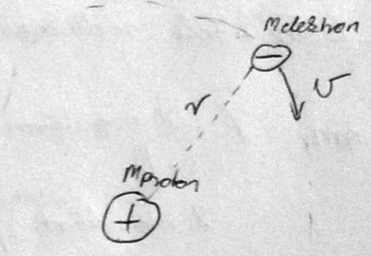
FIZIKA 3

3 EA kezdés: 17^{20}

2 ZH-val lehet kiváltani vizsgát

Bohr-féle atommodell

hidrogénatom:



$$\frac{m_p}{m_e} \approx 1848$$

annyira nagy a proton tömege, hogy e^- mozgása kis perturbációt (befolyást) okoz

e^- stacionárius körpályán mozog

bizonyos sugarú körökön mozognak csak, nincs tetszőleges sugarú kör

$m_e \frac{v^2}{r}$ - erő mennyiség

v - kerületi sebesség
r - körpálya sugara

⇓

körpályára kényszeríti az e^--t

$$m_e \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{r^2}$$

Bohr-féle posztulátum: csak olyan sugár engedhető meg,

ahol $m_e \cdot v \cdot r$ (nem lehet tetszőleges) $= n \cdot \hbar$

impulzus momentum

$$\boxed{m_e v \cdot r = n \hbar}$$

ahol $n = 1, 2, 3 \ldots$ (kvantumszám)

$$\boxed{\hbar = \frac{h}{2\pi}}$$ - Planck-állandó

$$m v r = n \hbar$$

$$v^2 = \frac{n^2 \hbar^2}{m^2 r^2}$$

$$m_e \frac{v^2}{r} = m_e \frac{n^2 \hbar^2}{m_e^2 r^3} = \frac{e^2}{r^2} =$$

$$\boxed{r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{m_e e^2}}$$ – meghatározza, hogy különböző kvantumszámoknál mekkora a körpálya sugara

ha $n = 1$ – legkisebb körpálya – Bohr – féle rádiusz

$$r_1 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} \simeq 0{,}0529 \text{ nm}$$ (fél angstörm)

2 atom közt 1-2 angström

$1 : 4 : 9 : 16 \ldots = r_1 : r_2 : r_3$ → n^2 miatt aránylás úgy mint négyzetszámok

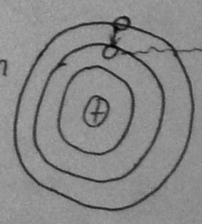
$$E = E_{kinetikus} + E_{pot} = \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{e^2}{r} = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{r}$$

$$\boxed{E = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{r}}$$

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{m_e e^4}{\hbar^2} \frac{1}{n^2}$$ – körpályák energiaszintjei

arány: $1 : \frac{1}{4} : \frac{1}{9} : \frac{1}{16} \ldots$

$$E_m - E_n = -\frac{1}{2} \frac{m_e e^4}{\hbar^2} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) = h \nu_{mn}$$



→ kisugárzott energia EM hullám formájában kisugárzott foton $h\nu$ - energiájú lesz

klasszikus fizikával ellentmondás

gyorsuló e^- energiát veszít, akkor hogyan stacionárius a körpálya?

Operátorok:

maks: függvény $x \rightarrow f(x) = y$

operátor: $f(x) \rightarrow \hat{O} f(x) = g(x)$

olyan művelet, amely bizonyos fv-hez egy másik fv-t rendel

pl: gyökvonás, deriválás, abszolút érték képzés

Értelmezési tartomány

1. egyértékű - minden x-hez egy db y tartozik
   pl: sin, de arc sin nem ilyen

2. folytonos

3. korlátos - korlátnál nagyobb vagy kisebb értéket nem vehet fel (pl. sin $-1, 1$)

