Elektromágneses terek (VIHVA204) **2010.06.04.**

Név: Javítási példány	Pontszám:	Javító:
NEPTUN:	10	EVT
Aláírás:		

Feladatonként 1 pont szerezhető. Csak a végeredményt írja rá a feladatlapra!

1. Egy gömbszimmetrikus töltéseloszlást a $\rho(r)$ térfogati töltéssűrűség-függvény ír le, ahol r a töltésfelhő középpontjától mért távolság. A közeg homogén, $\varepsilon_r = 1$. Tudjuk, hogy az elektromos térerősség nagyságát felírhatjuk $E(r) = f(r)\int\limits_0^r \rho(\zeta)\zeta^2 d\zeta$ alakban. Adja meg az $f(r)$ függvényt!

$$f(r) = \frac{1}{\varepsilon_0 r^2}$$

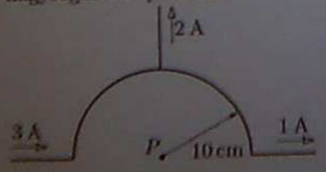
2. Egy végtelen hosszú, egyenes vonaltöltéstől d távolságban az elektromos térerősség nagysága E. Fejezze ki a vonaltöltéstől $2d$ és $3d$ távolságra lévő pontok közötti U feszültséget!

$$U = Ed\ln\frac{3}{2} = 0{,}4055Ed$$

3. A $z = 0$ sík a teret két különböző vezetőképességű anyaggal kitöltött féltérre osztja: $\sigma = \sigma^+$, ha $z > 0$ és $\sigma = \sigma^-$, ha $z < 0$. Az egyes félterekben az áramsűrűség homogén. A $z > 0$ féltérben: $\mathbf{J}^+ = J_x^+\mathbf{e}_x + J_z^+\mathbf{e}_z$. Írja fel az áramsűrűséget a $z < 0$ féltérben!

$$\mathbf{J}^- = \frac{\sigma^-}{\sigma^+}J_x^+\mathbf{e}_x + J_z^+\mathbf{e}_z$$

4. Az ábrán látható vékony, félkör alakú vezetőhöz igen hosszú, egyenes vezetők csatlakoznak. A teljes elrendezés egy síkban fekszik. Határozza meg a mágneses térerősség nagyságát a P pontban!



$$H = 5\,\mathrm{A/m}$$

5. $75\,\Omega$ hullámimpedanciájú, l hosszúságú, rövidrezárt végű, ideális távvezetékcsonk bemeneti impedanciája $-j100\,\Omega$. A vezetéken mért hullámhossz Λ. Adja meg az l/Λ arány legkisebb lehetséges értékét!

$$l/\Lambda = 0{,}3524$$

6. Homogén, $0{,}5\,\mathrm{T}$ indukciójú mágneses térben egy $2\,\mathrm{m}^2$ felületű, zárt, sík vezetőkeret forog az indukcióvonalakra merőleges tengely körül, állandó $20\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ szögsebességgel. A vezetőkeret ellenállása $10\,\Omega$, a vezetőkeretben folyó áram mágneses tere elhanyagolható. Adja meg a vezetőkeretben disszipált teljesítmény időátlagát!

$$P = 20\,\mathrm{W}$$

7. Hosszú, egyenes, kör keresztmetszetű vezető sugara r. A vezetőben nagyfrekvenciás szinuszos áram folyik, a behatolási mélység $\delta \ll r$. A vezető felszínén az elektromos térerősség amplitúdója E_0, kezdőfázisa $0\,\mathrm{rad}$. A vezetőben, annak felszínétől h távolságban, az elektromos térerősség amplitúdója $E_0/2$. Mekkora ugyanitt az elektromos térerősség kezdőfázisa?

$$\varphi = -\ln 2 = -0{,}693$$

8. Vákuumban terjedő síkhullámban az elektromos térerősség komplex amplitúdója az $x = 0$ sík bármely pontjában $(5\mathbf{e}_y - 12\mathbf{e}_z)e^{j\pi/3}\,\mathrm{kV/m}$. Adja meg a mágneses térerősség komplex amplitúdóját az $x = 0$ síkban, ha a síkhullám a pozitív x irányba szállít hatásos teljesítményt!

