1. feladat (5+9=14 pont)
a) Adja meg $x_0 \in \mathbb{R}$ esetén $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ definícióját! (x_0 az f értelmezési tartományának torlódási pontja.)
b) A definíció alapján lássa be, hogy $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{4x+5} = 3$.

Mo. a) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ esetén $|f(x) - A| < \varepsilon$. **(5p)**
b) Legyen $\varepsilon > 0$.

$$|\sqrt{4x+5}-3| \overset{\textbf{(3p)}}{=} \left|\frac{4x+5-9}{\sqrt{4x+5}+3}\right| \overset{\textbf{(2p)}}{<} \frac{4|x-1|}{3} < \varepsilon \overset{\textbf{(2p)}}{\Longleftarrow} |x-1| < \frac{3\varepsilon}{4}$$

vagyis $\delta(\varepsilon) \overset{\textbf{(2p)}}{=} \dfrac{3\varepsilon}{4}$.

---

2. feladat (16 pont)
Adja meg az $z^4-(1-2i)z^2-i-1 = 0$ egyenlet összes megoldását exponenciális alakban!

Mo. $\dfrac{1-2i+\sqrt{(1-2i)^2+4i+4}}{2} = \dfrac{1-2i+\sqrt{1}}{2}$ **(5p)** , vagyis $z^2 \overset{\textbf{(1p)}}{=} -i \overset{\textbf{(2p)}}{=} e^{-i\frac{\pi}{2}}$ vagy $z^2 \overset{\textbf{(2p)}}{=} 1-i \overset{\textbf{(2p)}}{=} \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, vagyis $z_1 \overset{\textbf{(1p)}}{=} e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $z_2 \overset{\textbf{(1p)}}{=} e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z_3 \overset{\textbf{(1p)}}{=} \sqrt[4]{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}$, $z_4 \overset{\textbf{(1p)}}{=} \sqrt[4]{2}e^{i\frac{7\pi}{8}}$.

---

3. feladat (10+10+10=30 pont)
Számolja ki az alábbi sorozatok határértékét:

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{n^3+3n}{3n^2+5}}, \qquad b_n = \sqrt{4n^2+3n-4}-2n, \qquad c_n = \left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n}.$$

Mo.

$$\frac{n}{8} = \frac{n^3}{3n^2+5n^2} \le \frac{n^3+3n}{3n^2+5} \le \frac{n^3+3n^3}{3n^2} = \frac{4n}{3} \textbf{(6p)}$$

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{\frac{1}{8}} \le a_n \le \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{\frac{4}{3}} \to 1. \qquad \textbf{(3p)}$$

Így a rendőrelv miatt $a_n \to 1$. **(1p)**

$$b_n \overset{(\mathbf{4p})}{=} \frac{4n^2+3n-4-4n^2}{\sqrt{4n^2+3n-4}+2n} \overset{(\mathbf{4p})}{=} \frac{3-\frac{4}{n}}{\sqrt{4+\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}}+2} \overset{(\mathbf{1p})}{\to} \frac{3}{2+2} \overset{(\mathbf{1p})}{=} \frac{3}{4}.$$

$$c_n \overset{(\mathbf{6p})}{=} \left(\frac{\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{3n}}{\left(1+\frac{2}{3n}\right)^{3n}}\right)^{\frac{2}{3}} \overset{(\mathbf{2p})}{\to} \left(\frac{e^{-1}}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}} \overset{(\mathbf{2p})}{=} e^{-2}$$

---

4. feladat (20 pont)
Adja meg az alábbi sorozatok torlódási pontjainak halmazát, limesz szuperiorját, illetve limesz inferiorját. Létezik-e határérték?

$$a_n = \frac{n!+n^9}{9^n+(-n)^n}, \qquad b_n = \frac{9^n+(-n)^n}{n!+n^9}$$

Mo.

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n!}{n^n} \cdot \dfrac{1+\frac{n^9}{n!}}{\left(\frac{9}{n}\right)^n+1} \to 0, & \text{ha } n \text{ páros} \\[2ex] \dfrac{n!}{n^n} \cdot \dfrac{1+\frac{n^9}{n!}}{\left(\frac{9}{n}\right)^n-1} \to 0, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases} \qquad (\mathbf{6p})$$

A sorozat egyetlen torlódási pontja a 0 **(1p)** , vagyis $\limsup a_n = \liminf a_n = 0 = \lim a_n$ **(3p)** .

