1, a, [6]

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{n+4}\cdot\frac{1}{3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\overbrace{2/n}^{\to 0}}{1+\underbrace{4/n}_{\to 0}}\cdot\overbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^n}^{\to 0} = \frac{1-0}{1+0}\cdot 0 = \underline{\underline{0}} \quad (3)$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 8^n}{64\cdot 8^n+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{64+3\cdot\underbrace{8^{-n}}_{\to 0}} = \underline{\underline{\frac{1}{32}}} \quad (3)$$

[7] b, $0 < a_n = \frac{n-2}{n+4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n < \frac{n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$, és

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n < \infty$, konvergens geometriai sor ($\left|\frac{1}{3}\right| < 1$), így

a majoráns kritérium értelmében $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ (konvergens.) (5)

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergens, mert nem teljesül a konvergencia szükséges

feltétele. ($\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$) (2)

2, a, [7]

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(3x^2)}{x\sin(2x)} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{" alak}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{6x}{\cos^2(3x^2)}}{\sin(2x)+2x\cos(2x)} = \quad (4)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{6}{\underbrace{\cos^2(3x^2)}_{\to 1}}\cdot\frac{1}{2\underbrace{\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right)}_{\to 1}+2\cdot\underbrace{\cos(2x)}_{\to 1}} = \frac{6}{2\cdot 1+2} = \frac{3}{2} \quad (3)$$

3, a, D.: $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, ha $\forall\varepsilon>0$ esetén $\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, hogy

[3] $|a_n - A| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$

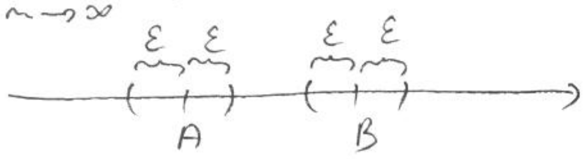
b, T.: Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, és $\lim_{n\to\infty} a_n = B$, akkor $A = B$.

[5] B.: Indirekt! T.f.h. $A \neq B$, legyen $\varepsilon = \frac{|A-B|}{3}$.

3/b, (folyt.)

$\lim_{n\to\infty} a_n = A$, tehát $a_n \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$, ha $n > N_1(\varepsilon)$

$\lim_{n\to\infty} a_n = B$, tehát $a_n \in (B-\varepsilon, B+\varepsilon)$, ha $n > N_2(\varepsilon)$



Így ha $n > \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$, akkor

$a_n \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon) \cap (B-\varepsilon, B+\varepsilon) = \emptyset$, ami ellentmondás,

tehát az állítást beláttuk.

c, T.: (Átviteli elv)

$\boxed{3}$ $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = A \iff \forall x_n \to x_0,\ x_n \in D_f,\ x_n \neq x_0 \quad \exists \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$

d, $x_n := \frac{\pi}{2} + 2n\pi \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, és $\sin x_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$

$\boxed{6}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \nparallel$

$y_n := -\frac{\pi}{2} + 2n\pi \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, és $\sin y_n = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = -1$

Mivel a két határérték különbözik, az átviteli elv értelmében nem létezik $\sin x$ határértéke a ∞-ben.

--- o ---

4, a, T.: (3) $\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = \frac{-f'(x_0)}{f^2(x_0)}$, ha f diff.-ható x_0-ban, és $f(x_0) \neq 0$.

$\boxed{6}$ B.: $\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0}$ (2) $= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{x-x_0}\left(\frac{f(x_0)-f(x)}{f(x)f(x_0)}\right) =$

$= \lim_{x\to x_0} (-1)\cdot \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\downarrow x\to x_0\ \ f'(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{1}{f(x)\cdot f(x_0)}}_{\downarrow x\to x_0\ \ f(x_0)}$ (2) $= \frac{-f'(x_0)}{f^2(x_0)}$ (2)

(f folytonos x_0-ban, mert diff.-ható is)

4/b, (folyt.)

[4] $\left(\frac{1}{ch(\operatorname{arctg}(4+x^2))}\right)' = \frac{-sh(\operatorname{arctg}(4+x^2)) \cdot \frac{1}{1+(4+x^2)^2} \cdot 2x}{ch^2(\operatorname{arctg}(4+x^2))}$

5, $f(x) = e^{+x^2-x}$

[10] $f'(x) = (2x-1)\underbrace{e^{x^2-x}}_{>0}$ (2) $= 0$, ha $x = \frac{1}{2}$

	$x<\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$x>1/2$
f'	$-$	0	+
f	↘	lok. min.	↗

f mon. csökken $(-\infty, \frac{1}{2}]$-en, (2)

f mon. nő $[\frac{1}{2}, \infty)$-en. (2)

$f''(x) = \underbrace{\left(2+(2x-1)^2\right)}_{\geq 2}\underbrace{e^{x^2-x}}_{>0}$ (2) > 0, tehát f konvex (2) $\mathbb{R}$-en.

