1) Használt alkatrészeket különböző dobozokban tárolnak. Az első dobozban 50 alkatrész van, 10%-a selejtes (a többi még használható), a második dobozban 100 alkatrész van, 20%-a selejtes, a harmadikban pedig 1000 és ennek 30%-a selejtes.

a) Az első dobozból húzok ötször visszatevés nélkül, mi a valószínűsége, hogy lesz benne selejtes? (3p)

$X \sim \text{Hipergeom}(N=50, M=5, n=5)$

$P(\text{lesz benne selejtes}) = 1 - P(0 \text{ selejtes}) = 1 - \frac{\binom{45}{5}}{\binom{50}{5}}$

.

b) A második dobozból húzok tízszer visszatevéssel, mi a valószínűsége, hogy a kihúzottak között lesz legalább 2 selejtes? (3p)

$Y \sim \text{Binom}(10, p=0{,}2)$

$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y=1) - P(Y=0) = 1 - \binom{10}{1} 0{,}2 \cdot 0{,}8^9 - 0{,}8^{10}$

c) A harmadikból húzok 300-szor visszatevéssel, adj **közelítést** annak a valószínűségére, hogy pontosan 60 selejtes lesz közöttük! (3p)

$\underbrace{np = 300 \cdot 0{,}3 = 90}_{E(X)}$ $\underbrace{\sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{90 \cdot 0{,}7} \approx 7{,}937}_{D(X)}$

$W \sim N(90; 7.937)$

$Z = \frac{W-90}{7{,}937}$

$P(X=60) \approx P(59{,}5 < W < 60{,}5) = \Phi\Big(\underbrace{\frac{60{,}5-90}{7{,}937}}_{-3{,}71}\Big) - \Phi\Big(\underbrace{\frac{59{,}5-90}{7{,}937}}_{-3{,}84}\Big) = 4 \cdot 10^{-5}$

practically zero

d) Összeöntjük a három doboz tartalmát. Mi a valószínűsége, hogy ha egy alkatrészt választunk, az selejtes lesz? Ha szintén összeöntés után választottunk egy selejtest, az az első dobozból való volt? (3p)

összesen : $50 + 100 + 1000 = 1150$

selejt : $5 + 20 + 300 = 325$

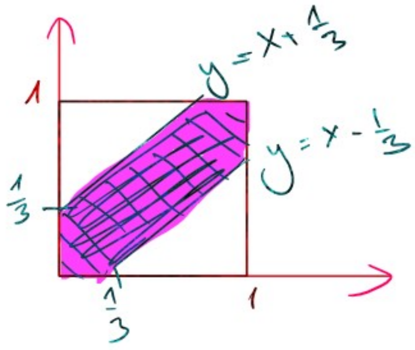
$P(\text{selejt}) = \frac{325}{1150}$

$P(1. \text{ doboz} \mid \text{selejt}) = \frac{P(1. \text{ doboz} \cap \text{selejt})}{P(\text{selejt})} = \frac{5}{325}$

P(sdeyt)

2) Béla és Géza különböző buszokkal (tehát egymástól függetlenül) érkeznek megbeszélt találkozójukra 13 és 14 óra között, egyenletes eloszlás szerint.

a) Max 20 percet hajlandóak egymásra várni, mi a valószínűsége, hogy találkoznak? (5p)



1 órás intervallum

$|X - Y| < \frac{1}{3}$

$x - \frac{1}{3} < y < x + \frac{1}{3}$

$P(\text{találkoznak}) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$

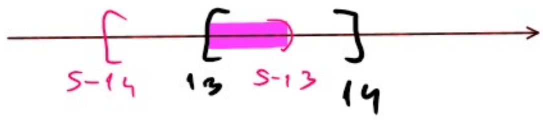
b) Mi lesz két $Uni(13, 14)$ valváltozó összegének sűrűségfüggvénye? (6p)