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{n^n}{n!} \cdot \dfrac{\left(\frac{9}{n}\right)^n+1}{1+\frac{n^9}{n!}} \to \infty, & \text{ha } n \text{ páros} \\[2ex] \dfrac{n^n}{n!} \cdot \dfrac{\left(\frac{9}{n}\right)^n-1}{1+\frac{n^9}{n!}} \to -\infty, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases} \qquad (\mathbf{6p})$$

A sorozat torlódási pontjainak halmaza $\{-\infty, \infty\}$ **(1p)** , vagyis $\limsup b_n = \infty$, **(1p)** $\liminf b_n = -\infty$ **(1p)** , így a sorozat nem konvergens **(1p)** .

---

5. feladat (20 pont)
Hol folytonos, hol és milyen típusú szakadása van a következő függvénynek?

$$f(x) = \frac{\sin(x+2)}{|x^2-x-6|}$$

A szakadási helyeken határozza meg a függvény bal és jobb oldali határértékét!

Mo. $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$ **(2p)** , tehát $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$ **(1p)** . A függvény folytonos az értelmezési tartományának minden pontjában **(2p)** , mert folytonos függvények hányadosa, és a nevező nem nulla.

$$\lim_{x\to -2\pm 0} f(x) = \lim_{x\to -2\pm 0} \frac{\sin(x+2)}{|x+2|} \cdot \frac{1}{|x-3|} \textbf{(2p)} = \lim_{x\to -2\pm 0} \underbrace{\frac{\sin(x+2)}{\pm(x+2)}}_{\to \pm 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{|x-3|}}_{\to \frac{1}{5}} \textbf{(3p)} =$$

$\pm\dfrac{1}{5}$ **(1p)** , tehát a függvénynek a -2 pontban véges ugrás típusú szakadása van **(2p)** .

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \underbrace{\frac{\sin(x+2)}{|x+2|}}_{\to \frac{\sin(5)}{5} < 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{|x-3|}}_{\to +\infty} = -\infty$$

(5p) , azaz a 3 pontban a bal és a jobb oldali határérték is $-\infty$, így itt függvénynek másodfajú szakadása van **(2p)** .

---

6. feladat (10 pont, IMSC-seknek javasolt.)
Legyen N pozitív természetes szám! Adja meg az $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{k\pi}{N}$ sorozat torlódási pontjait! (Segítség: Határozza meg a_{2N} értékét!)

Mo. $a_{2N} = 0$ **(2p)** . Indoklás: Az origó középpontú egységkörbe írt szabályos $2N$ szög csúcsaiba mutató vektorok összege az elrendezés szimmetriája miatt a nullvektor, és $2N \cdot a_{2N}$ éppen ezen vektorok vízszintes koordinátáinak összege. **(3p)**

Hasonlóan igazolható, hogy ha n a $2N$ többszöröse, akkor $a_n = 0$. **(2p)**

Így ha $n = \alpha 2N + \beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $\beta < 2N$), akkor

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{N}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\beta} \cos\left(\frac{k\pi}{N}\right) \qquad \text{ezért} \qquad |a_n| \le \frac{2N}{n} \to 0.$$

Tehát az (a_n) sorozat konvergens, határértéke 0 **(2p)** , így egyetlen torlódási pontja a 0 **(1p)** .

Az a_n képletében szereplő összegzés el is végezhető, ha észrevesszük, hogy $\cos\frac{k\pi}{N} = \mathrm{Re}(q^k)$, $q = e^{i\frac{\pi}{N}}$ mellett, tehát na_n egy q hányadosú, n tagú mértani sor összegének valós része, így $a_n = \frac{1}{n}\mathrm{Re}\left(q\frac{1-q^n}{1-q}\right)$. Innen is megkapható, hogy $|a_n| \le \frac{1}{n}\left|q\frac{1-q^n}{1-q}\right| \le \frac{2}{n|1-q|} \to 0$.
