1. feladat (4+4=8 pont)
Adja meg a következő komplex mennyiségeket algebrai alakban!

a) $(\sqrt{3}i+1)^{10}=?$,

Megoldás: $=\left(2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})\right)^{10}$ **1p.** $=2^{10}(\cos\frac{10\pi}{3}+i\sin\frac{10\pi}{3})$ **2p.** $=-512-512\sqrt{3}i$ **1p.**

b) $\dfrac{1+3i}{2\big(\cos(\pi/4)-i\sin(\pi/4)\big)}=?$

Megoldás: $=\dfrac{1+3i}{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}=\dfrac{(1+3i)(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)}{4}$ **3p.** $=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}+i\sqrt{2}$ **1p.**

2. feladat (3+5=8 pont)

a) Mikor mondjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$? (Írja le a definíciót!)

Megoldás:

$$\forall K\in\mathbb{R}:\exists N\in\mathbb{R}: N<n\in\mathbb{N}\implies a_n<K.$$

b) A definícióval igazolja, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-4n^3+300n^2}{n^2+600}=-\infty.$$

Megoldás:

$$\frac{-4n^3+300n^2}{n^2+600}<K \quad \textbf{2p.}$$

$n>99 \implies 3n^3\geq 300n^2$, így ekkor $\dfrac{-4n^3+300n^2}{n^2+600}\leq\dfrac{-4n^3+3n^3}{n^2+600n^2}=-\dfrac{n}{601}$.

$-\dfrac{n}{601}<K \iff n>-601K.$ **2p.**

A küszöb lehet $N(K)=\max\{99,-601K\}$. **1p.**

3. feladat (5+4+6=15 pont)
Határozza meg a következő sorozatok határértékét!

$$a)\quad a_n = \frac{1}{\sqrt{9n^2+5n}-3n}, \qquad b)\quad b_n = \frac{n^n}{(2n)!}, \qquad c)\quad c_n = \left(\frac{3n^2+2}{3n^2+1}\right)^n.$$

Megoldás:

a) $a_n = \dfrac{\sqrt{9n^2+5n}+3n}{9n^2+5n-(3n)^2}$ $\boxed{\textbf{2p.}}$ $= \dfrac{\sqrt{9+5/n}+3}{5}$ $\boxed{\textbf{1p.}}$ $\to \dfrac{\sqrt{9+0}+3}{5} = \dfrac{6}{5}$ $\boxed{\textbf{2p.}}$;

b) $0 \le b_n = \dfrac{1}{n!}\dfrac{n\cdot n\cdot\dots\cdot n}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot\dots\cdot(2n)} \le \dfrac{1}{n!}$ $\boxed{\textbf{3p.}}$ $\to 0$ így a rendőrelv miatt $b_n \to 0$ $\boxed{\textbf{1p.}}$;

c) $c_n^n = \dfrac{(1+\frac{2/3}{n^2})^{n^2}}{(1+\frac{1/3}{n^2})^{n^2}} \to \dfrac{e^{2/3}}{e^{1/3}} = e^{1/3}$, így $1 \le c_n^n \le 3$ ha n elég nagy $\boxed{\textbf{3p.}}$. Ekkor $1 \le c_n \le \sqrt[n]{3} \to 1$ $\boxed{\textbf{1p.}}$, és így a rendőrelv miatt $c_n \to 1$ $\boxed{\textbf{2p.}}$.

4. feladat (4+4+4=12 pont)

$$a_1 = 4, \qquad a_{n+1} = \sqrt{8a_n - 12}.$$

a) Igazolja, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $2 < a_n < 6$!

b) Igazolja, hogy az a_n sorozat monoton nő!

c) Határozza meg az a_n sorozat határértékét!

Megoldás:

a) Teljes indukcióval: $n = 1$-re $2 < a_1 = 4 < 6$ $\boxed{\textbf{1p.}}$;

Indukciós lépés: $2 < a_n < 6 \overset{?}{\Longrightarrow} 2 < a_{n+1} < 6 \quad (n \in \mathbb{N})$. Ez teljesül, hiszen ha $2 < a_n < 6$, akkor $4 = 16 - 12 < 8a_n - 12 < 48 - 12 = 36$, ezért $2 = \sqrt{4} < \sqrt{8a_n - 12} < \sqrt{36} = 6$ $\boxed{\textbf{3p.}}$.

b) Be kell látni, hogy $a_{n+1} \ge a_n \quad (n \in \mathbb{N})$ $\boxed{\textbf{1p.}}$. Mivel $a_n > 0$, ezért $\sqrt{8a_n - 12} \ge a_n$ azzal ekvivalens, hogy $8a_n - 12 \ge a_n^2$, ami pontosan akkor teljesül, ha $2 < a_n < 6$ $\boxed{\textbf{2p.}}$, amit az előbb már láttunk $\boxed{\textbf{1p.}}$.

c) Az előzőek szerint a_n konvergens $\boxed{\textbf{2p.}}$, jelölje határértékét $A \in \mathbb{R}$. Ekkor $a_{n+1} \to A$, mert részsorozat, másfelől a határérték és a műveletek kapcsolata miatt $A = \lim a_{n+1} = \lim \sqrt{8a_n - 12} = \sqrt{8A - 12}$ $\boxed{\textbf{1p.}}$. Két megoldás van $A_1 = 2$ és $A_2 = 6$. Mivel a_n monoton nő, ezért $A = \lim a_n = \sup a_n$, ami nem lehet 2, mert ez nem felső korlát. Tehát $A = \lim a_n = 6$ $\boxed{\textbf{1p.}}$.

5. feladat (7 pont)
Határozza meg a következő sorozat torlódási pontjait, limesz szuperiorját, limesz inferiorját valamint limeszét, ha létezik!

$$a_n = \frac{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)2^{2n} + 3^n}{4^{n+3}}$$

Megoldás: $a_{2n-1} = \dfrac{\cos(n\pi - \pi/2)2^{4n-2} + 3^{2n-1}}{4^{2n+2}} = 0$, $a_{4n-2} = \dfrac{\cos(2n\pi - \pi)2^{8n-4} + 3^{4n-2}}{4^{4n+1}} = \dfrac{-2^{-4} + 1/9(3/4)^{4n}}{4} \to -1/64$, és $a_{4n} = \dfrac{\cos(2n\pi)2^{8n} + 3^{4n}}{4^{4n+3}} = \dfrac{1 + (3/4)^{4n}}{64} \to 1/64$ **4p.**.

Mivel a sorozat minden eleme szerepel a fenti három részsorozat valamelyikében, ezért a_n-nek 3 torlódási pontja van 0 és $\pm 1/64$ **2p.**.

Ekkor $\limsup a_n = 1/64 \neq -1/64 = \liminf a_n$, és ezért nincs határérték **1p.**.