ANALÍZIS(1)
Mérnök Informatikus szak

VIZSGADOLGOZAT

2011. jan. 6.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (13 pont)

a) Mit állíthatunk konvergens számsorozatok összegéről?
Mondja ki és bizonyítsa be a tanult tételt!

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\dfrac{n^2+5}{n^2+3}\right)^{2n^2}+\sqrt{\dfrac{(2n+1)^3}{3n^3+n^2-1}}\right)=?$

a.)

$\boxed{6}$ T $(a_n \to A) \wedge (b_n \to B) \Longrightarrow (a_n + b_n \to A+B)$

B Az (a_n) és (b_n) számsorozatok konvergenciája miatt $\frac{\varepsilon}{2}$-höz $\exists\, N_1$ és N_2:

$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$, ha $n > N_1(\frac{\varepsilon}{2})$ és

$|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$, ha $n > N_2(\frac{\varepsilon}{2})$.

$N(\varepsilon) := \max\{N_1(\frac{\varepsilon}{2}), N_2(\frac{\varepsilon}{2})\}$

Ha $n > N(\varepsilon)$:

$|(a_n+b_n)-(A+B)| = |(a_n-A)+(b_n-B)| \le |a_n-A|+|b_n-B| <$

$< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Tehát valóban $a_n+b_n \to A+B$.

$\boxed{7}$ b.) $a_n := \left(\dfrac{n^2+5}{n^2+3}\right)^{2n^2} = \left(\dfrac{(1+5/n^2)^{n^2}}{(1+3/n^2)^{n^2}}\right)^2 \longrightarrow \left(\dfrac{e^5}{e^3}\right)^2 = e^4$ 4

$b_n := \sqrt{\dfrac{(2n+1)^3}{3n^3+n^2-1}} = \sqrt{\underbrace{\dfrac{n^3}{n^3}}_{=1}\dfrac{(2+\frac{1}{n})^3}{3+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}} \to \sqrt{\dfrac{(2+0)^3}{3+0-0}} = \sqrt{\dfrac{8}{3}}$ 3

$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = e^4+\sqrt{\frac{8}{3}}$

2. feladat (10 pont)

Konvergens-e az alábbi sor?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+2}{2n^2+3}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+3}+2^{2n}}{3+5^{n+1}}$

a.)

$\boxed{4}$ $a_n = \dfrac{5n+2}{2n^2+3} > \dfrac{5n}{2n^2+3n^2} = \dfrac{1}{n}$; $\sum\frac{1}{n}$ divergens

$\xRightarrow[\text{minoráns kr.}]{} \sum^{\infty} a_n$ div.

an1v-110106/1.

b.) $\boxed{6}$

$$b_n = \frac{8\cdot 2^n + 4^n}{3+5\cdot 5^n} < \frac{8\cdot 4^n + 4^n}{5\cdot 5^n} = \frac{9}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$$\frac{9}{5}\sum^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n \text{ konv. geom. sor} \left(0<q=\frac{4}{5}<1\right) \underset{\text{maj.kr.}}{\Longrightarrow} \sum^{\infty} b_n \text{ konv.}$$

3. feladat (22 pont)

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{5}{x^2}, & \text{ha} \quad x>0 \\ b, & \text{ha} \quad x=0 \\ \dfrac{\sin(4x)}{3x}, & \text{ha} \quad x<0 \end{cases}$$

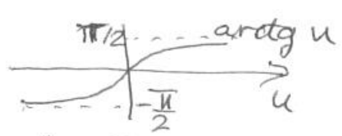
a) Megválasztható-e "b" értéke ($b \in \mathbb{R}$) úgy, hogy f folytonos legyen $x=0$-ban?
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = ?$

b) Létezik-e $f'(0)$?
Írja fel $f'(x)$-et, ahol az létezik!

c) Írja le Weierstrass I. és II. tételét!
Van-e minimuma, illetve maximuma f-nek a $[2,3]$ intervallumon? (Nem kell az értéke!)

a) $\boxed{8}$

$$f(0+0) = \lim_{x\to 0+0} \operatorname{arctg} \underbrace{\frac{5}{\underbrace{x^2}_{\to +0}}}_{+\infty} = \frac{\pi}{2} \quad (2)$$



$$f(0-0) = \lim_{x\to 0-0} \frac{\sin 4x}{3x} = \lim_{x\to 0-0} \underbrace{\frac{\sin 4x}{4x}}_{1} \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \quad (2)$$