$$\mathbf{H} = (31{,}83\mathbf{e}_y + 13{,}26\mathbf{e}_z)e^{j\pi/3}\,\mathrm{A/m}$$

9. Hertz-dipólus a gömbi koordinátarendszer origójában áll, a tengelye a $\vartheta = 0$ irányba mutat. A dipólus távolterében, r távolságban a teljesítménysűrűség a $\vartheta = \pi/4$ elevációs szög alatt $S_{\pi/4}(r)$. Fejezze ki az antenna által kisugárzott összes teljesítményt $S_{\pi/4}(r)$-rel, r-rel ill. az antenna D irányhatásával!

$$P = \frac{8r^2\pi S_{\pi/4}(r)}{D}$$

10. Egy négyszög keresztmetszetű csőtápvonalban egy adott módus esetén a fázisegyüttható kifejezése $\beta(\omega) = \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} - k^2}$, ahol $v = 2\cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ és $k = 5\,\frac{1}{\mathrm{m}}$. Határozza meg a hullámterjedés fázissebességét $\omega = 2kv$ körfrekvencián!

$$v_f = 2{,}31\cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

1, $E(r) = f(r) \int_0^r \rho(\xi)\,\xi^2\,d\xi \quad f(r) = ?$ Gauss tv.: $\oint_A \bar{D}\,d\bar{A} = \int_V \rho(r)\,dV$

$\bar{D}(r)\,4\cancel{r^2}\cancel{\pi} = \rho(r)\frac{4 r^{\cancel{3}}\cancel{\pi}}{3}$

$\bar{D}(r) = \frac{\rho(r)\cdot r}{3}$

$\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot\bar{E}(r) = \frac{\rho(r)\cdot r}{3}$

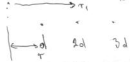
$\bar{E}(r) = \frac{\rho(r)\cdot r}{3\varepsilon_0\varepsilon_r}$

$\Downarrow$

$$f(r) = \frac{\bar{E}(r)}{\int_0^r \rho(\xi)(\xi)^2\,d\xi}$$

$$\int_0^r \rho(\xi)(\xi)^2\,d\xi = \left[\rho(\xi)\cdot\frac{\xi^3}{3}\right]_0^r = \rho(r)\,\frac{r^3}{3} - 0$$

$$f(r) = \frac{\dfrac{\rho(r)\cdot\cancel{r}}{\cancel{3}\,\varepsilon_0\,\varepsilon_r}}{\dfrac{r^{\cancel{3}2}}{\cancel{3}}} = \frac{\rho(r)}{\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\Bigg|_{\varepsilon_r=1} = \underline{\underline{\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}}}$$

2, 

$U = ?$

(vonalmenti) $\Rightarrow E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}\Big|_{r=d}$

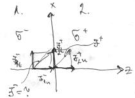
$\Downarrow$

$\frac{q}{2\pi\varepsilon_0} = E\cdot d$

$$U = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\ln\frac{r_2}{r_1} = \underbrace{\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}}_{E\cdot d}\cdot\ln\frac{3\cancel{d}}{2\cancel{d}}$$

$\Downarrow$

$$\underline{\underline{U = E\cdot d\cdot\ln\frac{3}{2}\ \ V}}$$

3, 

$\bar{J}^- = ?$

$\bar{J}^- = \bar{J}^-_{1t} + \bar{J}^-_{1n}$

$\bar{J}^+ = \bar{J}^+_x\bar{e}_x + \bar{J}^+_z e_z$

normális komponens:

$\bar{J}_{2n} = \bar{J}_{1n}\left(-\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \bar{J}^+_{2n} = \underline{\bar{J}^-_{1n} = \bar{J}^+_z\bar{e}_z} \\ \bar{J}^-_{1t} = \frac{\sigma^-}{\sigma^+}\cdot\bar{J}^+_{2t} = \frac{\sigma^-}{\sigma^+}\cdot\bar{J}^+_x\bar{e}_x \end{cases}$$

