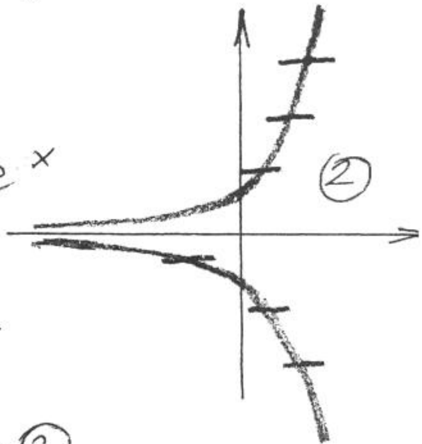
$\boxed{9}$ Az izoklinák: $\ln 5y^2 - 2x - \ln 5 = K$ (3)

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele:

$y' = 0 \Rightarrow K = 0$ választás kell

$\ln 5y^2 - 2x - \ln 5 = 0$ (2)

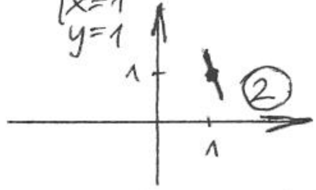
$\ln y^2 = 2x \Rightarrow y^2 = e^{2x} \Rightarrow y = \pm e^x$



(2)

$x_0 = 1,\ y_0 = 1$: $y(1) = 1$

$$y'(1) = \ln 5y^2 - 2x - \ln 5 \Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = -2$$



(2)

b.) $y' = \ln y^2 - 2x$

$\boxed{7}$ $y(0) = 1$

$$y'(0) = \ln y^2 - 2x \Big|_{\substack{x=0\\y=1}} = 0 \quad (2) \Rightarrow$$ lokális szélsőérték lehet itt

$$y'' = \frac{1}{y^2} 2y \cdot y' - 2 \quad (3)$$

$$y''(0) = -2 \quad (1)$$

(1)

$y'(0) = 0$ és $y''(0) < 0$: lokális maximum van $x_0 = 0$-ban

an2z1110310/2.

4. feladat (15 pont)

$u = \frac{y}{x}$ helyettesítéssel oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$x^2 y' + xy = x^2 + y^2 \qquad (x > 0)$$

A megoldást fejezze ki y-ra!

$$y' = \frac{1}{x^2}(x^2+y^2-xy) \Rightarrow y' = 1+\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x}$$

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = u \cdot x \Rightarrow y' = u'x + u \cdot 1$$

Elvégezve a behelyettesítést:

$$u'x + u = 1 + u^2 - u \quad (4)$$

$$\frac{du}{dx} = u' = \frac{1}{x}(u-1)^2 \Rightarrow u \equiv 1 \text{ megoldás, tehát}$$

$u \neq 1$: $\qquad y = x,\ x>0$ megoldás (2)

$$\int \frac{1}{(u-1)^2}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx \quad (2)$$

$$\frac{(u-1)^{-1}}{-1} = \ln x + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

(2) (2) (1)

$$\frac{y}{x} = u = 1 - \frac{1}{\ln x + C}$$

$$\Rightarrow \left(y = x\left(1 - \frac{1}{\ln x + C}\right) \text{ ill. } y = x\right) \text{ és } x>0$$

(2)

5. feladat (8 pont)

Írjon fel egy olyan legalacsonyabbrendű valós konstans együtthatós lineáris homogén differenciálegyenletet, amelynek megoldásai között szerepel:

$$y = 3x^2 + 4\sin 3x$$

$3x^2$ miatt: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ (2)

$\sin 3x$ miatt $\cos 3x$ is megoldás és

$$\lambda_{4,5} = 0 \pm j3 \quad (2)$$

Így a karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^3 \underbrace{(\lambda - j3)(\lambda + j3)}_{\lambda^2+9} = 0 \quad (2)$$

$$\lambda^5 + 9\lambda^3 = 0$$

Így a de.: $y^{V} + 9y''' = 0$ (2)

an2z1 110310/3.

