

# Nemlineáris és Robusztus Irányítások (BMEVIIIMA10) – vizsgakérdések

---

## Normák és terek

1. Definiálja a norma fogalmát és tulajdonságait!
2. Hogyan definiálhatók  $L_p$  és az  $L_\infty$  terek?
3. Mit értünk indukált norma alatt?
4. Tekintse a véges dimenziós euklideszi vektorterek között lineáris leképezések halmazát. Mi a kapcsolat az indukált norma és a szinguláris érték felbontás között?
5. Definiálja a Hilbert-tér fogalmát és soroljon fel rá példákat!
6. Definiálja a  $H_2$  és  $H_\infty$  tereket.
7. Hogyan számítható a  $H_2$  norma egy  $G(s): L_2^p \alpha L_2^q$  átviteli mátrix esetében?
8. Hogyan számítható a  $H_\infty$  norma egy  $G(s): L_2^p \alpha L_2^q$  átviteli mátrix esetében? Hogyan működik a felezési algoritmus?
9. Hogyan magyarázható szemléletesen a  $H_\infty$  norma egy  $G(s): L_2^p \alpha L_2^q$  átviteli mátrix esetében?
10. Mi a kapcsolat egy  $G(s): L_2^p \alpha L_2^q$  átviteli mátrix frekvenciafüggő SVD felbontása és  $H_\infty$  normája között?
11. Milyen Matlab támogatást ismer a normák számítására?

## Belső stabilitás, performanica

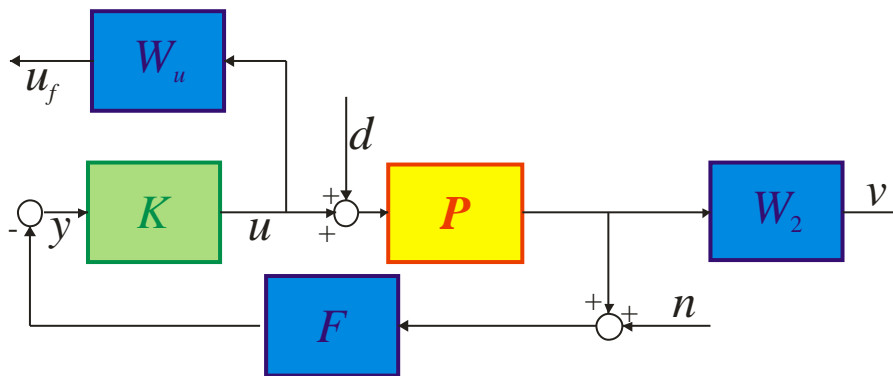
12. Adott egy  $K$  átviteli függvényű MIMO szabályozó és egy  $P$  átviteli függvényű szakasz. Adja meg a hagyományos szabályozási kör hatásvázlatát és a belső stabilitás vizsgálatához használt hatásvázlatot!
13. Mit értünk egy visszacsatolt szabályozási struktúra jól meghatározottságán?
14. Mit értünk egy visszacsatolt struktúra belső stabilitásán?
15. Adott egy  $K$  átviteli függvényű MIMO szabályozóból és egy  $P$  átviteli függvényű szakaszból felépített szabályozási kör. Definiálja a bemeneti és kimeneti hurokátviteli mátrixokat, a be- és kimeneti érzékenységi mátrixokat, komplementer érzékenységi mátrixokat!
16. Milyen tulajdonságokkal kell rendelkeznie (a szinguláris értékeket tekintve) egy MIMO szabályozási kör egyes átviteli mátrixainak, ha kedvező zavarelnyomási tulajdonságot kívánunk elérni? A következtetéseket igazolja!
17. Milyen tulajdonságokkal kell rendelkeznie (a szinguláris értékeket tekintve) egy MIMO szabályozási kör egyes átviteli mátrixainak, ha kedvező zajelnyomási tulajdonságot kívánunk elérni? A következtetéseket igazolja!
18. Milyen tulajdonságokkal kell rendelkeznie (a szinguláris értékeket tekintve) egy MIMO szabályozási kör egyes átviteli mátrixainak, ha kedvező robusztus stabilitási tulajdonságot kívánunk elérni? A következtetéseket igazolja!
19. Milyen tulajdonságokkal kell rendelkeznie (a szinguláris értékeket tekintve) egy MIMO szabályozási kör egyes átviteli mátrixainak, ha nem kívánunk túl nagy beavatkozó jeleket megfigyelni a szabályozó kimenetén? A következtetéseket igazolja!
20. Fogalmazza meg és illusztrálja a loop-shaping (hurokformálási) problémát. Honnan erednek az előírások az alacsony és honnan a magas frekvencia tartományban?
21. Mutasson  $H_2$  és  $H_\infty$  normákra alapuló költségfüggvényeket a szabályozási kör performanciájának biztosításához!

## Bizonytalanságok és kis erősítések tétele

22. Definiálja és magyarázza meg a modellbizonytalanság fogalmát!
23. Mit nevezünk strukturálatlan és koncentrált bizonytalanságnak?
24. Definiálja és illusztrálja az additív és a multiplikatív bizonytalanság fogalmát!
25. Definiálja a néveleges stabilitás, a robusztus stabilitás, a névleges performancia és a robusztus performancia fogalmakat!
26. Mondja ki és bizonyítsa be a kis erősítések tételét!
27. Fogalmazza meg az optimális és a szuboptimális  $H_\infty$  irányítási problémát!

## LFT és ARE

28. Mi az a lineáris törtfüggvény?
29. Definiálja és illusztrálja az alsó és felső lineáris törtfüggvény fogalmát!
30. Alakítsa át az alábbi struktúrát alsó LFT-vé:



31. Definiálja a Redheffer-csillag szozatot!
32. Adja meg az Algebrai Ricatti-Egyenlet általános alakját!
33. Mit értünk egy ARE stabil megoldásán és milyen feltételeknek kell teljesülnie, hogy az létezzon?
34. Mit értünk a Ric leképezésen?
35. Milyen tulajdonságai vannak az ARE-hoz rendelt Hamilton-mátrixnak?

## Nemlineáris rendszerek – alapfogalmak

36. Adja meg a sodrásos és sodrásmentes nemlineáris rendszerosztályok definícióját!
37. Definiálja a Lie-deriválást és a Lie-zárójelet!
38. Mi az a disztribúció és mit jelent, ha egy disztribúció involutív? Hogyan kapható meg egy disztribúció involutív zárása?
39. Mit értünk az alatt, hogy egy disztribúció egy vektormezőre nézve invariáns?
40. Mi az a vektormező és milyen tulajdonságai vannak a vektormezőhöz tartozó folyamnak?
41. Mondja ki és bizonyítsa be Frobenius tételét!

## Nemlineáris rendszerek analízise

42. Tekintse a

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (1)$$

Hogyan kapható meg az a koordináta-transzformáció, amely (1)-et háromszög alakra hozza?

Hogyan interpretálható a háromszög alak?

43. Tekintse az (1) egyenlettel adott dinamikus rendszert és egy

$$y = h(x) \quad (2)$$

kimenetet! Definiálja (2) relatív fokszámát! Milyen intervallumban változhat a relatív fokszám? Hogyan kapható meg a relatív fokszám lineáris rendszer esetén az állapotegyenletből vagy az átviteli függvényből?

44. Tekintse az (1) egyenlettel adott dinamikus rendszert és a (2) egyenlettel adott kimenetet. Adja meg azt a koordináta-transzformációt, amely szerint felírva (1) dinamikát pontosan a kimenet relatív fokszámának megfelelő darab integrátorból álló sor jelenik meg! Adja meg a teljes transzformált rendszer dinamikus egyenletét!
45. Tekintse az (1) egyenlettel adott dinamikus rendszert és a (2) egyenlettel adott kimenetet. Definiálja a (2) kimenethez tartozó zérus dinamikát! Hogyan kapható meg a zérus dinamika lineáris rendszer esetében, ha ismert a be- és a kimenet közötti átviteli függvény?
46. Definiálja az egzakt linearizálás fogalmát a hozzá tartozó hatásvázlattal!
47. Adja meg az (1) rendszer egzakt linearizálhatóságának feltételét és bizonyítsa be annak szükséges és elégséges voltát!
48. Adja meg a relatív fokszám definícióját több bemenetű és több kimenetű rendszer esetén (a be és kimenetek száma megegyezik, a több=2 esetet tárgyalja)!
49. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy MIMO nemlineáris rendszer statikus állapotvisszacsatolással linearizálható legyen? Hogyan kapható meg a linearizáló visszacsatolás kifejezése, ha a feltétel teljesül?

# ① Norma fogalma és tulajdonságai

$X$  lineáris tér  $\mathbb{F}$  felett  
(test)

$\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{F}$   $X$  normája ( $x, y \in X, \lambda \in \mathbb{F}$ )

1.  $\|x\| \geq 0$  és  $\|x\| = 0$  csak  $x = 0$

2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

# ② $L_p$ és $L_\infty$ terek

$L_p$  tér

Tekintve az összes  $f: X \rightarrow \mathbb{F}$  ( $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ) leképezést,  
az  $L_p$  függvényterekre igaz, hogy:

$$\int_x |f|^p d\mu < \infty$$

Az  $L_p$  tér  $\mathbb{F}$  test felett az elemek pontonkénti összeadására  
zárt.

$$f(x) + g(x) = (f+g)(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

norma:  $\|f\|_p = \left( \int_x \|f\|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty$

$L_\infty$  tér

norma:  $\|f\|_\infty = \text{ess sup } f(x)$

Egy stabil lineáris rendsz.  $L_p \rightarrow L_p$  képez a be és kimenet között

### ③ Indukált norma

(és korlátos)  
A: lineáris leképezés  $X$  és  $Y$  normált lineáris terek között. A korlátos leképezések halmaza szintén lineáris tér, és  $X$  és  $Y$  normái alapján bevezethető egy indukált norma.

