ANALÍZIS 2. **VIZSGADOLGOZAT** **2013. június 13.**

Mérnök informatikus szak α variáns Munkaidő: 90 perc

---

1. feladat (16 pont =6p + 10p)

a) Legyen $y_1(x)$ és $y_2(x)$ egy elsőrendű, inhomogén, lineáris, függvény együtthatós differenciálegyenlet két megoldása. Mondja ki és bizonyítsa be az $y_1 - y_2$ különbségről tanult tételt!

b) Határozza meg az alábbi differenciálegyenletnek az adott kezdeti feltételhez tartozó megoldását az $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon!

$$y' + y \cdot \operatorname{tg} x = \sin(2x), \qquad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

2. feladat (14 pont = 4p+4p+6p)

Írja fel azt a legalacsonyabb rendű, állandó együtthatós, homogén, lineáris differenciálegyenletet, melynek megoldása(i) az alább megadott függvény(ek)! Írja föl a differenciálegyenletek általános megoldását is!

a)	$3x^2$,	e^{4x};
b)	$\sin(2x)$,	$2e^{-3x}$;
c)	$\operatorname{ch}(2x)e^{3x}$.	

3. feladat (16 pont=7p +9p)

a) Mit nevezünk binomiális sornak? Mondja ki és bizonyítsa be a binomiális sor konvergenciasugaráról tanult tételt!

b) Határozza meg az $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{27 + 9x^2}}$ függvény 0 körüli Taylor-sorát valamint a sor konvergenciasugarát! Elemi műveletekkel adja meg az $f^{(6)}(0)$ deriváltat!

4. feladat (14 pont=5p + 4p + 3p +2p)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

a) Folytonos-e f az origóban?

b) Határozza meg f parciális deriváltjait az origón kívül!

c) Határozza meg f parciális deriváltjait az origóban!

d) Létezik-e a függvény gradiense az origóban?

5*. feladat (14 pont =6p +8p)

a) Egy rajzon mutassa be a hengerkoordinátákat, és számolja ki a hengerkoordináta-transzformáció Jacobi-determinánsát!

b) Határozza meg az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ gömb és a $x^2 + y^2 \leq 1$ henger közös részének térfogatát!

6*. feladat (12 pont =4p +8p)

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 2xy$$

a) Mutassa meg, hogy $u(x, y)$ harmonikus függvény $\mathbb{R}^2$-n!

b) Keresse meg az összes olyan reguláris f függvényt, melynek valós része u!

7*. feladat (14 pont =6p +8p)
Határozza meg a következő komplex vonalintegrálok értékét algebrai alakban! Az L görbe a -2 kezdőpontú, $2i$ végpontú irányított egyenes szakasz.

$$a) \quad \int_L (z\bar{z})dz = ? \qquad\qquad b) \quad \oint_{|z-3i|=2} \left(\frac{\ln z}{z^2+16}\right)dz = ?$$

A *-os feladatokból legalább 15 pontot el kell érni!

Pótfeladatok (csak a közepes vizsgajegy[1] eléréséhez javítjuk ki):

8. feladat (10 pont =6p +4p)

$$3a_{n+1} = -5a_n + 2a_{n-1}, \qquad\qquad (n \in \mathbb{N})$$

a) Határozza meg a fenti rekurzív sorozat általános megoldását!

b) $a_0 = 1$ esetén válassza meg a_1 értékét úgy, hogy a sorozat korlátos legyen, és adja meg a_n értékét!

9. feladat (10 pont =5p +5p)
Írja fel az alábbi függvények adott középpontú Taylor-sorát!

$$a) \quad f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x), \qquad x_0 = 0;$$
$$b) \quad h(x) = \mathrm{sh}(x), \qquad x_0 = 1.$$

[1] A vizsgajegy az a jegy, ami bekerül a Neptunba.