

1. (12 pont)

Határozza meg a következő sorozatok határértékét!

a)  $a_n = \sqrt{n^2 + 3n + 2} - \sqrt{n^2 + 1}$ ,

b)  $b_n = \left(\frac{2n+2}{5n+1}\right)^n$ .

2. (8 pont)

(a) Írja le a  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  numerikus sor összegének definícióját!

(b) Határozza meg a következő sor összegét!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{5^{2n}} = ?$$

3. (13 pont)

(a) Mit értünk a  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  kifejezésen?

Írja le a függvény határértékének definícióját! ( $x_0 \in D_f \subset \mathbb{R}$ ,  $A \in \mathbb{R}$ )

Határozza meg a következő határértékeket!

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x^2} = ?$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \arctg\left(\frac{\operatorname{ch}(x-2)}{(x-2)^2}\right) = ?$$

4. (11 pont)

(a) Ismertesse Rolle tételét!

(b) Mondja ki, és a Rolle-tétel felhasználásával bizonyítsa be a Lagrange-féle középértéktételt!

5. (16 pont)

$$f(x) = x^2 e^{2x-5}$$

(a) Írja fel az  $x_0 = 2$  pontbeli érintő egyenes egyenletét!

(b) Határozza meg azokat a legbővebb intervallumokat, ahol  $f$  monoton növény, illetve csökkenő! Hol vannak  $f$ -nek lokális szélsőértékei?

(c) Határozza meg azokat a legbővebb intervallumokat, ahol  $f$  konvex, illetve konkáv! Hol vannak  $f$ -nek inflexiós pontjai?

6. \* (16 pont)

Számolja ki a következő határozott integrálok értékét!

a)  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{9 - (2x+1)^2}} dx = ?$

b)  $\int_0^2 x e^{2x} dx = ?$

7. \* (12 pont)

Határozza meg a  $t = \sqrt{x}$  helyettesítéssel a következő határozatlan integrált! ( $x \geq 0$ )

$$\int \frac{1}{x + 5\sqrt{x} + 6} dx = ?$$

8. \* (12 pont)

(a) Írja le az integrálszámítás II. alaptételét!

(A tétel az integrálfüggvény tulajdonságairól szól.)

(b) Határozza meg a következő határértéket!

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sh} t \cdot \operatorname{tgt} t dt}{x^2} = ?$$

Pótfeladat (csak az elégséges vizsgához javítjuk ki):

9. (10 pont)

(a)

$$\frac{d}{dx} \left( (1 + x^2)^{\sin x} \right) = ?$$

(b) Konvergencia-e a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3n}{2n^5 + 7}$  numerikus sor?