Megoldókulcs (α-változat)

(1.)

4p
A diffegyenlet elsőrendű inhomogén lineáris;
$*$: $y' = a(x)y + b(x)$ alakú ahol $\begin{cases} a(x) = \frac{2x}{x^2+1} \\ b(x) = 1 \end{cases}$

4p
Mivel $\int a(x)dx = \int \frac{2x}{x^2+1}dx = \ln(x^2+1) + \text{konst.}$,
a $*$ egyenlet homogén változatának a megoldása
$$y_H(x) = C\,e^{\ln(x^2+1)} = C(x^2+1)$$

4p
A konstans variálásának a módszerét alkalmazva a $*$ egyenlet megoldását
$$y(x) = C(x)\,(x^2+1)$$
alakban kerestük. A $*$-ba való visszahelyettesítés és egyszerűsítés után:
$$C'(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

4p
Innen $C(x) = \int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan(x) + C$, tehát
a megoldás általános alakja
$$y(x) = C(x)\,(x^2+1) = \boxed{\arctan(x)\,(x^2+1) + C\,(x^2+1)},$$
ahol C tetszőleges konstans. ■

(2.)

2p
A diffegyenlet másodrendű állandó együtthatós inhomogén lineáris; a homogén változat
H: $y_H'' + y_H' - 2y_H = 0$.

3p Ennek karakterisztikus egyenlete:

$$\underbrace{\lambda^2+\lambda-2}_{(\lambda+2)(\lambda-1)} = 0 \iff \lambda = 1, -2$$

Tehát $y_H(x) = C_1 e^x + C_{-2} e^{-2x}$, ahol

C_1, C_{-2} tetszőleges konstansok.

Az eredeti inhomogén egyenlet

$$y'' + y' - 2y = 6e^x$$

3p egy partikuláris megoldását

$$y_p(x) = Axe^x$$

alakban keressük („külső rezonancia").

Visszahelyettesítve

3p $(Axe^x + Ae^x + Ae^x) + (Axe^x + Ae^x) - 2(Axe^x) = 6e^x$

azaz $3A = 6 \iff \underline{A = 2}$

tehát $\underline{y_p(x) = 2xe^x}$ egy partikuláris megoldás.

1p Így az inhomogén egyenlet ált. megoldása:

$$y(x) = C_1 e^x + C_{-2} e^{-2x} + 2xe^x$$

A kezdeti feltételt figyelembe véve:

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_{-2} + 0 \overset{!}{=} 2 \\ y'(0) &= C_1 - 2C_{-2} + 2 \overset{!}{=} 2 \end{aligned}\right\} \iff \begin{aligned} C_1 + C_{-2} &= 2 \\ C_1 - 2C_{-2} &= 0 \end{aligned}$$

4p melynek megoldása $C_1 = \frac{4}{3}$, $C_{-2} = \frac{2}{3}$. Tehát a diffegyenlet keresett megoldása:

$$\boxed{y(x) = \frac{4}{3}e^x + \frac{2}{3}e^{-2x} + 2xe^x}$$

③

6p

$$y' = \frac{(x+y)^2}{xy} = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{xy} = \frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x},$$

azaz y' fgv.-e $\frac{y}{x}$-nek. Ilyenkor a célszerű mindig az $u(x) := \frac{y(x)}{x}$ helyettesítés:

$$\underset{\underset{xu' + u}{\|}}{\underset{(xu)'}{\overset{\|}{y'}}} = \underbrace{\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x}}_{\frac{1}{u} + 2 + u}$$

azaz $\underline{xu' + u = \frac{1}{u} + 2 + u}$

2p

Rendezve (mivel $x \neq 0$, oszthatunk vele):

$$u' = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{u} + 2\right),$$ ami <u>szeparábilis</u>.

3p

Tehát a megoldás: vagy

<u>I. eset</u>: $\frac{1}{u} + 2 = 0$ azaz $u = -\frac{1}{2}$ és $\boxed{y(x) = xu(x) = -\frac{1}{2}x}$

vagy

6p

<u>II. eset</u>: $\frac{1}{u} + 2 \neq 0$ és $\int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{1}{\frac{1}{u} + 2}\,du$

$$\int \frac{1}{\frac{1}{u} + 2}\,du = \int \frac{u}{1+2u}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{1+2u-1}{1+2u}\,du =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+2u}\right)du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\ln|1+2u| + \text{konst}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + \text{konst}$$

1p

Tehát ilyenkor: $\boxed{\frac{1}{2}\frac{y}{x} - \frac{1}{4}\ln\left|1 + \frac{2y}{x}\right| = \ln|x| + C_1}$,

ahol C tetszőleges konst.

4.