4. négyzetesen integrálható

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 < \infty$$

komplex konjugált

$$f^*(x) \cdot f(x) = |f(x)|^2$$

Lineáris operátor:

$$\hat{O}(\varphi_1 + \varphi_2) = \hat{O}\varphi_1 + \hat{O}\varphi_2$$

$$\hat{O}(k\varphi_1) = k(\hat{O}\varphi)$$

Összeadás

$$(\hat{O}_1 + \hat{O}_2)\varphi = \hat{O}_1\varphi + \hat{O}_2\varphi$$

Szorzás

$$\hat{O}_1 \hat{O}_2 \varphi = \hat{O}_1(\hat{O}_2 \varphi)$$

Sajátegyenlet:

$$\hat{O}\varphi = k\,\varphi$$ – sajátértékegyenlet

sajátfv. sajátérték

Példa: Differenciál-operátor

$$\frac{d\,\varphi(x)}{d\,x} = k\,\varphi(x)$$

Próbafüggvény:

$$\varphi(x) = A \cdot e^{kx}$$

– összes e^{kx} alakú függvény jó lenne, de nem korlátos → így nem jó

$$A \cdot k e^{kx} = k \cdot A \cdot e^{kx}$$

de ha $\varphi(x) = A \cdot e^{ikx}$ – így már jó

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Paritás-operátor: $\hat{P}$

$$\hat{P}\,\varphi(x) = \varphi(-x)$$

$$\hat{P}\,\varphi(x) = k\,\varphi(x)$$

$$\hat{P}^2\,\varphi(x) = \varphi(x) = k\,\varphi(-x) = k^2\,\varphi(x)$$

$k^2 = 1$ $k = \pm 1$ paritás operátornak két sajátértéke van

Skalárszorzat

$\varphi_1 \quad \varphi_2$

két fv esetén eredményül skalár lesz

$$(\varphi_1 ; \varphi_2) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1^*(x) \cdot \varphi_2(x) \, dx$$ - definíció

valós fv-ek esetén * elhagyható

tulajdonságai:

1. $(\varphi_1 ; \varphi_2 + \varphi_3) = (\varphi_1 ; \varphi_2) + (\varphi_1 ; \varphi_3)$
2. $(\varphi_1 ; \varphi_2)^* = (\varphi_2 ; \varphi_1)$
3. $(\varphi_1 ; k\varphi_2) = k(\varphi_1 ; \varphi_2)$

   $(k\varphi_1 ; \varphi_2) = k^*(\varphi_1 ; \varphi_2)$
4. $(\varphi_1 ; 0) = 0$

Norma

vektor eset: $\sqrt{(3i, 4j, 5k) \cdot (3i, 4j, 5k)} = \sqrt{9+16+25}$

$(\varphi ; \varphi) = ||\varphi||^2$

Adjungált operátor

$(\hat{O}\varphi_1 ; \varphi_2) = (\varphi_1 ; \hat{O}^+ \varphi_2)$ minden φ_1, φ_2-re

$\hat{O}^+$ - $\hat{O}$ adjungáltja

Önadjungált operátor

$\hat{O}^+ = \hat{O}$ - másnéven hermitikus operátor

Tétel:
Hermitikus operátorok sajátértékei valósak

(2. lépés) $\varphi \cdot$ | $O\varphi = k\varphi$ | $\cdot \varphi$ (1. lépés)

egymással egyenlőek – $(O\varphi;\varphi) = (k\varphi;\varphi) = (k^*(\varphi;\varphi)$ – jobb oldal is egyenlő

$$(\varphi;O\varphi) = (\varphi;k\varphi)\ k(\varphi;\varphi)$$

$$k^*(\varphi;\varphi) = k(\varphi;\varphi)$$

$$\boxed{k^* = k}$$

$$a+ib = a-ib$$

$$b=0$$ – valósak

Kvantummechanika

A fizikai mennyiségek matematikai leírására operátorok szolgálnak.

A fizikai mennyiség méréskor kapott értéke mindig a megfelelő operátor valamelyik sajátértékével egyezik meg

A fizikai mennyiség lehetséges értékei az őt leíró operátor sajátértékeivel azonosak – vizsgán csélyes

feladat: megfelelő operátor megtalálása, egyenlet megoldása, sajátértékek meghatározása

W. Heisenberg

Heisenberg-féle felcserélési törvény:

$$[\underbrace{\hat{P}_x}_{\text{impulzus operátor}};\underbrace{\hat{x}}_{\text{helykoord. operátor}}] = \hat{P}\hat{x} - \hat{x}\hat{P} = \frac{\hbar}{i}$$