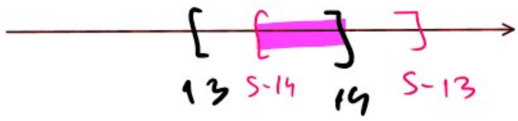
$26 < s < 28$

$13 < X < 14$

$13 < \underbrace{S - X}_{y} < 14$

$s - 14 < x < s - 13$





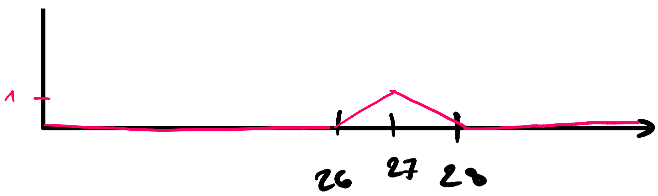
$$f_{X+Y}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \cdot f_2(s-x)\,dx$$

$$\int_{13}^{s-13} 1 \cdot 1\,dx = s - 26$$

$$f_1(x) = f_2(y) = 1$$

$$\int_{s-14}^{14} 1 \cdot 1\,dx = 28 - s$$

$$f_{X+Y}(s) = \begin{cases} s - 26 & 26 < s < 27 \\ 28 - s & 27 < s < 28 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$



egyvonat

c) Ha Béla odaért 13:20-ra akkor mi a valószínűsége, hogy Géza 13:50 előtt érkezik meg? (3p)

Béla & Géza független

$P(G\ 13{:}50 \text{ előtt} \mid \text{Béla } 13{:}20) = P(G\ 13{:}50 \text{ előtt}) =$

$= \frac{50}{60} = \underline{\underline{\frac{5}{6}}}$

d) Mi lesz a később érkező időpontjának sűrűségfüggvénye? (3p)

<u>Béla</u>

$X \sim$ Géza $\quad Y \sim$ Béla

$P(\max(X,Y) < x) = P(X < x \cap Y < x) =$

$P(X<x) \cdot P(Y<x) = \underline{x^2}$

$f(x) = 2x$

3) Spike és Jet fejvadászok, a sikeres megbízások (bounty-k) száma, amiket havonta együtt teljesítenek $Poisson(5)$ eloszlásúak.

a) Mi a valószínűsége, hogy két bounty között több, mint egy hét telik el?(3p)

1 hónap = 4 hét
1 hónap = 30 nap
} mindkettőt elfogadtam

$Y \sim EXP(5)$

$P(Y > \frac{1}{4}) = 1 - (1 - e^{-\frac{5}{4}}) = e^{-\frac{5}{4}}$

$P(Y > \frac{7}{30}) = 1 - (1 - e^{-\frac{35}{30}}) = e^{-\frac{7}{6}}$

b) Ha az első héten begyűjtöttek 3-at, mi a valószínűsége, hogy a 2. héten ~~hét végéig~~ legalább 2-t fognak? (3p)

b) Ha az első héten begyűjtöttek 3-at, mi a valószínűsége, hogy a 2. hét ~~végéig~~ héten legalább 2-t fognak? (3p)

Diszjunkt intervallumok számai függetlenek Poissonnál

$X \sim \text{Poisson}(5)$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X=1) - P(X=0) = 1 - \frac{5}{4}e^{-\frac{5}{4}} - e^{-\frac{5}{4}}$$

vagy

$$1 - \frac{7}{6}e^{-\frac{7}{6}} - e^{-\frac{7}{6}}$$

c) a 4. bounty-t a 2. hét végéig gyűjtik be? (3p)

$Z \sim \text{Erlang}(\lambda = 5, n = 4)$ $t = \frac{1}{2}$

$$P\left(Z < \frac{1}{2}\right) = 1 - \sum_{k=0}^{3} \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^k}{k!}$$

4) Legyen X, Y együttes sűrűségfüggvénye $f(x,y) = e^{(x+y)}$ a $0 < x < a, 0 < y < a$ négyzeten (mindenhol máshol nulla).

a) Mennyi a? (4p)

$$\int_0^a \int_0^a e^{x+y}\,dx\,dy = \int_0^a \left[e^{x+y}\right]_0^a dy = \int_0^a e^{a+y} - e^y\,dy =$$

$$= \left[e^{a+y} - e^y\right]_0^a = e^{2a} - e^a - e^a + e^0 = 1$$

$$e^{2a} = 2e^a$$

$$e^a = 2$$

$$a = \ln 2$$

b) Független-e X és Y? (Indokolj!) (3p)

$$f_1(x) = \int_0^{\ln 2} e^{x+y}\,dy = \left[e^{x+y}\right]_0^{\ln 2} = e^{x+\ln 2} - e^{x+0} = \underline{\underline{e^x(2-1)}}$$

$$f_2(y) = e^y \quad \text{(ugyanígy)}$$

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y \quad \checkmark \qquad \text{FÜGGETLENEK}$$

c) Mennyi $P(Y > X)$?(2p)