$f(0+0) \neq f(0-0) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) \nexists \Longrightarrow \nexists\, b$, melyre f folytonos lenne $x=0$-ban (1)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\sin 4x}_{\text{korl.}} \underbrace{\left(\frac{1}{3x}\right)}_{\to 0} = 0 \quad (3)$$

b.) $\boxed{8}$ f nem folytonos $x=0$-ban $\Longrightarrow f'(0) \nexists$ (2)

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\left(\frac{5}{x^2}\right)^2}\, 5\cdot\dfrac{-2}{x^3}, & \text{ha } x>0 \quad (3) \\[2ex] \dfrac{4(\cos 4x)\, 3x - (\sin 4x)\cdot 3}{(3x)^2}, & \text{ha } x<0 \quad (3) \end{cases}$$

$\boxed{6}$ c) W. I.:
(1) Ha f folytonos az $[a,b]$ (korlátos és zárt) intervallumon,
(2) akkor ott f korlátos.

(1) W. II.:
(2) Ha f folytonos $[a,b]$-ben, akkor ott felveszi infimumát és szuprémumát, tehát van minimuma és maximuma.

(2) Az adott f folytonos a $[2,3]$ korlátos és zárt intervallumon $\underset{\text{W. II. t.}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ minimuma és maximuma itt.

an1o 110106/2.

4. feladat (12 pont)

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = ?$ (Nem használhat L'Hospital szabályt!)

b) Bizonyítsa be, hogy a $\sin x$ deriváltja $\cos x$!
A felhasznált nevezetes limeszt nem kell bizonyítania!

a) felhasználjuk, hogy $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$\boxed{4}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\cdot \sin^2 \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x\to 0} - \underbrace{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}_{\to 1} \underbrace{\sin\frac{x}{2}}_{0} = 0$$

b.) $\boxed{8}$

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \quad (2) \quad = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x\cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h - \sin x}{h} = \quad (2)$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\sin x \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{0 \text{ (a)-ból}} + \cos x \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{1} \right) = \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x \quad (4)$$

5. feladat (8 pont)*

A határozott integrál definíciójával állapítsa meg az

$$\int_2^5 7 \ \mathrm{d}x$$

integrál értékét! (Nem használhatja a Newton-Leibniz tételt!)

Tetszőleges F felosztásnál:

$$s_F = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 7\cdot \Delta x_k = 7 \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = 7\cdot(5-2) = 21 \quad (2)$$

$$S_F = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 7\cdot \Delta x_k = 21 \text{ szintén} \quad (2)$$

$$h = \sup\{s_F\} = \sup\{21\} = 21 \quad (1)$$

$$H = \inf\{S_F\} = \inf\{21\} = 21 \quad (1)$$

$$h = H \Rightarrow \exists \text{ az integrál és } \int_2^5 7\,dx = 21 \quad (2)$$

6. feladat (5+8=13 pont)*

a) $\int \sin^2 x \ \cos^3 x \ \mathrm{d}x \ = ?$

b) Vezesse be az alábbi integrálban a $t = \sqrt[3]{2x-5}$ új változót és számítsa ki az integrál értékét!

$$\int \frac{2x+3}{\sqrt[3]{(2x-5)^4}} \ \mathrm{d}x$$

a.) $\boxed{5}$

$$\int \sin^2 x \cos x \underbrace{\cos^2 x}_{(1-\sin^2 x)} \, dx = \int \big(\underset{f' \ f^2}{\cos x \sin^2 x} - \underset{f' f^4}{\cos x \sin^4 x}\big) dx =$$

$$= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

b.) $\boxed{8}$

$$t = \sqrt[3]{2x-5} \implies x = \frac{1}{2}(t^3+5) \implies dx = \frac{3}{2} t^2 dt \quad 2$$

$$\int \frac{t^3+5+3}{t^4} \frac{3}{2} t^2 \, dt \quad 2 \quad = \frac{3}{2} \int \Big(t + \underbrace{\frac{8}{t^2}}_{8 \cdot t^{-2}}\Big) dt =$$

$$= \frac{3}{2} \left(\frac{t^2}{2} + 8 \frac{t^{-1}}{-1} \right) + C \quad 3$$

$$I_b = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} \sqrt[3]{(2x-5)^2} - 8 \frac{1}{\sqrt[3]{2x-5}} \right) + C \quad 1$$