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

### ④ Kapcsolat az indukált norma és a szinguláris érték felbontása között.

Egy  $\mathbb{R}^n$  vektortérben a  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$  standard skalár szorzat a  $\|\cdot\|_2$  normát definiálja, azaz az Euklideszi terek Hilbert terek.

$A (\mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n)$  korlátos lineáris leképezés  $\|\cdot\|_2$  indukált normája:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)} = \bar{\sigma}(A) \quad \text{azaz } A \text{ legn. szinguláris értéke}$$

## ⑤ Hilbert terek

Adott:  $X$  lineáris tér

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  skalár szorzat       $\langle \cdot, \cdot \rangle: X + X \mapsto \mathbb{F}$

↓  
ennek tulajdonságai:

1,  $\langle f, f \rangle \geq 0$  és  $\langle f, f \rangle = 0 \iff f = 0$

2,  $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$  ← komplex konjugálás

3,  $\langle f, \alpha g + \beta h \rangle = \alpha \langle f, g \rangle + \beta \langle f, h \rangle$

Ha az  $X$  feletti  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -al definiált  $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$

( $f \in X$ ) norma  $X$  felett, valamint ezzel a normával  $X$

egy Banach tér, akkor  $X$  Hilbert tér.

Minden Cauchy-konvergens  
sorozat határértéke is  $X$  eleme

Példa:

Egy  $\mathbb{R}^n$  ( $n < \infty$ ) vektortérben a  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$  standard  
skalár szorzat a  $\|\cdot\|_2$  normát definiálja, tehát az  
Euklideszi terek Hilbert terek.

## 6. $H_2$ és $H_\infty$ terek

Adott az  $f: S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  függvény. A függvény analitikus egy  $z_0 \in S$  pontban, ha ott minden deriváltja létezik, és hatványsorba fejthető. Ha  $f$  mátrixfüggvény, akkor  $f$ -et analitikusnak mondjuk, ha a mátrix minden eleme analitikus függvény.

$H_2$  az  $L_2(j\mathbb{R})$  tér zárt altere, amely a komplex számsík jobb felső felében analitikus függvényeket tartalmazza az alábbi normával:

$$\|F\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{trace} |F^*(j\omega) F(j\omega)| d\omega$$

$\mathcal{RH}_2$ -tér a  $H_2$ -tér olyan altere, amely a stabil, lineáris MIMO rendszerek átviteli mátrixainak halmaza, amelyek minden eleme olyan racionális törtfüggvény, amelyeknek nincs pólusa a jobb felső felében.

A  $H_\infty$  tér  $L_\infty$  altere, azaz függvények halmaza, amelyek korlátosak és analitikusak a jobb felső felében. Ezen a halmazon az alábbi normát lehet definiálni:

$$\|F\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}[F(j\omega)]$$

## 7. $H_2$ norma számítása $G(s)$ átviteli mátrix esetén

$$\|G\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{trace} [G^*(j\omega) G(j\omega)] d\omega}$$

8.  $H_{\infty}$  norma számítása  $G(s)$  átviteli mátrix esetén + felezési algoritmus

$$\|G\|_{\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{\omega} \bar{\sigma}(G(j\omega))$$

Minden  $\omega$ -ra ki kell számolni egy maximális szinguláris értéket, és az így kapott függvény maximumát kell megkeresni.

Ezt így is fel lehet fogni, mint egy worst case erősítést.

A maximum megkereséséhez alkalmazhatjuk a felezési algoritmust, ahol azt döntjük el, hogy  $\|G\|_{\infty} < \beta$

Lépései  $\|G\|_{\infty}$  meghatározására:

1. inicializálás,  $\beta_{\min}$  és  $\beta_{\max}$  meghatározása ( $\beta_{\min} \leq \|G\|_{\infty} \leq \beta_{\max}$ ) + tolerancia meghatározása

2. Ha  $\frac{\beta_{\max} - \beta_{\min}}{\beta_{\min}} \leq \text{tol}$ , megtaláltuk az értéket,

$$\|G\|_{\infty} = \frac{\beta_{\max} + \beta_{\min}}{2}, \text{ befejeztük a keresést.}$$

Ha nem, lépünk a következő lépésre

3.  $\beta = \frac{\beta_{\max} + \beta_{\min}}{2}$



4.  $\|G\|_{\infty} < \beta$  tesztelése:  $H$  képzése és sajátértékek meghatározása

5. Ha  $H$ -nak van sajátértéke a  $j\mathbb{R}$ -en (komplex tengelyen), akkor  $\beta_{\min} := \beta$ , ha nincs  $\beta_{\max} := \beta$

ugrás a 2. lépésre



9. Szemléletes magyarázata a  $H_{\infty}$  normának egy  $G(s)$  átviteli mátrix esetén

Bemenet (szinuszos gerjesztés)

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1 \sin(\omega t + \phi_1) \\ u_2 \sin(\omega t + \phi_2) \\ \vdots \\ u_g \sin(\omega t + \phi_g) \end{bmatrix}$$

$$\hat{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_g \end{bmatrix}$$

$$\|G\|_{\infty} = \sup_{\phi_i, \omega, \hat{u}} \frac{\|\hat{y}\|}{\|\hat{u}\|}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1 \sin(\omega t + \theta_1) \\ y_2 \sin(\omega t + \theta_2) \\ \vdots \\ y_g \sin(\omega t + \theta_g) \end{bmatrix}$$

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_g \end{bmatrix}$$

10. Kapcsolat egy  $G(s)$  átviteli mátrix frekvenciafüggő SVD felbontása és  $H_{\infty}$  normája között.

Az  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  mátrix SVD felbontása a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

$$A = U \cdot \Sigma \cdot V^*$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Sigma_1 = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_g\}$$

Szinguláris érték tulajdonságok:

1.,  $\bar{\sigma}(A) = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$  maximális erősítés

2.,  $\underline{\sigma}(A) = \min_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$  minimális erősítés

3.,  $\underline{\sigma}(A) \leq \lambda_i(A) \leq \bar{\sigma}(A)$

4.,  $\exists A^{-1} \Rightarrow \underline{\sigma}(A) = \frac{1}{\bar{\sigma}(A^{-1})}$

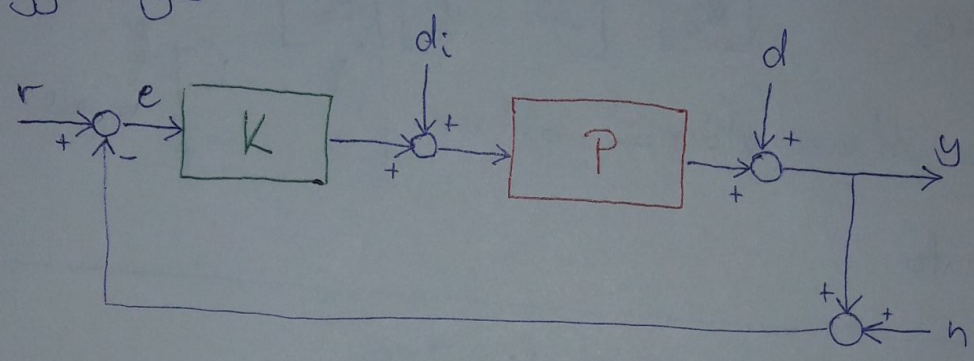
$$\bar{\sigma}(A) = \frac{1}{\underline{\sigma}(A^{-1})}$$

11. Matlab támogatás normák számítására

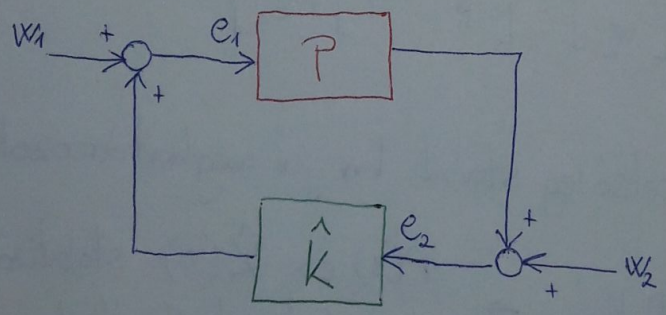
- norm
- hinfnorm
- h1norm

12. Hagyományos szabályozási kör + belső stabilitás vizsgálatához használt hatásvázlat

Hagyományos:



Belső stabilitáshoz:



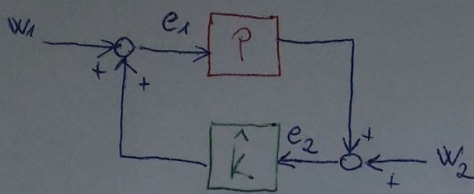
$$w_1 = d_i$$

$$w_2 = d + n - r$$

$$\hat{K} = -K$$

- K: szabályozó
- P: szakasz
- r: alapjel
- e: hibajel
- di: bemeneti zavarás
- d: kimeneti zavarás
- n: zaj
- y: kimenet

13. Szabályozási struktúra jól meghatározottsága



$$e_1 = \hat{K} \cdot e_2 + w_1$$

$$e_2 = P \cdot e_1 + w_2$$

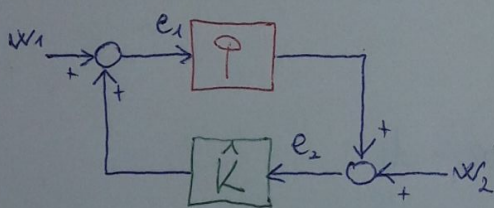
$$w_1 = e_1 - \hat{K} \cdot e_2$$

$$w_2 = -P \cdot e_1 + e_2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -\hat{K} \\ -P & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

Ha a rendszer jól meghatározott, akkor  $\begin{bmatrix} I & -\hat{K} \\ -P & I \end{bmatrix}$  véges, és invertálható.