$\bar{E}_{1t} = \bar{E}_{2t} \quad \bar{J} = \sigma\cdot\bar{E}$

tangenciális komponens:

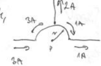
$\bar{J}^-_{1t} = \sigma^-\bar{E}^-_{1t} \Rightarrow \bar{E}^-_{1t} = \frac{\bar{J}^-_{1t}}{\sigma^-}$

$\bar{J}^+_{2t} = \sigma^+\bar{E}^-_{2t} \Rightarrow \bar{E}_{2t} = \frac{\bar{J}^+_{2t}}{\sigma^+}$ $=$

$\frac{\bar{J}^-_{1t}}{\sigma^-} = \frac{\bar{J}^+_{2t}}{\sigma^+} \Rightarrow \underline{\bar{J}^-_{1t} = \frac{\sigma^-}{\sigma^+}\cdot\bar{J}^+_{2t}}$

$\Downarrow$

$$\underline{\underline{\bar{J}^- = \frac{\sigma^-}{\sigma^+}\,\bar{J}_x\bar{e}_x + \bar{J}^+_z\bar{e}_z}}$$

4, 

$r = 10\ cm = 0,1\ m$

$H_E(P) = ?$

Az egyenes vezetők nem gerjesztenek teret, P pont a síkjukban van.

⇓

Biot-Savart

$H = \frac{I}{4\pi r}\int d\alpha$

$I_1 = 1A$

$I_2 = 3A$

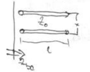
$H_E = H_1 + H_2$ (papír síkjából merőlegesen befelé mutat)

$$H_1 = \frac{I_1}{4\pi r}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha = \frac{I_1}{4\pi r}\left[\alpha\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{I_1}{4\pi r}\cdot\left[\frac{\pi}{2}-0\right] = \frac{I_1}{8r}$$

$$H_2 = \frac{I_2}{4\pi r}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\alpha = \frac{I_2}{4\pi r}\left[\alpha\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{I_2}{4\pi r}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{I_2}{8r}$$

$$H_E = \frac{1}{8r}(I_1+I_2) = 4A\cdot\frac{1}{8\cdot 0,1m} = \underline{\underline{5\,\frac{A}{m}}}$$

5, 1D. TV. l, $Z_0 = 75\Omega$ $Z_{be} = -j100\Omega$



TV. végén rövidzár ⇒ $Z_2 \to 0$ (⇒ $r = -1$) → TV lezáró impedancia

$$Z_{be} = Z_0\,\frac{Z_2\cos\beta l + Z_0 j\sin\beta l}{Z_0\cos\beta l + Z_2 j\sin\beta l}\Bigg|_{Z_2=0} = Z_0\cdot\frac{Z_0 j\sin\beta l}{Z_0\cos\beta l} =$$

$$= Z_0\, j\, tg\,\beta l$$

$Z_{be} = Z_0 j\, tg\,\beta l$ ⇒ $-j100 = 75 j\, tg\,\beta l$ ⇒ $tg\,\beta l = -\frac{100}{75} = -1,333$

$arctg\left(-\frac{100}{75}\right) = \beta l = -53,13°$ → nem lehet negatív ⇒ tg π periódusos ⇓ $+180°$

$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{360°}{\lambda}$ ⇒ $l\cdot\frac{360}{\lambda} = -53,13 + 180$

⇓

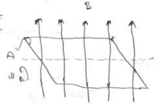
$$\frac{l}{\lambda} = \frac{-53,13+180}{360} = \underline{\underline{0,3524}}$$

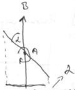
6, $B = 0{,}5\,T$ $\qquad P_{\text{disszipált}} = ?$

$A = 2\,m^2$ (zárt felület)

$\omega = 20\,\frac{rad}{s}$

$R = 10\,\Omega$





Faraday-féle indukciós tv.