6, a, Kétszer parciálisan integrálunk: (3)

[7] $I = \int \underset{u'}{e^{3x}} \underset{v}{\sin(2x)}\, dx = \frac{1}{3}e^{3x}\sin(2x) - \frac{2}{3}\int \underset{u'}{e^{3x}} \underset{v}{\cos(2x)}\, dx =$

$u = \frac{e^{3x}}{3}$; $v' = 2\cos(2x)$ $\qquad$ $u = \frac{e^{3x}}{3}$ $\quad v' = -2\sin(2x)$

$= \frac{1}{3}e^{3x}\sin(2x) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}e^{3x}\cos(2x) + \frac{2}{3}\underbrace{\int e^{3x}\sin(2x)\,dx}_{I}\right)$ (2)

$I\left(1+\frac{4}{9}\right) = \frac{1}{3}e^{3x}\sin(2x) - \frac{2}{9}e^{3x}\cos(2x)$

$I = \underbrace{\frac{9}{13}\cdot\frac{1}{3}}_{\frac{3}{13}} e^{3x}\sin(2x) \underbrace{-\frac{9}{13}\cdot\frac{2}{9}}_{-\frac{2}{13}} e^{3x}\cos(2x) + C$ (2)

---

b, Tudjuk, hogy $(\operatorname{arsh} t)' = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$, így

[4] $\int \frac{1}{\sqrt{3x^2+2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2+1}}\,dx = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}}_{\frac{1}{\sqrt{3}}}\operatorname{arsh}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right) + C$

6/G (folyt.)

[4] $\int \frac{2x}{\sqrt{3x^2+2}}\,dx = \frac{1}{3}\int 6x\cdot(3x^2+2)^{-1/2}\,dx = \frac{1}{3}\,\frac{(3x^2+2)^{1/2}}{1/2} + C = \underline{\underline{\frac{2}{3}\sqrt{3x^2+2}+C}}$

$f'\cdot f^{-1/2}$ alak

d, [9] Nevező: $x^3+2x^2 = x^2(x+2)$, így a parciális törtekre bontás:

$$\frac{5x^2+5x+2}{x^3+2x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+2} \quad (3) \quad = \frac{Ax(x+2)+B(x+2)+Cx^2}{x^2(x+2)}$$

$5x^2+5x+2 = Ax(x+2)+B(x+2)+Cx^2$; $x=0$-ban: $2=2B$; $\underline{B=1}$

$x=-2$-ben: $20-10+2=4C$; $\underline{C=3}$

$x=1$-ben: $5+5+2=3A+3\cdot 1+3$; $\underline{A=2}$ (3)

$$\int \frac{5x^2+5x+2}{x^3+2x^2}\,dx = \int\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x+2}\right)dx = \underline{\underline{2\ln|x| - \frac{1}{x} + 3\ln|x+2| + C}}$$ (3)

7, [8] $y^4+3y^5+2e^{3x-3}-(x-1)^3=0 \qquad (x_0,y_0)=(1,-1)$

Az (x_0,y_0) pont kielégíti az egyenletet: $1-3+2\cdot e^0-0^3=0$

$4y^3y'+15y^4y'+2\cdot 3e^{3x-3}-3(x-1)^2=0$ (3)

Az (x_0,y_0) helyen:

$-4y'(x_0)+15y'(x_0)+6-0=0$ (3) $\Longrightarrow y'(x_0) = -\frac{6}{11}$ (2)

$y'(x_0)\neq 0$, tehát a függvénynek nincs lokális szélsőértéke $x_0=1$-ben

---

8, [8] $\int_2^9 \frac{x}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx = \int_{\sqrt[3]{2-1}}^{\sqrt[3]{9-1}} \frac{t^3+1}{t}\cdot 3t^2\,dt$ (3) $= \int_1^2 (3t^4+3t)\,dt =$

$t=\sqrt[3]{x-1}$; $x=t^3+1$; $dx=3t^2\,dt$ (2)

$= 3\left[\frac{t^5}{5}+\frac{t^2}{2}\right]_1^2 = \underline{\underline{3\left(\frac{32}{5}+2-\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\right)}}$ (3) $= \frac{192+60-6-15}{10} = \frac{231}{10}$