14. Visszacsatolt struktúra belső stabilitása



$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -\hat{K} \\ -P & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

A visszacsatolt struktúra belsőleg stabil, ha jól meghatározott,

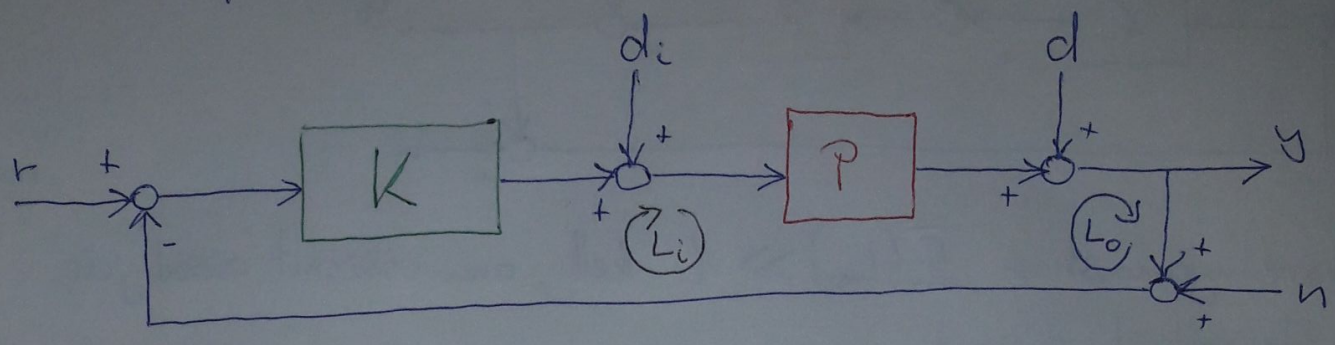
és  $\begin{bmatrix} I & -\hat{K} \\ -P & I \end{bmatrix}^{-1} \in RH_{\infty} \Rightarrow P(s)$  és  $\hat{K}(s)$  stabilizálhatóak és detektálhatóak

TÉTEL: Egy rdsz. belsőleg stabil acsa., ha jól meghatározott, és

1, a  $P(s) \hat{K}(s)$  jobb felsőra eső pólusainak száma  $n_k + n_p$

2,  $(I - P(s) \hat{K}(s))^{-1}$  stabil

15. Hurokátviteli mátrixok, érzékenységi mátrixok, komplementer érzékenységi mátrixok



$L_i = KP$     bemeneti hurokátvitel  
 $L_o = PK$     kimeneti hurokátvitel

$S_i = (I + L_i)^{-1}$     bemeneti érzékenységi mátrix  
 $S_o = (I + L_o)^{-1}$     kimeneti érzékenységi mátrix

$T_i = I - S_i$     komplementer bemeneti érzékenységi mátrix  
 $T_o = I - S_o$     komplementer kimeneti érzékenységi mátrix

16. Szinguláris érték tulajdonságai zavarelyomáshoz

Átvitel a zavaroktól a kimenetre:  $W_{yd} = S_o = (I + L_o)^{-1}$   
 $W_{y d_i} = S_o P = (I + L_o)^{-1} P$

Szinguláris értékek:

$d: \bar{\sigma}(S_o) = \bar{\sigma}(I + L_o)^{-1} = \frac{1}{\underline{\sigma}(I + PK)}$   
 $d_i: \bar{\sigma}(S_o P) = \bar{\sigma}((I + L_o)^{-1} P) = \bar{\sigma}(P S_i)$

A jó zavarelyomáshoz nagy körerősítés kell  $\Rightarrow \bar{\sigma}(S_o)$  és  $\bar{\sigma}(S_o P)$  legyen kicsi

Átvitel a zavaroktól a szakasz bemenetére:  $d: \bar{\sigma}(S_i K) = \bar{\sigma}(I + L_i)^{-1} K = \frac{1}{\underline{\sigma}(I + KP)^{-1} K}$   
 $d_i: \bar{\sigma}(S_i) = \bar{\sigma}(I + L_i)^{-1} = \frac{1}{\underline{\sigma}(I + KP)^{-1}}$

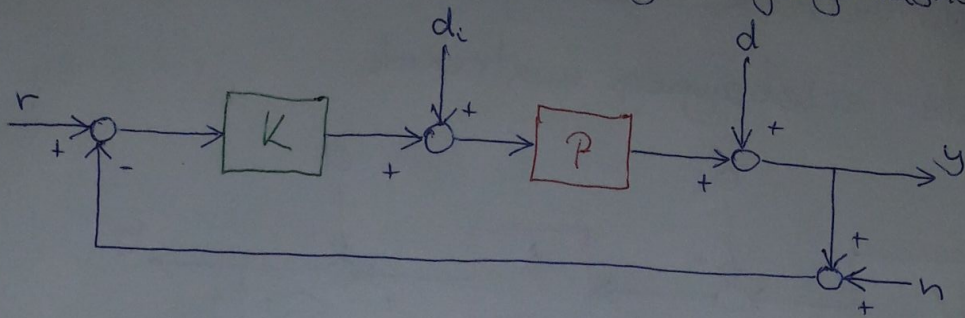
d és  $d_i$  elnyomásához ezeknek kéne kicsinek lenni

A d és  $d_i$  zavarások tipikusan alacsony frekvencián jelentősek

$\underline{\sigma}(L_i) - 1 \leq \underline{\sigma}(I + L_i) \leq \underline{\sigma}(L_i) + 1$   
 $\underline{\sigma}(L_o) - 1 \leq \underline{\sigma}(I + L_o) \leq \underline{\sigma}(L_o) + 1$

$\bar{\sigma}(S_o) \ll 1 \Rightarrow \underline{\sigma}(L_o) \gg 1$   
 $\bar{\sigma}(S_i) \ll 1 \Rightarrow \underline{\sigma}(L_i) \gg 1$

17. Szinguláris értékek tulajdonságai zajelnyomáshoz



A zavarelyomáshoz  $\underline{\sigma}(L_0) \gg 1$  kell, ami viszont ezzel jár, hogy átegyedjük a zajt.

Szerencsére a zaj általában nagy frekvenciás, míg a zavar kisfrekvenciás.

18. Szinguláris értékek tulajdonságai robusztus stabilitáshoz

A szakasz átvitele eltér a tervezéshez használt modelltől:

$$P_\Delta = (I + \Delta)P$$

ahol  $P$  stabil, és a különbséget definiáló átviteli mx. is stabil.

Feltesszük, hogy  $\Delta = 0$ -ra a rendszer stabil.

A rendszer akkor stabil, ha

$$\det(I + (I + \Delta)PK) = \det(I + PK) \det(I + \Delta T_0)$$

determinánsnak nincs jobboldali zérusa.

$\det(I + \Delta T_0)$  tag:

- minden zérusa, ha  $\|\Delta T_0\|$  kellően kicsi
- adott  $\Delta$  esetén a  $\|\Delta T_0\|$  tag kellően kicsi, ha  $\bar{\sigma}(T_0)$  kicsi
- $\bar{\sigma}(T_0)$  kicsi, ha  $\bar{\sigma}(L_0)$  kicsi

19. Szinguláris értékek tulajdonságai, ha nem akarunk túl nagy beavatkozó jeleket

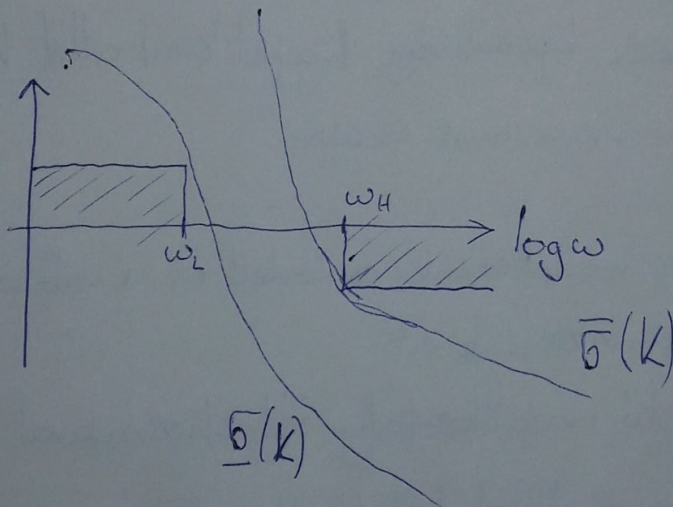
beavatkozó jel:

$$u = K S_0 (r - n - d) - T_i d_i$$

Nagy körerősítés, ahol  $\bar{\sigma}(P)$  kicsi

- a zavarelyomáshoz nagy körerősítés kellett  $\underline{\sigma}(L_d) \gg 1$
- azokon a frekvenciákon, ahol  $\bar{\sigma}(P)$  kicsi, nagy körerősítést úgy lehet elérni, hogy  $\underline{\sigma}(K)$  nagy
- viszont a nagy  $\underline{\sigma}(K)$  nagy beavatkozó jelet jelenthet, telítődésbe mehet a beavatkozó

