Zh2
2009. 11. 30.
Vetier András kurzusa

1. Legyen X exponenciális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke $0,5$. Legyen $Y = X^2$. **(a)** Vezesse le Y sűrűségfüggvényének a képletét! *Utaljon rá, hogy a képlet mely tartományon érvényes!* **(b)** Számolja ki Y várható értékét!

   Megoldás:

   (a) Mivel X exponenciális eloszlású, és a várható értéke 1/2, ezért a paramétere 2. **(1 pont)**
   A $t(x) = x^2$ a $[0, \infty]$ intevallumon (ahol az exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye nem nulla) monoton növekedő, így a

   $$g(y) = f(t^{-1}(y)) \left(t^{-1}(y)\right)'$$

   képlet alkalmazható. Innen Y sűrűségére $g(y) = 0$, ha $y \leq 0$, és

   $$g(y) = 2e^{-2\sqrt{y}} \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{e^{-2\sqrt{y}}}{\sqrt{y}}$$

   ha $y > 0$ **(5 pont)**

   (b)

   $$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X^2),$$

   ami épp a 2 paraméterű exponenciális eloszlás második momentuma. Tanultuk, hogy ez $2/2^2 = 1/2$, de aki nem emlékezett, az két darab parciális integrálással megkaphatta. **(4 pont)**

2. X egyenletes eloszlású 0 és 1 között. Y feltételes eloszlása az $X = x$ feltétel mellett egyenletes eloszlás 0 és x^2 között. **(a)** Adja meg (X, Y) sűrűségfüggvényének a képletét! **(b)** Adja meg Y sűrűség- vagy eloszlásfüggvényének a képletét! *A **(b)** kérdésben Ön választhat, hogy melyiket adja meg. Utaljon rá, hogy a képletek mely tartományokon érvényesek!*

   Megoldás:

   (a)

   $$f_1(x) = 1 \qquad (0 < x < 1)$$

   (1 pont)

   $$f_{2|1}(y|x) = \frac{1}{x^2} \qquad (0 < y < x^2 < 1)$$

   (2 pont)

   $$f(x, y) = f_1(x) f_{2|1}(y|x) = \frac{1}{x^2} \qquad (0 < y < x^2 < 1)$$

   (3 pont)

(b)

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_{\sqrt{y}}^{1} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \left[\frac{-1}{x}\right]_{\sqrt{y}}^{1} = \frac{1}{\sqrt{y}} - 1 \qquad (0 < y < 1)$$

(4 pont)

3. Tegyük fel, hogy sarki boltban kapható kenyér súlya normális eloszlást követ σ szórással. Ellenőrizni akarjuk, hogy az "1 kg-os kenyér" súlyának a várható értéke 1 kg-e. Ezért megmérünk n darab kenyeret, és kiszámoljuk a súlyuk átlagát. 95 % -os szignifikancia szint mellett elfogadjuk-e, hogy a várható érték 1 kg, ha **(a)** $\sigma = 0,05$ kg, $n = 10$, és az átlag = 0,98 kg? **(b)** $\sigma = 0,05$ kg, $n = 100$, és az átlag = 0,98 kg?

   Néhány tény: $\Phi(0) = 0,50$; $\Phi(0,5) = 0,69$; $\Phi(1) = 0,84$; $\Phi(1,5) = 0,93$; $\Phi(2) = 0,98$; $\Phi(2,5) = 0,99$

   Megoldás:

   (a)

$$B = \Phi^{-1}\left(\frac{1+p}{2}\right) = \Phi^{-1}(0,975) \approx 2$$

$$b = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}B = \frac{0,05}{\sqrt{10}}2$$

   Azt vizsgáljuk, hogy $\hat{X} - \mu_0$ beleesik-e a $[-b; b]$ intervallumba. Most $\hat{X} - \mu_0 = 0.02$, b pedig alulról becsülhető $\frac{0,05}{4}2 = 0,025$-tel, tehát valóban, $\hat{X} - \mu_0 \in [-b; b]$, így elfogadjuk a nullhipotézist.

   (5 pont)

   (b) Ebben a részben csak az n, azaz a mintaelemszám változott. Tehát $B = 2$, és

$$b = \frac{0,05}{\sqrt{100}}2 = 0,01$$

   Mivel most a $0,02$ nem esik bele a $[-0,01; 0,01]$ intervallumba, ezért a nullhipotézist elutasítjuk.

   (5 pont)

4. Tanultuk, hogy a VARP, illetve a STDEVP utasítással egy adatrendszer varianciáját (szórásnégyzetét), illetve szórását közvetlenül ki lehet számítani. Vázolja jól érthetően, hogy hogyan lehet kiszámítni egy tíz adatból álló adatrendszeer szórását a VARP, STDEVP (és ezekhez hasonló) utasítások használata nélkül!

   Megoldás:

   A helyes megoldás az alábbi Excel fájlból kiolvasható:

   `20091130_zh2_vetier_4-ik_feladat_megoldasa`

   A megoldás pontozása:

   Az adatrendszer átlagának helyes kiszámolása (piros cella): **(2 pont)**

   Az átlagtól való eltérések négyzeteinek kiszámolása (zöld cellák): **(4 pont)**

   Az átlagtól való eltérések négyzetei átlagának (a varianciának) a kiszámolása (lila cella): **(2 pont)**

   Gyökvönás: (kék cella): **(2 pont)**

   Aki nem adatrendszerrel dolgozott, hanem eloszlással, 0 pontot kapott.