Kónya

ANALÍZIS(2) — **VIZSGADOLGOZAT** — **2006. június 8.**

Mérnök Informatikus szak — B kurzus — Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (21 pont)

a) Írja fel az n-edrendű állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet általános alakját és a hozzá tartozó karakterisztikus egyenletet!
Hogyan kapunk valós megoldásokat konjugált komplex gyökök esetén? (Levezetés.)

b)

$$y'' - 2y' + 5y = 5x + 8e^x, \qquad y(x) = ?$$

a) A de.: $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad a_i \in \mathbb{R}$ 2

10 Karakterisztikus egyenlet: $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$ 2

Pl.: $\lambda_1 = \alpha + j\beta, \quad \lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \alpha - j\beta$: a két gyök

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+j\beta)x} = e^{\alpha x}e^{j\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + j\sin\beta x) \\ Y_2 &= e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-j\beta)x} = e^{\alpha x}e^{j(-\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - j\sin\beta x) \end{aligned}\right\}$$ megoldások, de nem valósak

Mint tudjuk Y_1 és Y_2 tetszőleges lineáris kombinációja is megoldás.

$$\left.\begin{aligned} Y_1^* &:= \tfrac{Y_1+Y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x \; (= \operatorname{Re} e^{\lambda_1 x}) \\ Y_2^* &:= \tfrac{Y_1-Y_2}{2j} = e^{\alpha x}\sin\beta x \; (= \operatorname{Im} e^{\lambda_1 x}) \end{aligned}\right\}$$ Ezek is lineárisan függetlenek. Ezekre cseréljük le Y_1, Y_2-t. 6

Tehát látjuk, hogy Y_1^*, illetve Y_2^* az Y_1 valós és képzetes része.
(Többszörös komplex gyökök esetén Y_1^*, Y_2^* szorzandó x-szel, x^2-tel, x^3-nel, stb.)

b.) H: $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = 1 \pm j2$

11 $y_H = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x$ 5

$$\begin{array}{r|l} 5\cdot & y_{ip} = Ax + B + Ce^x \\ -2\cdot & y_{ip}' = A + Ce^x \\ 1\cdot & y_{ip}'' = Ce^x \end{array}$$

$5Ax + (5B - 2A) + e^x(5C - 2C + C) = 5x + 8e^x$

$5A = 5 \Rightarrow A = 1 \qquad 4C = 8 \Rightarrow C = 2$

$5B - 2A = 0 \Rightarrow B = \frac{2}{5}$

$y_{ip} = x + \frac{2}{5} + 2e^x$ 4

$y_{ia} = y_H + y_{ip} = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x + x + \frac{2}{5} + 2e^x$ 2

an2 v060608/1.

2. feladat (9 pont)

Adja meg az alábbi hatványsorok konvergencia sugarait!

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{3^{2n+1}} x^n \qquad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{3^{2n+1}} x^{2n}$$

a.) $a_n = \frac{(-1)^n n^2}{3 \cdot 9^n}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{\sqrt[n]{3} \cdot 9} = \frac{1}{9} = \frac{1}{R_a} \Rightarrow R_a = 9$ 5

b.) $u := x^2$: $\sum \frac{(-1)^n n^2}{3^{2n+1}} u^n$ visszavezethük a.)-ra

$-9 < u < 9$

$-9 < x^2 < 9 \Rightarrow |x| < 3 \Rightarrow R_b = 3$ 4

3. feladat (17 pont)

a) Ismertesse a binomiális sort!
b) Mennyi a sor konvergencia sugara? Állítását bizonyítsa be!
c)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{1-2x^2}}$$

Adja meg az f függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorát és annak konvergencia sugarát!

a.) $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \qquad \alpha \neq -1$ 3

b.) $R = 1$ 1

B $\quad a_k = \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$

$$a_{k+1} = \binom{\alpha}{k+1} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(\alpha-k)}{(k+1)!} = \binom{\alpha}{k}\frac{\alpha-k}{k+1}$$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right| = \left|\frac{\frac{\alpha}{k}-1}{1+\frac{1}{k}}\right| \xrightarrow[\infty]{k} |-1| = 1 = \frac{1}{R} \Longrightarrow R = 1$$ 7

c.) $f(x) = (1 + (-2x^2))^{-\frac{1}{4}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/4}{n}(-2x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/4}{n}(-2)^n x^{2n}$ 4

$|-2x^2| < 1 \Rightarrow |x|^2 < \frac{1}{2} \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow R = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 2

an2 v060608/2.

14 10:12AM

4. feladat (12 pont)

$$f(x,y)=\frac{y^3+1}{x^4+1}$$

Adja meg a $P_0(1,1)$ pontban a maximális iránymenti derivált irányát és értékét!

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= (y^3+1)\,\frac{-4x^3}{(x^4+1)^2}\\ f'_y &= \frac{1}{x^4+1}\cdot 3y^2\end{aligned}\right\}\ (4)$$

$\operatorname{grad} f(P_0) = -2\underline{i} + \frac{3}{2}\underline{j}$ (2)

$\max \left.\frac{df}{de}\right|_{P_0} = |\operatorname{grad} f(P_0)| = \sqrt{4+\frac{9}{4}} = \frac{5}{2}$ (3)

Akkor kapjuk, ha

$\underline{e} = \frac{\operatorname{grad} f(P_0)}{|\operatorname{grad} f(P_0)|} = \frac{-2}{\frac{5}{2}}\underline{i} + \frac{3/2}{5/2}\underline{j} = -\frac{4}{5}\underline{i} + \frac{3}{5}\underline{j}$ (3)

5. feladat (10 pont)*

$$f(x,y)=2x^3-6x+7+y^2-12y$$

Keresse meg a függvény lokális szélsőértékeit!