## 20. Loop shaping



Alacsony frekvencián:

- jó zavarelyomás
- statikus pontosság határozzák meg a feltételeket

Nagy frekvencián:

- robusztusság
- jó zajelyomás
- beavatkozó szerv telítődéses jellege határozzák meg a feltételeket

(21)  $H_2$  és  $H_\infty$  normákra alapuló költség függvények,  
a szab. kör performanciájának biztosításához

$H_2$  performancia függvény

Egyszerűsítés:  $u = d_i = 0$ , vizsgáljuk  $d$  hatását a  
beavatkozó jelre, és a kimenetre

A zavarás hatására keletkező követési hiba energiájának  
várható értéke:

$$E \{ \|e\|_2^2 \} = E \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \|e\|_2^2 dt \right\} = \|W_e S_o W_d\|_2^2$$

ezt akarjuk minimalizálni

## (22) Modellbizonytalanság

A modell és a valóság közti különbség, függetlenül attól, hogy  
a különbséget milyen mechanizmus okozza

- Mivel a bizonytalanságot is modellezzük, a modell és a valóság  
közti eltérés problémáját nem hidaltuk át
- Az eltérés mérsékelhető modellosztály létrehozásával
- Az egyes tulajdonságokat (stabilitás, performancia)  
a teljes modellosztályra kívánjuk garantálni

### 23) Strukturálatlan & koncentrált bizonytalanság

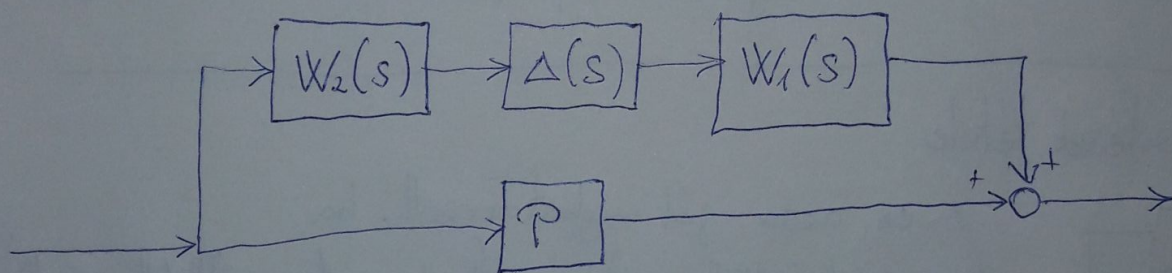
A bizonytalanságokat egy  $\Delta$  átvitelbe koncentráljuk.

Ha ennek csak a nagyságáról tudunk nyilatkozni, akkor beszélünk strukturálatlan bizonytalanságról

Ezt a  $\Delta(s)$ -t  $W_1(s)$  és  $W_2(s)$  súlyfüggvényekkel súlyozhatjuk.

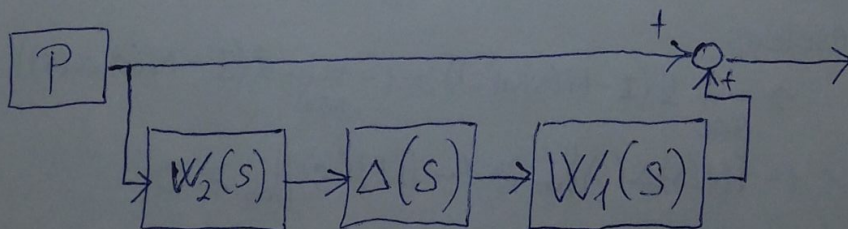
### 24) Additív & multiplikatív bizonytalanság

Additív bizonytalanság



$$P_{\Delta}(s) = P(s) + W_1(s) \Delta(s) W_2(s)$$

Multiplikatív bizonytalanság



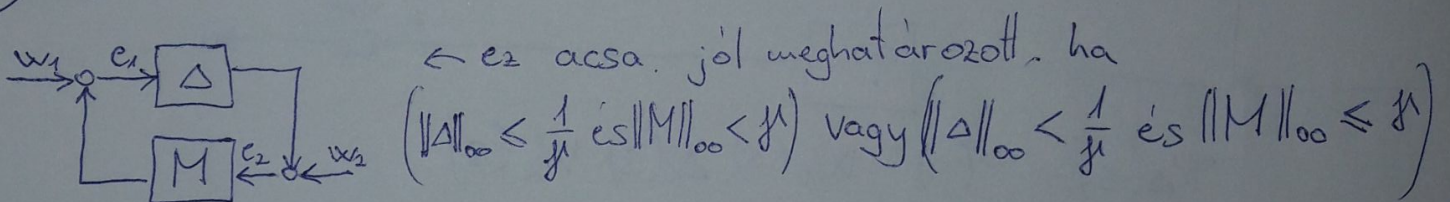
$$P_{\Delta}(s) = (I + W_1(s) \Delta(s) W_2(s)) P(s)$$



25. Névleges stabilitás, névleges performancia, robusztus stabilitás, robusztus performancia

- Névleges stabilitás: K-ra és P-re a visszacsatolás belsőleg stabil
- Robusztus stabilitás: K-ra és  $\forall$  szakasz  $\in \Pi$  esetén a visszacsatolás belsőleg stabil
- Névleges performancia: K-ra és P-re teljesülnek a performancia követelmények
- Robusztus performancia: K-ra és  $\forall$  szakasz  $\in \Pi$  esetén teljesülnek a performancia követelmények

26. Kis erősítések tétele



Feltehető, hogy  $\beta = 1$

Az  $M(s)\Delta(s)$  stabil, mert külön-külön is stabilak. Azt kell bizonyítani a belső stabilitáshoz, hogy  $\det(I - M\Delta)$ -nak nincs gyöke a jobb félsíkron  $\forall \Delta \in RH_\infty$  és  $\|\Delta\|_\infty \leq 1$  esetére.

$$\inf_{\text{sec}^+} \underline{\sigma}(I - M(s)\Delta(s)) > 0 \rightarrow \inf_{\text{sec}^+} \underline{\sigma}(I - M(s)\Delta(s)) \geq 1 - \sup_{\text{sec}^+} \bar{\sigma}(I - M(s)\Delta(s))$$

$$1 - \sup \bar{\sigma}(I - M(s)\Delta(s)) = 1 - \|M(s)\Delta(s)\|_\infty \geq 1 - \|M(s)\|_\infty > 0$$

Tegyük fel, hogy  $\|M\|_\infty \geq 1$

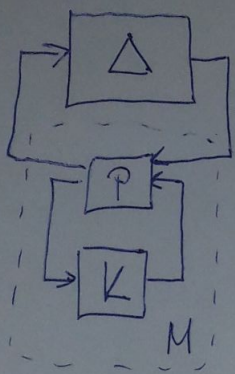
- Megmutatjuk, hogy  $\exists$  olyan  $\Delta \in RH_\infty$ , hogy  $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ , melyre  $\det(I - M(s)\Delta(s))$  nek van zérusa a képzetes tengelyen
- Mivel  $\|M\|_\infty \geq 1$  ezért létezik olyan  $\omega_0$ , melyre  $\bar{\sigma}(M(j\omega_0)) \geq 1$
- Legyen  $M(j\omega_0)$  SVD felbontása  $U(j\omega_0), \Sigma(j\omega_0), V^*(j\omega_0)$ , ahol  $\bar{\sigma}_1$  a legn. szinguláris érték nagyobb 1-nél

• Konstataálható, hogy  $\Delta(j\omega_0) = \frac{1}{\bar{\sigma}_1} v_1 u_1^*$  ( $\Delta \in RH_\infty, \|\Delta\|_\infty \leq 1$ )

$$\det(I - M(j\omega_0)\Delta(j\omega_0)) = \det(I - U \Sigma V^* v_1 u_1^* \frac{1}{\bar{\sigma}_1}) = 1 - u_1^* U \Sigma V^* v_1 \frac{1}{\bar{\sigma}_1} = 0$$

tehát valóban ellentmondásra jutottunk

## 27. Optimális & szuboptimális $H_\infty$ irányítási probléma



Optimális  $H_\infty$  irányítási probléma:

Keressük az összes olyan  $K(s)$  szabályozót, hogy  $\|M\|_\infty$  minimális

Szuboptimális  $H_\infty$  irányítási probléma:

Adott  $\gamma > 0$  esetén keressük az összes olyan  $K(s)$  szabályozót, hogy  $\|M\|_\infty < \gamma$  (ha létezik)