7. feladat (10 pont)*

a) $\int (2x+1) \, \mathrm{e}^{-3x} \ \mathrm{d}x \ = ?$

b) $\int 2x \, \mathrm{e}^{-3x^2} \ \mathrm{d}x \ = ?$

a.) $\boxed{7}$

$$\int (2x+1) \, e^{-3x} dx = -\frac{2x+1}{3} e^{-3x} + \frac{2}{3} \int e^{-3x} dx = \quad 3$$

$u = 2x+1 \quad v' = e^{-3x}$

$u' = 2 \quad v = \frac{e^{-3x}}{-3} \quad 2$

$$= -\frac{2x+1}{3} e^{-3x} + \frac{2}{3} \frac{e^{-3x}}{-3} + C \quad 2$$

b) $\boxed{3}$

$$\int 2x e^{-3x^2} dx = -\frac{1}{3} \int \underset{f' e^f}{-6x \, e^{-3x^2}} dx = -\frac{1}{3} e^{-3x^2} + C$$

an1v-110106/4.

8. feladat (12 pont)*

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+6x+5}\,dx = ?$ b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2+6x+5}\,dx = ?$

a.) $\boxed{8}$ $\dfrac{1}{x^2+6x+5} = \dfrac{1}{(x+1)(x+5)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x+5}$ (2)

$1 = A(x+5) + B(x+1)$ $x=-1:$ $1 = 4A \Rightarrow A = \frac{1}{4}$

$x=-5:$ $1 = -4B \Rightarrow B = -\frac{1}{4}$

$I_a = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+5}\right)dx$ (3) $= \frac{1}{4}\left(\ln|x+1| - \ln|x+5|\right) + C$ (3)

b.) $\boxed{4}$ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2+6x+5}\,dx = \lim_{\omega\to\infty}\int_1^\omega \frac{1}{x^2+6x+5}\,dx$ (1) $=$ a.)-ből

$= \displaystyle\lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{4}\left(\ln(x+1) - \ln(x+5)\right)\Big|_1^\omega =$

$= \displaystyle\lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{4}\Big(\underbrace{\ln(\omega+1) - \ln(\omega+5)}_{= \ln\frac{\omega+1}{\omega+5} = \ln\frac{1+\frac{1}{\omega}}{1+\frac{5}{\omega}} \to \ln 1 = 0} - (\ln 2 - \ln 6)\Big) = \frac{1}{4}(\ln 6 - \ln 2) =$ (3)

$\left(= \frac{1}{4}\ln 3\right)$

Figyelem! A *-gal jelölt feladatokból legalább 12 pontot el kell érni!

---

an1v-110106/5.

Pótfeladatok (csak az elégséges és közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki):

9. feladat (11 pont)

a) Adja meg az alábbi sor összegét!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} + (-2)^n}{7^n} = ?$$

b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sin(2-x)}{(x-3)^2} = ?$

a.) Két konvergens geometriai sor összegéről van szó.

$\boxed{7}$ $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 3^n + (-2)^n}{7^n} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{7}\right)^n =$$

$q_1 = \frac{3}{7},\ |q_1| < 1 \qquad q_2 = -\frac{2}{7},\ |q_2| < 1$

$$= 3 \frac{\frac{3}{7}}{1 - \frac{3}{7}} + \frac{-\frac{2}{7}}{1 - \left(-\frac{2}{7}\right)}$$

b.) $\boxed{4}$ $$\lim_{x \to 3} \frac{\sin(2-x) \to \sin(-1) < 0}{(x-3)^2 \to +0} = -\infty$$

10. feladat (9 pont)

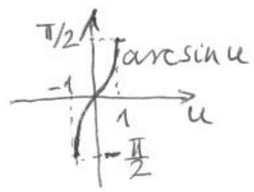
$$f(x) = \pi + 2 \arcsin(4x^2 - 1)$$

Határozza meg f értelmezési tartományát, értékkészletét!

$f'(x) = ?$

$$-1 \le 4x^2 - 1 \le 1$$

$$\underbrace{0 \le 4x^2}_{\forall x\text{-re igaz}} \le 2 \Rightarrow x^2 \le \frac{1}{2} \Rightarrow |x| \le \frac{1}{\sqrt{2}}$$



$D_f = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ 3

$\arcsin(4x^2-1) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 2\arcsin(4x^2-1) \in [-\pi, \pi]$

$\Rightarrow R_f = [0, 2\pi]$ 3

$$f'(x) = 2 \frac{1}{\sqrt{1 - (4x^2-1)^2}} \cdot 8x$$ 3