$f'_x = 6x^2-6$; $f'_y = 2y-12$ (2)

$\left.\begin{aligned} f'_x&=0\\ f'_y&=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow x=\pm 1,\ y=6$

$P_1(1,6)$ és $P_2(-1,6)$ pontokban lehet lokális szé. (3)

$D(x,y) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy}\\ f''_{yx} & f''_{yy}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12x & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix} = 24x$ (2)

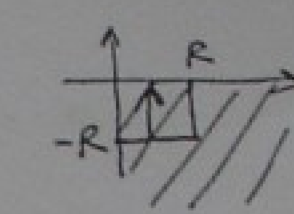
$D|_{P_1} > 0$, $f''_{xx}(P_1) > 0 \Rightarrow P_1$-ben lokális min. van

$D|_{P_2} < 0 \Rightarrow P_2$-ben nincs lok. szé. (3)

6. feladat (9 pont)*

$$\iint_T e^{2y-3x}\,dT = ? \qquad T:\ x\ge 0,\ \ y\le 0$$

$I = \lim_{R\to\infty} \underbrace{\int_0^R \int_{-R}^0 e^{2y}\,e^{-3x}\,dy\,dx}_{I_R}$ (3)



$I_R = \int_0^R e^{-3x}\left.\frac{e^{2y}}{2}\right|_{y=-R}^{0} dx = \frac{1}{2}(1-e^{-2R})\left.\frac{e^{-3x}}{-3}\right|_0^R =$

$= \frac{1}{2}(1-e^{-2R})\,\frac{-1}{3}\,(e^{-3R}-1)$ (4)

$I = \lim_{R\to\infty} \frac{-1}{6}(1-\underset{\downarrow\, 0}{e^{-2R}})(\underset{\downarrow\, 0}{e^{-3R}}-1) = \frac{1}{6}$ (2)

7. feladat (12 pont)*

Határozza meg a $\beta > 0$ paraméter értékét úgy, hogy az

$$u = e^{2x}\cos(\beta y) + x^3 - 3xy^2 = \operatorname{Re} f$$

legyen, ahol f reguláris a komplex síkon!

Im f meghatározása nélkül adja meg $f'\left(1+j\frac{\pi}{2}\right)$ értékét!

$\Delta u \equiv 0$ -nak kell teljesülni (2)

$u'_x = 2e^{2x}\cos\beta y + 3x^2 - 3y^2$

$u''_{xx} = 4e^{2x}\cos\beta y + 6x$

$u'_y = -\beta e^{2x}\sin\beta y - 6xy$

$u''_{yy} = -\beta^2 e^{2x}\cos\beta y - 6x$

$\Delta u = (4-\beta^2)e^{2x}\cos\beta y \equiv 0$ (4) $\Longrightarrow \beta = \pm 2$ (1) $(\beta > 0)$

$f'(1+j\frac{\pi}{2}) = u'_x(1,\frac{\pi}{2}) + j\,\underbrace{v'_x(1,\frac{\pi}{2})}_{=-u'_y(1,\frac{\pi}{2})\ (2)}$ (2)

$f'(1+j\frac{\pi}{2}) = -2e^2 + 3(1-\frac{\pi^2}{4}) - j(-3\pi)$ (1)

8. feladat (10 pont)*

a) Hogyan számoljuk ki $\ln z$, illetve $\operatorname{Ln} z$ értékét?
b) Oldja meg az

$$e^{jz} + j3 = 0$$

egyenletet! (z értékét algebrai alakban adja meg!)

a) 4

$\ln z = \ln|z| + j \operatorname{arc} z$ $\quad -\pi \le \operatorname{arc} z < \pi$

$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + j(\operatorname{arc} z + 2k\pi)$ ④

b) 6

$e^{jz} + j3 = 0 \Rightarrow jz = \operatorname{Ln}(-3j) = \ln 3 + j\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ ③ ②

$-3j$

$\Rightarrow z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi - j\ln 3$ ①

$\frac{1}{j} = -j$

Pótfeladat (csak az elégséges és a közepes vizsgaeredményhez javítjuk ki):

9. feladat (8 pont)

Adja meg az alábbi differenciálegyenlet összes megoldását!

$$y' = x(2x^2+1)^5 (y^2+2)$$

$$\frac{dy}{dx} = x(2x^2+1)^5 (y^2+2)$$

$$\int \frac{dy}{y^2+2} = \int x(2x^2+1)^5 \, dx \quad ②$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{dy}{1+\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{4}\int \underbrace{4x}_{f'}\, \underbrace{(2x^2+1)^5}_{f^5} dx$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{4}\,\frac{(2x^2+1)^6}{6} + C$$

② ③ ①

10. feladat (12 pont)

Írja fel az alábbi függvény megadott x_0 pontra támaszkodó Taylor sorát és adja meg a so[...] konvergenciatartományát!

a) $f(x) = \frac{1}{3+6x^2}$, $x_0 = 0$ b) $g(x) = \frac{1}{5-x}$, $x_0 = 2$

A *-gal jelölt feladatokból legalább 15 pontot el kell érni!

Felhasználjuk, hogy

$$\frac{a}{1-q} = a(1+q+q^2+\dots) = \sum_{n=0}^{\infty} a q^n \; ; \; |q|<1$$

a.) $f(x) = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-(-2x^2)} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-2x^2)^n = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^{2n}$

K.T: $|-2x^2| = 2|x|^2 < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ②

b.) $g(x) = \frac{1}{3-(x-2)} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{x-2}{3}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-2}{3}\right)^n =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} (x-2)^n \quad ④$$

KT: $\left|\frac{x-2}{3}\right| < 1 \Rightarrow |x-2| < 3$ ②