## 28. Lineáris törtfüggvény

racionális törtfüggvény: 
$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} \dots + a_1 s + a_0}$$

A lineáris törtfüggvény olyan racionális törtfüggvény, amelyben a számláló és a nevező is első fokú polinom

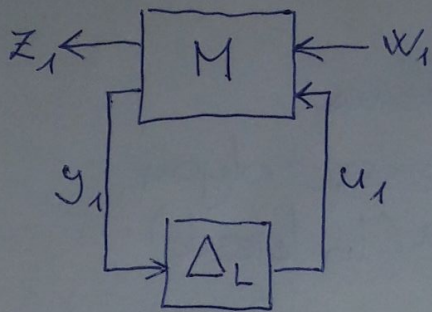
$$F(s) = \frac{a + bs}{c + ds} = \alpha + \beta s (1 - \gamma s)^{-1}$$

A skalar esetet így általánosítjuk, hogy a hozzárendelést egy  $M$  mátrix, és annak particionálása definiálja

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(p_1 + p_2) \times (g_1 + g_2)}$$

# 29) Alsó és felső lineáris törtfüggvény

Alsó LFT



$$\begin{bmatrix} z_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ u_1 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = \Delta y_1$$

$$z_1 = M_{11} \cdot w_1 + M_{12} \cdot u_1$$

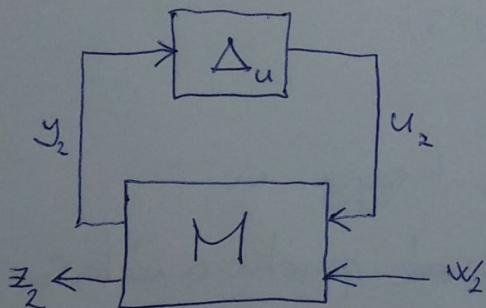
$$y_1 = M_{21} \cdot w_1 + M_{22} \cdot u_1$$

$$\rightarrow (I - M_{22} \cdot \Delta) y_1 = M_{12} \cdot w_1$$

$$y_1 = (I - M_{22} \Delta)^{-1} M_{12} w_1$$

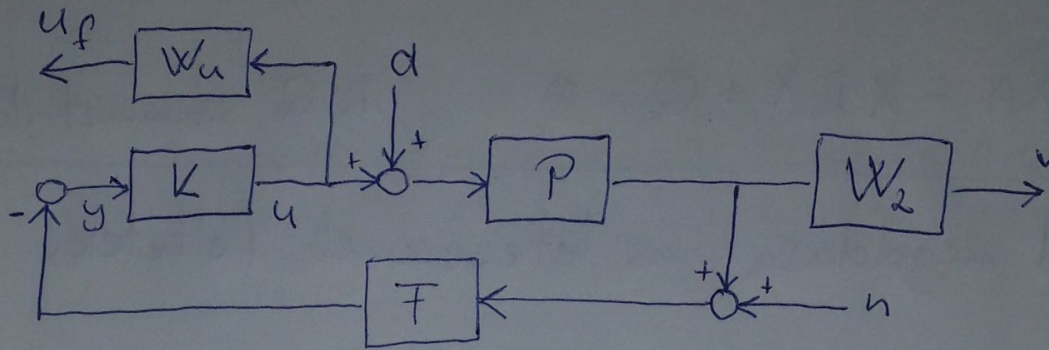
$$z_1 = \underbrace{\left( M_{11} w_1 + M_{12} \Delta (I - M_{22} \Delta)^{-1} M_{21} \right)}_{F_{\text{lower}}} w_1$$

Felső LFT



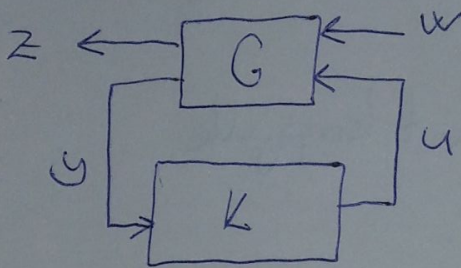
$$z_2 = \underbrace{\left( M_{22} w_2 + M_{21} \Delta (I - M_{11} \Delta)^{-1} M_{12} \right)}_{F_{\text{upper}}} w_2$$

### 30) Struktúra LFT -vè alakítása



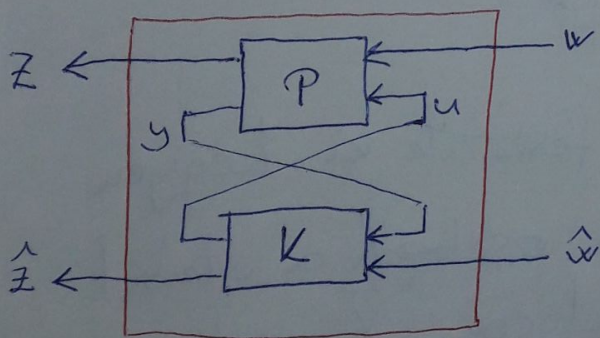
A' talakítandó

$$w = \begin{bmatrix} d \\ u \end{bmatrix} \quad z = \begin{bmatrix} v \\ u_f \end{bmatrix}$$



$$G = \left[ \begin{array}{cc|c} W_2 P & \emptyset & W_2 P \\ \emptyset & \emptyset & W_1 \\ \hline -FP & -F & -FP \end{array} \right]$$

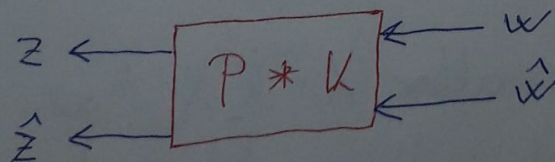
### 31) Redheffer - csillag szorzat



$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$$

$P * K$



32. Algebrai Riccati-egyenlet általános alakja

$$A^*X + XA + XRX + Q = 0 \quad R, Q \text{ szimmetrikus}$$

33. ARE stabil megoldása, és létezésének feltételei

Hamilton mátrix:  $H = \begin{bmatrix} A & R \\ -Q & -A^* \end{bmatrix}$  (Riccati-egyenlet eh. mátrixaiból)

Ennek segítségével az ARE megoldásait kapjuk.

Ha  $X$   $n \times n$ -es,  $H$   $2n \times 2n$ -es.

$H$  spektruma szimmetrikus a képzetes tengelyre.

Ennek felátásához legyen  $J = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}$

$$J^{-1} H J = -J H J = -H^*$$

$H$  invariáns altereit sajátvektorok feszítik ki. Legyen

$\bar{X}$  az a  $2n \times n$  mx. melynek oszlopai a stabil sajátértékekhez tartozó sajátvektorok,  $\bar{X}$  oszlopai

a  $H$  operátor egy  $n$  dimenziós invariáns alteret feszítik ki

Ha  $X_1$  nonszinguláris, akkor  $X = X_2 X_1^{-1}$  az ARE megoldása, amit stabilizáló megoldásnak nevezünk

### 34. Ric leképezés

Adott ARE  $H$  mátrixsal  $H = \begin{bmatrix} A & R \\ -Q & -A^* \end{bmatrix}$

Vezessük be azt a leképezést, amely az ARE-hoz tartozó  $H$ -hoz hozzárendeli a stabilizáló megoldást

$$\text{Ric} : \text{dom}(\text{Ric}) \subset \mathbb{R}^{2n \times 2n} \mapsto \mathbb{R}^{n \times n}$$

vagyis  $\text{Ric}(H) = X$ , ha  $H \in \text{dom}(\text{Ric})$

A  $\text{dom}(\text{Ric})$  értelmezési tartománya olyan  $H$ -ra igaz, amelyek

- nincs sajátértéke a képzetes tengelyen (stabilitás)
- a stabil sajátértékekhez tartozó  $\mathcal{L}_-(H)$  invariáns altérrel kiegészítő  $n \times n$  első  $n$  sorából összeállított  $X_1$  mátrix invertálható (komplementaritás)

### 35. Hamilton-mátrix tulajdonságai

$$H = \begin{bmatrix} A & R \\ -Q & -A^* \end{bmatrix}$$

- ha  $X$  mérete  $n \times n$ , akkor  $H$  mérete  $2n \times 2n$
- $H$  spektruma szimmetrikus a képzetes tengelyre
- ha  $\lambda$   $H$  sajátértéke, akkor  $-\bar{\lambda}$  is az

### 37. Lie-deriválás és Lie-zárójel

#### Lie-derivált:

Adott  $N$  sima sokaság és egy  $\lambda$  valós értékű függvény ( $\lambda \in C^\infty(N)$ ). A  $\lambda$  függvény deriváltja  $f$  mentén szintén egy  $C^\infty$  valós értékű függvény:

$$(L_f \lambda)(p) = (f(p))(\lambda)$$

lokális koordinátákban:

$$(L_f \lambda)(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left( \frac{\delta \lambda}{\delta x_1} \quad \dots \quad \frac{\delta \lambda}{\delta x_n} \right) \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