$9+16 = 25$ $\sqrt{25} = 5$

$\sqrt{9}\ \sqrt{16} = 3+4 = 7$

nem egyenlő = 2

—

FIZIKA 3

4. EA

szkeptikus. bme. hu

kísérlet – fotoeffektus

oxidréteg – megemeli a kilépési munkát

Heisenberg – féle felcserélési törvény

$$\left[\hat{p}_x ; \hat{x} \right]$$ – egy dimenzióban vagyunk

$\downarrow$ impulzus

$$\left[\hat{p}_x ; \hat{x} \right] \equiv \hat{p}\hat{x} - \hat{x}\hat{p} = \frac{\hbar}{i}$$

kanonikusan konjugált fizikai mennyiség-nek ki kell elégítenie ezt a felcserélési törvény

impulzus – hely

impulzusmomentum – szög

energia – idő

Impulzus és hely operátora

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{x} &= x \cdot \\ \hat{p} &= \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx} \end{aligned}}$$

– hely operátora a hely koordinátával való szorzás

– ~~hely~~ impulzus operátora hely szerinti koordinálás

$$\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\left(x \cdot \varphi(x)\right) - x \cdot \left(\frac{\hbar}{i}\frac{d\,\varphi(x)}{dx}\right) = \frac{\hbar}{i}\left(\varphi(x) + x\frac{d\,\varphi(x)}{dx}\right) -$$

$$- \frac{\hbar}{i} x \frac{d\,\varphi(x)}{d(x)} = \frac{\hbar}{i}\varphi(x)$$

hermitikusak-e

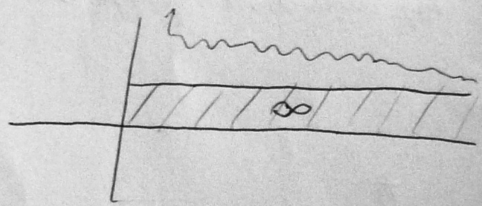
$\hat{X} = x$. → triviális

$\hat{P}$ önadjungált-e?

$$\varphi_1(x): \frac{\hbar}{i} \frac{d\varphi_2(x)}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1^*(x) \cdot \frac{\hbar}{i} \frac{d\varphi_2(x)}{dx} \cdot dx =$$

$$= \frac{\hbar}{i} \left[\varphi_1^*(x) \cdot \varphi_2(x)\right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{\hbar}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi_1^*(x)}{dx} \varphi_2(x)\, dx =$$

ennek 0-nak kell lennie



azért, mert mindkettőnek végtelenbe kell tartania, négyzetes integrálhatósági feltétel miatt

GESZTI TAMÁS
KVANTUMMECH.

$$= \left(\left(\frac{\hbar}{i} \frac{d\varphi_1(x)}{dx} \right)^* ; \varphi_2 \right)$$ → önadjungált

<u>Energia operátor</u>

kinetikus
potenciális

Klasszikus fizika: $E = K + P = \frac{1}{2} m v^2 + V(x) =$

$$= \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} + V(x)$$

$$\hat{E} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \frac{d^2}{dx^2} + V(x). = \hat{H}$$ – Hamilton-operátor

$\hat{H}\ \varphi(x) = E\ \varphi(x)$

potenciálfüggvény - minden probléma esetén más

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + V(x)\cdot\varphi(x) = E\ \varphi(x)}$$

- másodrendű lineáris diffegyenlet

Schrödinger - egyenlet

E - energiák, amiket mérés során megkapunk

$\varphi(x) = ?$ - sajátfüggvény
hullámfüggvény
állapotfüggvény

$\varphi(x)$ - közvetlen fizikai értelme nincs, belőle képzett fizikai mennyiségnek van

<u>Megtalálási valószínűséget írja le</u>

N mérés N_{szoba} - ennyiszer találom a részecskét a szobában

$$P + P_{nemsz} = 1 \begin{cases} P = \dfrac{N_{szoba}}{N} & \text{- valsg, hogy a szobában van} \\ P_{nemszoba} = \dfrac{N - N_{szoba}}{N} \end{cases}$$

$$\boxed{P \equiv \int_V |\varphi(x)|^2\, dx}$$

- annak a valsége, hogy V térfogatban találom a részecskét

$$\boxed{1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2\, dx}$$

- mert valahol van a részecske

$$\varphi_1(x) \longrightarrow k\,\varphi_1(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| k\,\varphi_1(x) \right|^2 dx = k^2$$

$\varphi_2(x)$ - egy megoldás $\quad \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_2|^2\, dx = A \neq 1$

$$\varphi_2(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{A}}\,\varphi_2(x)$$