2. vizsga

A vizsga időtartama 100 perc. Számológépet lehet használni. Amennyiben egy feladat máshogy nem rendelkezik, a számszerű végeredményeket 4 tizedesjegyre kerekítsük, vagy normál tört alakban adjuk meg. Minden feladat 10 pontot ér. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. A vizsga első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

1. Egy zsákban 3 kocka van, ezek közül 2 cinkelt. Az egyik cinkelten a hatos valószínűsége 1/3, a másikon 1/4. Kihúzunk egy kockát véletlenszerűen (minden kockát azonos valószínűséggel választunk). Feltéve, hogy a választott kockával ötször dobva pontosan kétszer dobtunk hatost, mennyi az esélye, hogy a kocka szabályos?

2. Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását tartalmazza az alábbi táblázat, amelyből két érték hiányzik. Határozzuk meg a hiányzó értékeket és az X ill. Y változók (perem)eloszlásait, ha tudjuk, hogy $\mathbb{P}(XY > 0) = 7/10$.

Y \ X	0	1	2
1			1/10
2	1/5	2/15	2/5

3. Egyenletesen véletlenszerűen választunk egymástól függetlenül két számot, egyiket a $[-2; 1]$, másikat a $[-1; 2]$ intervallumon. Mi a valószínűsége, hogy a két szám szorzata pozitív?

4. Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye
$$f_X(t) = \begin{cases} \alpha(t - t^3), & \text{ha } t \in (0; 1) \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$
ahol $\alpha \in \mathbb{R}$ egy valós szám. Határozzuk meg α értékét, továbbá az X eloszlásfüggvényét és várható értékét.

5. Az X normális eloszlású valószínűségi változóról tudjuk, hogy a sztenderdizáltja $2X - 1$. Határozzuk meg az $Y = 4X + 3$ változó eloszlását, és számoljuk ki a $\mathbb{P}(Y > 2)$ valószínűséget.

6. Egy normális eloszlású, ismeretlen szórású, 16 elemű minta alapján 95%-os szignifikanciaszintű konfidenciaintervallumot számoltunk a háttéreloszlás várható értékére, és eredményül a $(-0{,}631; 3{,}631)$ intervallumot kaptuk. Határozzuk meg az ugyanezen mintához tartozó 99%-os szignifikanciaszintű konfidenciaintervallumot is a várható értékre. (Elegendő három tizedesjegyre kerekített értékeket megadni.)

Eloszlás neve	Jelölés	ran$X$	$F_X(t)$	$f_X(k)$, $f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
indikátor	$\mathbf{1}(p)$	$\{0, 1\}$		$1 - p$, p	p	$p(1 - p)$
binomiális	$B(n; p)$	$\{0, 1, \ldots, n\}$		$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$	np	$np(1 - p)$
geometriai	$Geo(p)$	$\mathbb{N}^+$		$(1 - p)^{k-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
egyenletes	$U(a; b)$	$(a; b)$	$\frac{t-a}{b-a}$ (ha $t \in (a;b)$)	$\frac{1}{b-a}$ (ha $t \in (a;b)$)	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
exponenciális	$Exp(\lambda)$	$[0; \infty)$	$1 - e^{-\lambda t}$ (ha $t \in (0;\infty)$)	$\lambda e^{-\lambda t}$ (ha $t \in (0;\infty)$)	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
normális	$N(\mu; \sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2

A Student-eloszlás kvantiliseinek táblázata

	Szignifikanciaszint $(1-\varepsilon)$				
Szabadsági fok	**0,9**	**0,95**	**0,98**	**0,99**	**0,999**
1	**6,314**	**12,706**	**31,821**	**63,657**	**636,619**
2	**2,920**	**4,303**	**6,965**	**9,925**	**31,599**
3	**2,353**	**3,182**	**4,541**	**5,841**	**12,924**
4	**2,132**	**2,776**	**3,747**	**4,604**	**8,610**
5	**2,015**	**2,571**	**3,365**	**4,032**	**6,869**
6	**1,943**	**2,447**	**3,143**	**3,707**	**5,959**
7	**1,895**	**2,365**	**2,998**	**3,499**	**5,408**
8	**1,860**	**2,306**	**2,896**	**3,355**	**5,041**
9	**1,833**	**2,262**	**2,821**	**3,250**	**4,781**
10	**1,812**	**2,228**	**2,764**	**3,169**	**4,587**
11	**1,796**	**2,201**	**2,718**	**3,106**	**4,437**
12	**1,782**	**2,179**	**2,681**	**3,055**	**4,318**
13	**1,771**	**2,160**	**2,650**	**3,012**	**4,221**
14	**1,761**	**2,145**	**2,624**	**2,977**	**4,140**
15	**1,753**	**2,131**	**2,602**	**2,947**	**4,073**
16	**1,746**	**2,120**	**2,583**	**2,921**	**4,015**
17	**1,740**	**2,110**	**2,567**	**2,898**	**3,965**
18	**1,734**	**2,101**	**2,552**	**2,878**	**3,922**
19	**1,729**	**2,093**	**2,539**	**2,861**	**3,883**
20	**1,725**	**2,086**	**2,528**	**2,845**	**3,850**
21	**1,721**	**2,080**	**2,518**	**2,831**	**3,819**
22	**1,717**	**2,074**	**2,508**	**2,819**	**3,792**
23	**1,714**	**2,069**	**2,500**	**2,807**	**3,768**
24	**1,711**	**2,064**	**2,492**	**2,797**	**3,745**
25	**1,708**	**2,060**	**2,485**	**2,787**	**3,725**
26	**1,706**	**2,056**	**2,479**	**2,779**	**3,707**
27	**1,703**	**2,052**	**2,473**	**2,771**	**3,690**
28	**1,701**	**2,048**	**2,467**	**2,763**	**3,674**
29	**1,699**	**2,045**	**2,462**	**2,756**	**3,659**
30	**1,697**	**2,042**	**2,457**	**2,750**	**3,646**
40	**1,684**	**2,021**	**2,423**	**2,704**	**3,551**
50	**1,676**	**2,009**	**2,403**	**2,678**	**3,496**
60	**1,671**	**2,000**	**2,390**	**2,660**	**3,460**
80	**1,664**	**1,990**	**2,374**	**2,639**	**3,416**
100	**1,660**	**1,984**	**2,364**	**2,626**	**3,390**
500	**1,648**	**1,965**	**2,334**	**2,586**	**3,310**

A sztenderd normális eloszlás eloszlásfüggvényének táblázata

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998