6. feladat (14 pont)

a)

$$y''' - 9y' = 0$$

Adja meg az általános megoldást!

b) Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y''' - 9y' = 36x + 9 + 5e^{-2x}$$

a.) $y = e^{\lambda x}$: $\lambda^3 - 9\lambda = 0$

$\boxed{6}$ $\lambda(\lambda^2 - 9) = \lambda(\lambda-3)(\lambda+3) = 0$

Tehát $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = -3$ (3)

$y_H = C_1 + C_2 e^{3x} + C_3 e^{-3x}$ (3) $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

b.) (H): $y''' - 9y' = 0$, így y_H az előző:

$\boxed{8}$ $y_H = C_1 + C_2 e^{3x} + C_3 e^{-3x}$

$f(x) = (36x + 9) + (5e^{-2x})$, ezért a kísérletező függvény:

$y_{ip} = \underbrace{(Ax+B)x}_{Ax^2+Bx} + Ce^{-2x}$ (2) : külső rezonancia

$$\begin{array}{r|l} -9\cdot & y'_{ip} = 2Ax + B - 2Ce^{-2x} \\ & y''_{ip} = 2A + 4Ce^{-2x} \\ 1\cdot & y'''_{ip} = -8Ce^{-2x} \end{array}$$

$-18Ax - 9B + e^{-2x}(18C - 8C) = 36x + 9 + 5e^{-2x}$

$-18A = 36 \Rightarrow A = -2$

$-9B = 9 \Rightarrow B = -1$

$10C = 5 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$

$y_{ip} = -2x^2 - x + \frac{1}{2}e^{-2x}$ (4)

$y_{iá} = y_H + y_{ip} = \ldots$ (2)

an221110310/4.

7. feladat (9 pont)

a) Írja föl az

$$f(n) = 3\,f(n-1) + 10\,f(n-2)$$

rekurzió általános megoldását!

b) Adja meg azt a megoldást, melyre $f(0) = 3$, és $f(1) = 8$.

a.) $\boxed{6}$ $f(n) = q^n$: $q^n = 3q^{n-1} + 10q^{n-2} \quad |:q^{n-2} \neq 0$

$q^2 = 3q + 10$

$q^2 - 3q - 10 = 0 \Rightarrow q_1 = 5,\ q_2 = -2$ (3)

$f(n) = C_1 5^n + C_2 (-2)^n$ (3) $\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

b.) $\boxed{3}$ $f(0)=3$: $C_1 + C_2 = 3$; $f(1)=8$: $5C_1 - 2C_2 = 8$ $\Rightarrow C_1 = 2,\ C_2 = 1$

Tehát $f(n) = 2 \cdot 5^n + (-2)^n$ (3)

8. feladat (10 pont)

a) Írja le a numerikus sorokra vonatkozó gyökkritérium limeszes alakját!

b) Konvergens-e az alábbi sor?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{2n+2}\right)^{4n^2} \frac{n^4}{3^{2n}}$$

a) $\boxed{3}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; $a_n > 0$

Ha létezik $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = c$

és $c < 1 \Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ konvergens,

ha $c > 1$ vagy $c = \infty \Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ divergens.

b) $\boxed{7}$ $\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{2n+3}{2n+2}\right)^{4n} \frac{\sqrt[n]{n^4}}{3^2} =$ (3)

$$= \left(\frac{\left(1+\frac{3}{2n}\right)^{2n}}{\left(1+\frac{2}{2n}\right)^{2n}}\right)^2 \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^4}{9} \longrightarrow \left(\frac{e^3}{e^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{e^2}{9} < 1$$

$\Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ konv. (4)

an2z1110310/5.

Pótfeladatok (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):

9. feladat (9 pont)

Adja meg az alábbi differenciálegyenlet összes megoldását!
(Elég az implicit alak is.)

$$y' = (3x+1)^8\,(y^2+4y+5)$$

$g(y) = y^2+4y+5 = (y+2)^2+1 > 0$ miatt:

$$\int \frac{1}{1+(y+2)^2}\,dy = \int (3x+1)^8\,dx \qquad (3)$$

$$\operatorname{arctg}(y+2) = \frac{1}{3}\,\frac{(3x+1)^9}{9} + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

(3) (2) (1)

10. feladat (11 pont)

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y'' - 2y' - 3y = 3x - 9e^{2x}$$

(H) $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda+1)(\lambda-3) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 3$

$y_H = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$ (4) $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

(I): $f(x) = (3x) + (-9e^{2x})$

$-3.\ |\ y_{ip} = (Ax+B) + (Ce^{2x})$ (2) nincs külső rezonancia

$-2.\ |\ y_{ip}' = A + 2Ce^{2x}$

$1.\ |\ y_{ip}'' = 4Ce^{2x}$

$-3Ax + (-3B-2A) + e^{2x}(-3C-4C+4C) = 3x - 9e^{2x}$

$-3A = 3 \Rightarrow A = -1$

$-3B-2A = 0 \Rightarrow B = -\frac{2}{3}A = \frac{2}{3}$

$-3C = -9 \Rightarrow C = 3$

$y_{ip} = -x + \frac{2}{3} + 3e^{2x}$ (3)

$y_{ia} = y_H + y_{ip} = \dots\dots$

(2)

an2 z1 110310/6.