Szimmetria miatt (az $f(x,y)$ és a négyzet szimmetriája miatt)

$P(Y>X) = \frac{1}{2}$

Nem elég a négyzet szimmetriájára hivatkozni, NEM geometriai valószínűség

Integrállal is így:

$$\int_0^{\ln 2}\int_x^{\ln 2} e^{x+y}\,dy\,dx = \int_0^{\ln 2}\left[e^{x+y}\right]_x^{\ln 2} dx = \int_0^{\ln 2} e^{x+\ln 2} - e^{2x}\,dx =$$

$$= \left[e^{x+\ln 2} - \frac{e^{2x}}{2}\right]_0^{\ln 2} = \underbrace{e^{2\ln 2} - \frac{e^{2\ln 2}}{2}}_{2} - \underbrace{e^{\ln 2}}_{2} + \underbrace{\frac{e^0}{2}}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

d) Mennyi $E(X)$ és $E(X|Y)$? (3p)

Mivel X és Y függetlenek

$$E(X) = E(X|Y) = \int^{\ln 2} e^x \cdot x\,dx = \left[e^x x - e^x\right]^{\ln 2} =$$

$$E(X) = E(X|Y) = \int_0 e^x \cdot x \, dx = \left[e^x x - e^x\right]_0 =$$

$$= 2 \cdot \ln 2 - 2 - 0 + 1 = 2\ln 2 - 1$$

e) Mennyi $CORR(X, Y)$?(1p)

Mivel X és Y függetlenek $CORR(X,Y) = 0$

5) Egy cinkelt érmét dobálunk, a fej valószínűsége p. A következő adatsorunk van az első fej megjelenésére: $(2, 3, 1, 2, 3, 3, 2, 1, 4, 4, 4, 2, 3, 2, 1, 4)$.

a) Adj Maximum Likelihood becslést a p-re! (4p)

3 db 1-es

5 db 2-es

4 db 3-as

4 db 4-es

$$\ell(x;p) = (p)^3 \cdot ((1-p)\cdot p)^5 ((1-p)^2 \cdot p)^4 ((1-p)^3 \cdot p)^4 =$$

$$= p^{16} (1-p)^{25}$$

$$L(x,p) = \log(\ell(x;p)) = 16 \cdot \log p + 24 \log(1-p)$$

$$\frac{\partial L}{\partial p} = \frac{16}{p} - \frac{25}{1-p} = 0$$

$$16(1-p) - 25p = 0$$

$$16 - 41p = 0$$

$$p = \frac{16}{41}$$

vagy általánosan:

$$P(X_1 = a_1, X_2 = a_2, \ldots, X_k = a_k) = \prod_{i=1}^{k} (1-p)^{a_i - 1} \cdot p = p^k (1-p)^{-k + \sum_{i=1}^{k} a_i} = \ell(x;p)$$

$$L(x,p) = k \cdot \log p + \left(\sum_{i=1}^{k} a_i - k\right) \log(1-p)$$

$$L(x,p) = k \cdot \log p + \left(\sum_{i=1}^{k} a_i - k\right) \log(1-p)$$

$$\frac{\partial L}{\partial p} = \frac{k}{p} - \frac{\sum_{i=1}^{k} a_i - k}{1-p} = 0$$

$$\frac{1-p}{p} = \frac{1}{k} \sum_{1}^{k} a_i - 1$$

$$p = \frac{1}{\frac{1}{k} \sum a_i} = \frac{1}{\overline{x}}$$

$$\overline{x} = \frac{41}{16} \qquad \underline{p = \frac{16}{41}}$$

b) Valaki megmondja, hogy $p = 0,4$. Mi a valószínűsége, hogy a 3. fej a 8. dobásnál lesz? (3p)

$$X \sim \text{NegBinom}(p = 0.4, n = 8)$$

$$P(X = 3) = \binom{7}{2} 0,4^3 \cdot 0,6^5$$

c) Legyen $p = 0.4$ továbbra is. Ha az első 5 dobásnál nem volt fej, mi a valószínűsége, hogy a 7.-nél lesz először? (2p)

A geom is örökifjú nem (számít az első 5 dobás)

$$P(X = 2) = 0,6 \cdot 0,4$$