#### Lie-zárójel:

Mivel egy  $C^\infty(N)$  függvény Lie-deriváltja egy vektormező mentén megintcsak egy  $C^\infty(N)$  függvény, ezért a Lie-deriválás megismételhető:

$$L_{f_1} L_{f_2} \lambda = L_{f_1} (L_{f_2} \lambda)$$

$$L_{f_1}^{-1} \lambda = L_{f_1}^{-1} (L_{f_1} \lambda)$$

Általában  $L_{f_1} L_{f_2} \lambda \neq L_{f_2} L_{f_1} \lambda$ , de megkereshetjük azt a vektormezőt, amelyet  $[f_1, f_2]$ -nek jelölünk, és teljesíti a következőt:

$$L_{[f_1, f_2]}(\lambda) = L_{f_1} L_{f_2} \lambda - L_{f_2} L_{f_1} \lambda$$

### 38. Disztribúció, involutív disztribúció, disztribúció involutív zárása

Adott egy  $N$  sokaság és  $d$  darab vektormező, melyek  $V(N)$  elemei. Jelöljük őket rendre  $f_1, \dots, f_d$ -vel. Ezek a vektormezők minden egyes  $p \in N$  pontban kifeszítenek egy vektorteret, amely altere  $T_p N$ -nek. Jelöljük ezt a vektorteret  $\Delta(p)$ -vel

$$\Delta(p) = \text{span} \{f_1(p), f_2(p), \dots, f_d(p)\}$$

Azt a hozzárendelést, amely egy sokaság minden  $p$  pontjához a  $T_p N$  alterét rendeli hozzá, disztribúciónak nevezzük

#### Involutív disztribúció:

Egy  $\Delta$  disztribúció involutív, ha minden  $f, g \in \Delta$  vektormezőre  $[f, g] \in \Delta$

#### Disztribúció involutív zárása:

Egy  $\Delta$  disztribúció involutív zárása azon disztribúciók metszete, amelyek tartalmazzák a  $\Delta$  disztribúciót, és involutívak



### 39) Disztribúció vektormezőre vett invarianciája

Adott egy  $\Delta$  disztribúció, és egy  $f$  vektormező az  $M$  sokaságon.

A  $\Delta$  disztribúció invariáns  $f$  vektormező alatt, ha bármely

$$\tau \in \Delta \text{ vektormezőre } [f, \tau] \in \Delta.$$

Ha  $\Delta$  invariáns  $f$  alatt, azt írhatjuk úgy is, hogy

$$[f, \Delta] \subset \Delta$$

### 40) Vektormező, és a hozzá tartozó folyam tulajdonságai

Adott egy  $n$  dimenziós sokaság  $(N)$ . Egy  $f$  vektormező az  $N$  sokaságon egy olyan leképezés, amely a sokaság minden pontjához hozzárendel egy vektort a  $p$  pont  $T_p N$  érintőterében:

$$f: p \in N \mapsto f(p) \in T_p N$$

Folyam / flow:

$$\phi: W \mapsto N \quad W = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times N : t \in I_p\}$$

Bármely  $p \in N$  pontot  $t \in I_p$  idővel vissz odébb az  $f$  vektormezőhöz tartozó, rajta áthaladó integrálgörbe mentén.

- $\phi(0, p) = p$   
nulla idő alatt nem megy odébb semmi

- minden  $p \in N$  ponthoz a  $t \in I_p$  intervallumon definiált  $\phi_p(t) = \phi(t, p)$

integrálgörbéje  $f$ -nek

- $\phi(s, \phi(t, p)) = \phi(s+t, p)$
- adott  $t$ -re definiálható a  $\phi_t: U \mapsto N$  leképezés:

$$\phi_t(q) = \phi(t, q)$$

amely értelmezési tartományának és értékkészletének metszetén egy diffeomorfizmus, és

$$\phi_t^{-1} = \phi_{-t}$$

## 4.1. Frobenius tételle

Egy  $m$  dimenziós  $M$  sokaság feletti  $\Delta$  disztribúció akkor és csak akkor teljesen integrálható, ha involutív

Teljes integrálhatóság  $\Rightarrow$  involutivitás

- $M$  egy  $m$  dimenziós sokaság
- $\Delta = \text{span}\{f_1, f_2, \dots, f_d\}$  egy  $d$  dimenziós disztribúció
- $\Delta^\perp = \text{span}\{d\lambda_1, d\lambda_2, \dots, d\lambda_{m-d}\}$  egy egzakt differenciálok által kifeszített,  $m-d$  dimenziójú kodisztribúció

Bizonyítani kell, hogy ha

$$\langle d\lambda_i, f_i \rangle = 0$$

akkor

$$\langle d\lambda_i, [f_j, f_k] \rangle = 0 \quad (j \neq k)$$

Mivel  $\Delta^\perp$  annihilátor kodisztribúciója  $\Delta$  disztribúciónak, így

$$\langle d\lambda_i, f_i \rangle = L_{f_i} \lambda_i = 0$$

ugyanakkor a Lie zárójel definíciója szerint

$$L_{[f_j, f_k]} \lambda_j = L_{f_j} L_{f_k} \lambda_j - L_{f_k} L_{f_j} \lambda_j = 0$$

ami tehát minden, a  $\Delta^\perp$  kodisztribúciót kifeszítő egzakt differenciálra igaz, így

$$\begin{bmatrix} L_{[f_j, f_k]} \lambda_1 \\ \vdots \\ L_{[f_j, f_k]} \lambda_{m-d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\lambda_1 \\ \vdots \\ d\lambda_{m-d} \end{bmatrix} [f_j, f_k] = 0$$

# Involutivitás $\Rightarrow$ teljes integrálhatóság

Megmutatjuk, hogy lehet találni  $m-d$  darab valós értékű függvényt  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{m-d}$ , melyek egzakt differenciáljai annihilálják a  $\Delta$  disztribúciót.

## 1. Lépés

Keressük  $m-d$  darab vektormezőt, hogy  $\text{span}\{f_1(p), f_2(p), \dots, f_d(p), f_{d+1}(p), \dots, f_m(p)\}$  disztribúció minden  $p$  pontban kifeszítse  $T_p M$  érintőteret.

## 2. Lépés

Definiáljuk az 1. lépésben összegyűjtött vektormezők folyamainak egymás utáni kombinációját

$$\Psi: U \subset \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$$

$$\Psi(z_1, z_2, \dots, z_m) = \phi_{z_1}^{f_1} \circ \phi_{z_2}^{f_2} \circ \dots \circ \phi_{z_m}^{f_m}(x^0)$$

- $\Psi$  egy diffeomorfizmus és létezik inverze
- a  $\begin{bmatrix} \delta \Psi \\ \delta z \end{bmatrix}$  Jacobi-mátrix első  $d$  oszlopa kifeszíti  $\Delta$ -t a  $\Psi(x)$  pontban

## 3. Lépés

Képezzük  $\Psi$  inverzét

$$\phi(x) = \Psi^{-1}(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_d(x) \\ \phi_{d+1}(x) \\ \vdots \\ \phi_m(x) \end{bmatrix}$$

## 4. Lépés

Bebizonyítjuk, hogy a  $\phi_{d+1}, \dots, \phi_m$  függvények pontosan azok, amelyek egzakt differenciáljai kifeszítik a  $\Delta$  disztribúció annihilátor kodisztr.-át.  
 $\rightarrow$  Az identitás  $(\Psi^{-1} \circ \Psi)(z) = z$  leképezést differenciálva előáll a  $\begin{bmatrix} \delta \Psi^{-1} \\ \delta x \end{bmatrix}_{x=\Psi(z)} \begin{bmatrix} \delta \Psi \\ \delta z \end{bmatrix} = I$

összefüggés. A második mátrix első  $d$  oszlopa nem más, mint rendre  $f_1(z), \dots, f_d(z)$ , míg az utolsó  $m-d$  sora rendre  $d\phi_{d+1}(x), \dots, d\phi_m(x)$ , (perze  $x = \Psi(z)$ ) szorzatuk pedig mind 0, amit bizonyítani akartunk

## 42. Háromszög alak

Legyen  $\Delta$  egy  $d$  dimenziójú involutív disztribúció az  $m$  dimenziós  $M$  sokaság felett, amely invariáns egy  $f$  vektormező alatt. Ekkor létezik egy olyan  $z = \phi(x)$  koordinátatranszformáció, amelyre  $f$  alakja

$$\bar{f}(z) = \begin{bmatrix} \bar{f}_1(z_1, z_2, \dots, z_d, z_{d+1}, \dots, z_m) \\ \vdots \\ \bar{f}_d(z_1, z_2, \dots, z_d, z_{d+1}, \dots, z_m) \\ \bar{f}_{d+1}(z_{d+1}, \dots, z_m) \\ \vdots \\ \bar{f}_m(z_{d+1}, \dots, z_m) \end{bmatrix}$$

Bevezetve

$$\mathcal{G}_1 = (z_1, z_2, \dots, z_d)$$

$$\mathcal{G}_2 = (z_{d+1}, \dots, z_m)$$

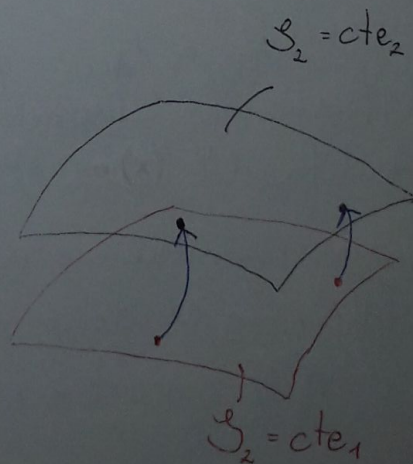
változó particiókat egy háromszög alakot kapunk:

$$\dot{\mathcal{G}}_1 = \bar{f}_1(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$$

$$\dot{\mathcal{G}}_2 = \bar{f}_2(\mathcal{G}_2)$$

Interpretáció:

Az  $f$  integrálgörbéi  $m-d$  dimenziós szeleteket  $m-d$  dimenziós szeletekbe visznek át.