$$U = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \qquad \phi = \int_A \bar{B}\, d\bar{A}$$

ha $\alpha = 0$ $A_n' = 0$
$\alpha = \frac{\pi}{2}$ $A_n' = A$ $\Big\}$ $\sin(\omega t)$

$$\phi = \int_A B \sin(\omega t)\, dA = B \sin(\omega t) \cdot \int_A dA = AB \sin(\omega t)$$

$$U = -\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\partial\, AB \sin(\omega t)}{\partial t} = -\left(-AB\omega \cos(\omega t)\right) = AB\omega \cos(\omega t)$$

$U(t) = AB\omega \cos \omega t$

$$P = \frac{1}{2}\frac{\hat{U}^2}{R} = \frac{(A \cdot B \cdot \omega)^2}{2R} = \frac{(0{,}5 \cdot 2 \cdot 20)^2}{2 \cdot 10} = \frac{400}{20} = \underline{\underline{20\,W}}$$

7,

$\delta \ll r$ (csak a palást kis környezetében folyik $\bar{J}$)

$E(z=0) = E_0$

$E(z=h) = E_0 e^{-\frac{h}{\delta}} \Rightarrow \frac{\cancel{E_0}}{2} = \cancel{E_0} e^{-\frac{h}{\delta}} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\frac{h}{\delta}} \Rightarrow \ln\frac{1}{2} = -\frac{h}{\delta}$

$\underbrace{E(z=h)}_{\frac{E_0}{2}}$

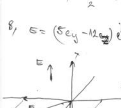
$h = -\delta \ln\frac{1}{2} = \delta \ln\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \boxed{\delta \ln(2)}$

$E(z=0) = E_0 \cos(\omega t)$

$E(z=h) = \frac{E_0}{2} \cos(\omega t \underbrace{-\beta h}_{\varphi})$

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi = -\beta h = \\ h = \delta \ln 2 = \\ \beta = \frac{1}{\delta} \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{1}{\delta} \cdot \delta \ln 2 = \underline{\underline{-\ln 2}} = \underline{\underline{-0{,}693}}$

8, $E = (5 e_y - 12 e_z)\, e^{j\frac{\pi}{3}}\ \frac{kV}{m}$ $\quad$ x irányba terjedő $\quad$ P-t szállít $\Rightarrow$ E és H fázisban vannak



$$H = \left(\frac{5}{Z_0}\bar{e}_z + \frac{12}{Z_0} e_y\right) e^{j\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \left(13{,}2\,\bar{e}_z + 31{,}8\,\bar{e}_y\right) e^{j\frac{\pi}{3}}\ \frac{A}{m}$$

$S = E \times H$

9, Hertz-dipól.

$\vartheta = \frac{\pi}{4}$

távolban I. Irányhatás: $D = \frac{S_{max}}{S_{átl}}$

II. $S_{átl} = \frac{\text{Kisugárzott teljesítmény}}{\text{gömbfelület}} = \frac{P}{4r^2\pi}$

$P\,S_{átl} = \oint_A S_{átl}\,dA$

↓

mert izotróp közeg van

⇓

∀ irányba

III. $S(r,\vartheta) = S_{max} \cdot \sin^2(\vartheta)$

↓

(mert $E \sin \cdot H \cdot \sin = EH \sin^2$)

$S_{max} = D \cdot S_{átl} \Rightarrow S(r,\vartheta) = D \cdot S_{átl} \cdot \sin^2(\vartheta) \Rightarrow S(r,\vartheta) = \frac{D \cdot P \cdot \sin^2(\vartheta)}{4r^2\pi}$

$\mathrm{I.} \curvearrowright \mathrm{III.}$ $\qquad \updownarrow \mathrm{II}$ $\qquad \Downarrow$

$$P = \frac{S(r,\vartheta) \cdot 4r^2\pi}{D \cdot \sin^2(\pi/4)} = \frac{8}{D} \cdot \frac{S(r,\vartheta)\, r^2\pi}{1}$$

10, $\beta(\omega) = \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} - \varepsilon^2}$ $\quad \omega = 2\pi\nu$ $\quad v = 2 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ $\quad \varepsilon = \frac{1}{5}\,m$

?