4p

A kérdéses diffegyenlet szeparábilis;

$$y' = f(y)\,g(x) \quad \text{alakú.}$$

Tehát egy megoldás az $y(x) = y_0$ konstans fgv, ha $f(y_0) = 0$

$$\Updownarrow$$

$$\arctan y_0 = \frac{\pi}{4} \iff y_0 = \tan\frac{\pi}{4} = 1.$$

Azaz $\boxed{y(x) \equiv 1 \text{ egy megoldás}}$

5p

b) Mivel két (különböző) megoldás sohasem metszheti egymást, ezért az $y(0) = 0$ kezdeti feltételhez tartozó megoldás mindig az előbbi pontban tárgyalt megoldás alatt fut:

$$y(0) = 0 \implies y(x) < 1 \quad \forall x\text{-re}$$

Tehát $f(y(x)) = \arctan(y(x)) - \frac{\pi}{4} < 0 \quad \forall x\text{-re}$

(mivel arctan szig. mon. növő).

4p

Ilyenkor tehát

$$y' = 0 \iff f(y)\,g(x) = 0 \iff g(x) = 0$$

azaz $\dfrac{x^3+8}{\sin(x)+8} = 0 \iff x^3 + 8 = 0 \iff \boxed{x = -2}$

Tehát a kérdéses megoldásfgv.-nek legfeljebb $x = -2$-nél lehet szélsőértéke; máshol biztosan nem.

$x=-2$ -nél tehát $f(y(x)) < 0$ és $g(x)=0$.

$$y''\Big|_{x=-2} = (y')'\Big|_{x=-2} = \Big(f(y)\,g(x)\Big)'\Big|_{x=-2} =$$

$$= \Big(f'(y)\,y'\,g(x) + f(y)\,g'(x)\Big)\Big|_{x=-2} =$$

$$= f'(y)\cdot y'\cdot 0 + f(y(-2))\ g'(-2) = \underline{f(y(-2))\,g'(-2)}$$

Másrészt

$$g'(-2) = \left(\frac{x^3+8}{\sin(x)+8}\right)'\Bigg|_{x=-2} = \frac{3x^2-(x^3+8)\cos(x)}{(\sin(x)+8)^2}\Bigg|_{x=-2} =$$

$$= \frac{3(-2)^2 - 0\cdot\cos(-2)}{(\sin(-2)+8)^2} = \frac{12}{(\sin(-2)+8)^2} > 0$$

tehát

$$y''(-2) = f(y(-2))\,g'(-2) = \text{negatív} \times \text{pozitív} < 0$$

6p

$\Rightarrow$ $\boxed{x=-2 \text{ -nél } y\text{-nak lokális maximuma van}}$

5.

3p
$a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}$ kar. egyenlete:

$\lambda^2 = 5\lambda - 6 \iff \lambda = 2, 3$

tehát $a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$

2p
A kezdeti feltételből

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= A + B = 6 \\ a_1 &= 2A + 3B = 13 \end{aligned}\right\} \iff A = 5,\ B = 1$$

1p
Tehát a kérdéses sorozat: $a_n = 5 \cdot 2^n + 3^n$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n^2(5 \cdot 2^n + 3^n) + 1}}_{=: b_n} (x+5)^n$$

5p

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{n^2(5 \cdot 2^n + 3^n) + 1}{(n+1)^2(5 \cdot 2^{n+1} + 3^{n+1}) + 1} =$$

(alul-felül egyszerűsítve n-nel)

$$= \frac{5 \cdot 2^n + 3^n + \frac{1}{n^2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 (10 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n) + \frac{1}{n^2}} =$$

(alul-felül egyszerűsítve 3^n-nel)

$$= \frac{5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 + \frac{1}{3^n \cdot n^2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \left(10\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3\right) + \frac{1}{3^n \cdot n^2}} \longrightarrow \frac{5 \cdot 0 + 1 + 0}{(1+0)^2(10 \cdot 0 + 3) + 0} = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$ A konv. sugár $R = \frac{1}{1/3} = 3$.

1p Tehát $5-3 < x < 5+3$ esetén $f(x)$ biztosan konvergens, és $|x-5| > 3$ esetén biztosan divergens.

Még kérdés: mi van $x=2$ illetve $x=8$ esetén

5p $x = 2, 8$: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2(5\cdot 2^n + 3^n)+1} (\pm 3)^n =$

attól függően, hogy $x=2$ vagy $x=8$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n \frac{1}{n^2(1+5(\frac{2}{3})^n)+1}$$ abszl. konvergens,

mivel

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2(1+5(\frac{2}{3})^n)+1} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} < \infty$$

(majoráns krit.)

Tehát a kérdéses konv. tartomány:

$[2, 8]$ (azaz a 2 és a 8 is benne van).

6.

3p

Legyen $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. A hatványsor bázispontja $x_0 = 0$, konv. sugara

$$R = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{1/n}} = \frac{1}{1} = 1.$$

5p

Tehát a $(-1,1)$ tartományon f egy sima fgv. és

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{1}{1-x}$$

5p

$$\Rightarrow f(x) = \int \frac{1}{1-x}\, dx = -\ln|1-x| + C$$

valamilyen C konstansra. Mivel $f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^n}{n} = 0$, ezért $-\ln|1-0| + C = 0$ azaz $C = 0$. Tehát ha $x \in (-1,1)$, akkor $f(x) = -\ln|1-x|$

2p

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1/2)^n}{n} = f(1/2) = -\ln\left(\tfrac{1}{2}\right) = \boxed{\ln(2).}$$

■