### 43. Relatív fokszám

$\dot{x} = f(x) + g(x)u$  dinamikus rendszer

$y = h(x)$  kimenettel

Az  $y = h(x)$  relatív fokszáma az az egész szám, amelyre

- $L_g L_f^k h(x) = 0$ , ha  $k < r-1$

- $L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$

Lie deriváltak segítségével meghatározható

$0 \leq r \leq n$ , ahol  $n$  a rendszer állapotainak száma

Lineáris esetben:

Az  $y$  kimenet relatív fokszáma  $r$ , ha

- $CA^k B = 0$ , ha  $k < r-1$

- $CA^{r-1} B \neq 0$

44. Koordináta transzformáció, melyben a kimenet relatív fokszámának megfelelő darab integrátor jelenik meg

Legyen az  $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \phi(x) \in \mathbb{R}^n$  koordináta transzformáció első

r eleme

$$\begin{aligned} z_1 &= \phi_1(x) = h(x) \\ z_2 &= \phi_2(x) = L_f h(x) \\ &\vdots \\ z_r &= \phi_r(x) = L_f^{r-1} h(x) \end{aligned}$$

, az utolsó r elemet pedig úgy választjuk, hogy  $L_g \phi_i(x) = 0$  ( $i=r+1, \dots, n$ )  
és  $D\phi$  legyen teljes rangú ( $\Rightarrow$  invertálható a koordináta transzf.)

Egyenletek az új koordinátákban:

első r komponens:

$$\dot{z}_1 = \frac{\delta \phi_1}{\delta x} \dot{x} = L_f h(x(t)) = \phi_2(x(t)) = z_2(t)$$

$$\dot{z}_2 = \frac{\delta \phi_2}{\delta x} \dot{x} = L_f^2 h(x(t)) = \phi_3(x(t)) = z_3(t)$$

$$\vdots$$

$$\dot{z}_{r-1} = \frac{\delta \phi_{r-1}}{\delta x} \dot{x} = L_f^{r-2} h(x(t)) = \phi_r(x(t)) = z_r(t)$$

$$\dot{z}_r = \frac{\delta \phi_r}{\delta x} \dot{x} = L_f^r h(x(t)) + L_g L_f^{r-1} h(x(t)) u(t) := b(z(t)) + a(z(t)) u(t)$$

utolsó  $n-r$  komponens:

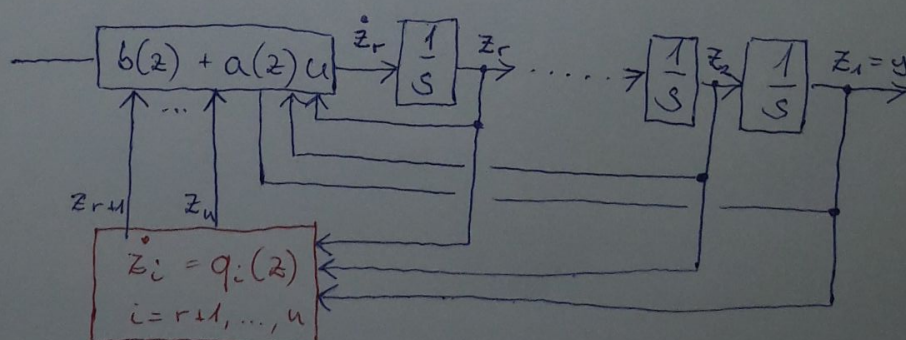
így intéztük, hogy 0 legyen

$$\dot{z}_{r+1} = \frac{\delta \phi_{r+1}}{\delta x} \dot{x} = L_f \phi_{r+1}(x(t)) + L_g \phi_{r+1}(x(t)) u(t) = L_f \phi_{r+1}(x(t)) = q_{r+1}(z)$$

$$\vdots$$

$$\dot{z}_n = \frac{\delta \phi_n}{\delta x} \dot{x} = L_f \phi_n(x(t)) + L_g \phi_n(x(t)) u(t) = L_f \phi_n(x(t)) = q_n(z)$$

integrátorsor:



## 4.5. Zérus dinamika

$$\text{Ha } y(t) \equiv 0$$

$$\begin{pmatrix} \xi = [z_1, z_2, \dots, z_r]^T \\ \eta = [z_{r+1}, \dots, z_n]^T \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow u(t) = -\frac{y(0, \eta(t))}{a(0, \eta(t))}$$

$$\dot{\eta}(t) = q(0, \eta(t)) \quad \eta(0) = \eta_0$$

Adott  $y = h(x)$  kimenet esetén, melynek relatív fokszáma  $r$ , a kimenethez tartozó zérus dinamika alatt a fenti differenciálegyenletet értjük

Számítás átviteli függvényből

$$\xi: z_1 = y = Cx$$

$$z_2 = CAx$$

$$\vdots$$

$$z_r = CA^{r-1}x$$

$$\eta: z_{r+1} = \dot{x}$$

$$\vdots$$

$$z_n = x_{n-r}$$

dinamika  $z = [\xi, \eta]^T$  szerint:

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\vdots$$

$$\dot{z}_{r-1} = z_r$$

$$\dot{z}_r = R\xi + S\eta + Ku$$

$$\dot{\eta} = P\xi + Q\eta$$

zérus dinamika:

Feltéve, hogy  $\xi(t) \equiv 0$ , a következőt kapjuk  $\dot{\eta}$ -ra:

$$\dot{z}_{r+1} = \dot{x}_1 = x_2 = z_{r+2}$$

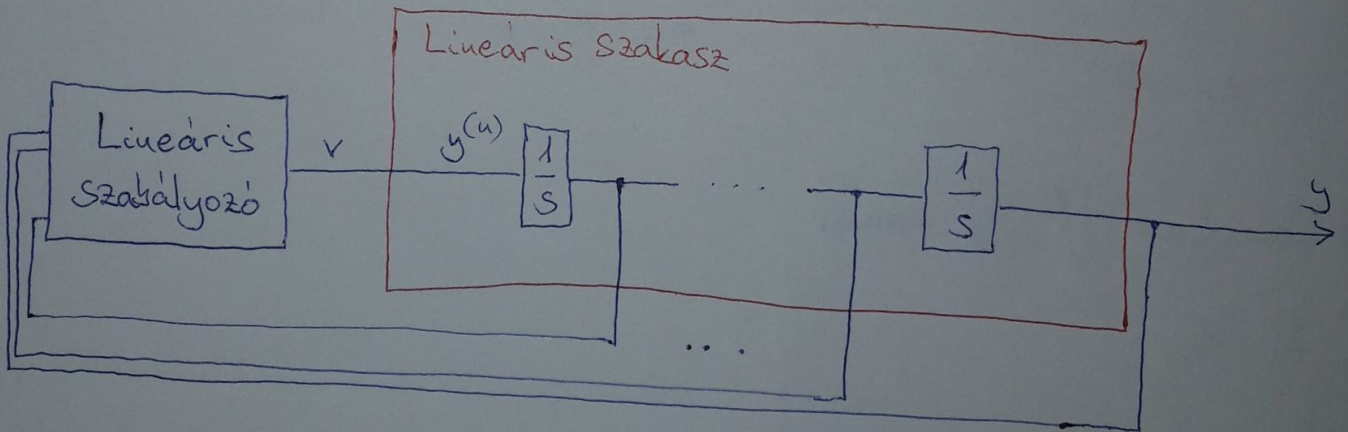
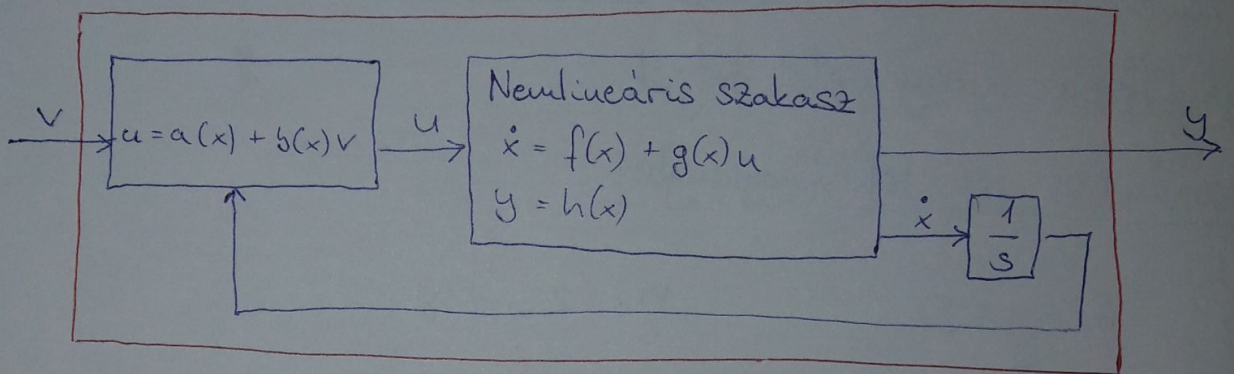
$$\vdots$$

$$\dot{z}_{n-1} = \dot{x}_{n-r+1} = x_{n-r} = z_n$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_n &= x_{n-r+1} = -b_0 x_1 - \dots - b_{n-r-1} x_{n-r} + z_1 = \\ &= -b_0 z_{r+1} - \dots - b_{n-r-1} z_n + z_1 \end{aligned}$$

## 46. Egzakt linearizálás

Egzakt linearizálásnak nevezzük azt a folyamatot, melynek során egy nemlineáris, dinamikus rendszert egy ekvivalens, lineáris állapotteres leírásá alakítunk diffeomorfizmus segítségével





## 47. Egzakt linearizálhatóság feltétele

Egy egybemenetű nemlineáris rendszer ( $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ ) akkor és csak akkor linearizálható állapotviszacsatolással, ha létezik egy olyan valós értékű  $\lambda(x)$  függvény, amellyel definiált  $y = \lambda(x)$  kimenet relatív fokszáma maximális, azaz  $n$  ( $= \dim x$ )

Szükségesség bizonyítása:

( $\exists$  linearizáló kimenet  $\Rightarrow$  linearizálhatóság)

Linearizáló kimenet esetén  $r = n = \dim x$

- $L_g L_f^k \lambda(x) = 0$ , ha  $0 \leq k < n-1$
- $L_g L_f^{n-1} \lambda(x) \neq 0$

szokásos koordináta trafo: ( $z = \phi(x)$ )

$$z_1 = \lambda(x)$$

$$z_2 = L_f \lambda(x)$$

$\vdots$

$$z_{n-1} = L_f^{n-2} \lambda(x)$$

$$z_n = L_f^{n-1} \lambda(x)$$

diff.  $\rightarrow$

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = z_3$$

$\vdots$

$$\dot{z}_{n-1} = z_n$$

$$\dot{z}_n = L_f^n \lambda(\phi^{-1}(z)) + L_g L_f^{n-1} \lambda(\phi^{-1}(z))u$$

Az „új” bemenet legyen

$$v = L_f^n \lambda(\phi^{-1}(z)) + L_g L_f^{n-1} \lambda(\phi^{-1}(z))u = \alpha(z) + \beta(z)u$$

Tehát a definiált  $z = \phi(x)$  transzformáció és az

$$u = \frac{1}{\beta(z)} (v - \alpha(z))$$

viszacsatolás a rendszert zárt körben lineáris (egymás után kötött  $n$  darab integrátorból álló)  $y^{(n)} = v$  rendszerre alakította át, amivel a szükségességet bizonyítottuk

## Elégesség bizonyítása

(lineárizálhatóság  $\Rightarrow \exists$  maximális relatív fokszámú kimenet)

Abból indultunk ki, hogy az  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  rendszerrel egy

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

visszacsatolással át tudjuk alakítani a

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x)v$$

rendszerre, amelyhez létezik egy  $z = \phi(x)$  koordináta transzformáció, hogy az utána kapott dinamika

$$\dot{z} = Az + Bv,$$

ahol

$$A_z = \left[ \frac{\delta \phi}{\delta x} (f(x) + g(x)\alpha(x)) \right]_{x=\phi^{-1}(z)}$$

$$B = \left[ \frac{\delta \phi}{\delta x} (g(x)\beta(x)) \right]_{x=\phi^{-1}(z)}$$

A bizonyításhoz:

- 1, Bebizonyítjuk, hogy a relatív fokszám invariáns a visszacsatolásra és a koordináta transzformációra.
- 2, Bebizonyítjuk, hogy a lineáris rendszernek van egy maximális fokszámú kimenete.

1, Fokszám invariancia koordináta transzformációra

eredeti rdse:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

$$y = h(x)$$

transzformált rdse:

$$\dot{z} = \bar{f}(z) + \bar{g}(z)u$$

$$y = \bar{h}(z)$$

koordináta transzformáció  $z = \phi(x)$

$$\bar{f}(z) = \left[ \frac{\delta \phi}{\delta x} f(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)}$$

$$\bar{g}(z) = \left[ \frac{\delta \phi}{\delta x} g(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)}$$

$$\bar{h}(z) = h(\phi^{-1}(z))$$

$$I(x) = \phi^{-1}(\phi(x))$$

$$\left[ \frac{\delta \phi^{-1}}{\delta z} \right] \left[ \frac{\delta \phi}{\delta x} \right]_{x=\phi^{-1}(z)} = I$$

Lie deriváltak vizsgálata:

$$L_{\bar{f}} \bar{h}(z) = \frac{\delta \bar{h}}{\delta z} \bar{f}(z) = \left[ \frac{\delta h}{\delta x} \right]_{x=\phi^{-1}(z)} \left[ \frac{\delta \phi^{-1}}{\delta z} \right] \left[ \frac{\delta \phi}{\delta x} f(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} =$$

$$= \left[ \frac{\delta h}{\delta x} f(x) \right]_{x=\phi^{-1}(z)} = [L_f h(x)]_{x=\phi^{-1}(z)}$$

hasolóképpen:

$$L_{\bar{g}} \bar{h}(z) = [L_g h(x)]_{x=\phi^{-1}(z)} \quad L_{\bar{g}} L_{\bar{f}}^k \bar{h}(z) = [L_g L_f^k h(x)]_{x=\phi^{-1}(z)}$$

amiből következik, hogy  $L_g L_f^k h(x) = 0 \Leftrightarrow L_{\bar{g}} L_{\bar{f}}^k \bar{h}(x) = 0$

és  $L_g L_f^k h(x) \neq 0 \Leftrightarrow L_{\bar{g}} L_{\bar{f}}^k \bar{h}(x) \neq 0$ , tehát a relatív fokszámot a transzformáció változatlanul hagyja.

## 2. Fokszám invariancia visszacsatolásra

Tekintsük az  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$  visszacsatolást ( $\beta(x) \neq 0$ ) és tegyük fel, hogy egy  $y = h(x)$  kimenet relatív fokszáma  $r$ . A visszacsatolt rendszer egyenlete:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x)v$$

Tehát azt kell belátni, hogy

- $L_{g\beta} L_{f+g\alpha}^k h(x) = 0$ , ha  $0 \leq k \leq r-2$  (i)
- $L_{g\beta} L_{f+g\alpha}^k h(x) \neq 0$ , ha  $k = r-1$  (ii)

(i): a bizonyítás indukcióval történik;  $L_f^0 h(x) = L_{f+g\alpha}^0 h(x)$  triv. igaz

feltéve, hogy valamilyen  $k$ -ra igaz

$$L_{f+g\alpha}^{k+1} h(x) = L_{f+g\alpha} L_{f+g\alpha}^k h(x) = L_f^{k+1} h(x) + \alpha(x) L_g L_f^k h(x) = L_f^{k+1} h(x)$$

mivel  $L_g L_f^k h(x) = 0$ , ha  $k \leq r-2$

(ii) viszont az előzőekből következik, hogy  $L_{g\beta} L_{f+g\alpha}^k h(x) = 0$ ,  
 ha  $0 \leq k \leq r-2$ , valamint ha  $\beta(x) \neq 0$ , akkor

$$L_{g\beta} L_{f+g\alpha}^k h(x) = \beta(x) L_g L_{f+g\alpha}^k h(x) \neq 0$$

ha  $k = r-1$

Most vegyük megint a  $\dot{z} = Az + Bv$  lineáris rendszert,  
 amelyet az eredeti nemlineáris rendszerből állapotviszacsatolással  
 és koordináta transzformációval kaptunk. Tudjuk, hogy egy  
 újabb (lineáris) állapotviszacsatolással és  $\mathcal{S} = Tz$   
 koordináta transzformációval egy  $n$  elemű integrátor-  
 sorra alakíthatjuk:

$$T(A + BK)T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad T B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ahol  $K$  az állapotviszacsatolás vektora. Az integrátorsor  
 tetejének  $y = \bar{h}(\mathcal{S}) = [1, 0, \dots, 0] \mathcal{S}$  relatív fokszáma éppen  
 $n$ , ami viszont az eredeti nemlineáris rendszerben is  
 ugyan ennyi, hiszen a relatív fokszám mind az állapot-  
 visszacsatolásra, mind a koordináta transzformációra  
 invariáns.

### 48. Relatív fokszám MIMO esetben

A kimenetek relatív fokszámának (ha létezik) egy  $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$  vektort nevezünk, amelyre teljesül, hogy

- $L_{g_j} L_f^k h_i(x) = 0$  minden  $1 \leq j \leq m$ , minden  $k < r_i - 1$  és minden  $1 \leq i \leq m$  értékekre
- az alábbi mátrix nem szinguláris

$$A(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ L_{g_1} L_f^{r_2-1} h_2(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_2-1} h_2(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(x) \end{bmatrix}$$

### 49. MIMO rendszer linearizálhatóságának feltétele

Egy nemlineáris,  $m$  bemenetű

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i$$

dinamikus rendszer akkor és csak akkor linearizálható statikus állapotviszacsatolással, ha található  $m$  darab skálár értékű függvény,  $\lambda_j(x)$ , ( $1 \leq j \leq m$ ), hogy az általuk definiált kimenetek,  $y_j = \lambda_j(x)$  relatív fokszám vektora létezik és elemeinek összege pontosan  $n = \dim x$