A Számítástudomány alapjai

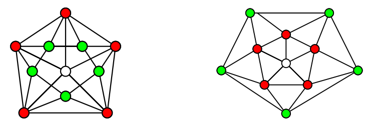
2. ZH javítókulcs (2015. 11. 26.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. A 12 pontú G gráf úgy keletkezik, hogy egy 5 pontú kör minden csúcsát összekötjük egy 7 pontú kör minden csúcsával. Határozzuk meg G kromatikus számát, $\chi(G)$-t.

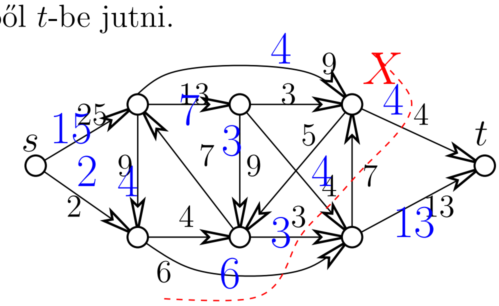
   Mivel az 5-pontú kör bármely pontja a 7 pontú kör minden pontjával össze van kötve, ezért semelyik olyan szín, amit az 5 pontú kör valamelyik pontjához használtunk nem használtó a 7 pontú kör egyik pontjához sem. (3 pont)
   Mivel sem az 5-pontú, sem a 7-pontú kör nem páros, ezért bármelyik kiszínezéséhez legalább 3 szín szükséges. Az előző megjegyzésünk értelmében ezen színeknek különgbőzőkenek kell lenniük, ezért G színezéséhez legalább $3 + 3 = 6$ szín szükséges. (3 pont)
   Azt kell még megmutatnunk, hogy 6 szín elegendő is. (1 pont)
   Ha pl az 5 pontú kört kiszínezzük 3 színnel, és a 7 pontú kört az eddig használtaktól különböző 3 színnel, akkor éppen G egy 6-színezését kapjuk, (2 pont)
   tehát $\chi(G) = 6$. (1 pont)

2. Síkbarajzolható-e a jobb oldali ábrán látható gráf?
   Igen, síkbarajzolható, pl az ábrán látható módon. (10 pont)

3. A sithek Sötét Testvérisége az alábbi gráf s csúcsából készül csapást mérni a Jedi Tanács t támaszpontjára oly módon, hogy a sithek a gráf élei mentén szeretnének t-be eljutni. (Egy sith sosem halad visszafelé egy
   élen.) Az élekre írt számok azt jelzik, hány jedi őrszemet kell az adott útvonalra telepíteni ahhoz, hogy az ott próbálkozó sitheket megállítsák. Határozzuk meg, legalább hány őrszem szükséges a támaszpont biztosításához, azaz ahhoz, hogy egyetlen sith se tudjon s-ből t-be jutni.

   A feladat megfogalmazható úgy is, hogy ha a megadott gráfban az élekre írt számokat az adott kapacitásnak értelmezzük, akkor minimális kapacitású st-vágást kell találnunk. (2 pont)
   Ezért az órán tanult növelő utas módszerrel maximális nagyságú folyamot keresünk, és ennek segítségével találjuk meg a minimális vágást. (2 pont)

   Az ábra egy 17 nagyságú folyamot mutat (a nagyobb, kékkel írt számok jelentik az adott élen a folyamértéket, ha nincs kék szám, akkor ez 0), (2 pont)
   ezért legalább 17 jedi őrszemre van szükség a támaszpont biztosításához. (1 pont)
   A szaggatott vonallal jelzett X halmaz egy 17 kapacitású st-vágást indukál, (1 pont)
   ezért 17 jedi őrszem elegendő az esemény biztosításához. (1 pont)
   A feladat kérdésére a válasz tehát 17. (1 pont)

4. Tegyük fel, hogy a G egyszerű, páros gráf mindkét színosztálya egyenként 99 pontot tartalmaz, az A színosztályban minden pont foka legalább 66, B-ben pedig legalább 33. Mutassuk meg, hogy G-nek van teljes párosítása.

   A Frobenius tétel értelmében azt kell megmutatnunk, hogy a két színosztály mérete megegyezik (ami igaz, hisz 99 pontúak), (1 pont) valamint, hogy (mondjuk) az A színosztályra teljesül a Hall-feltétel, azaz az A bármely X részhalmazára $|N(X)| \geq |X|$ teljesül. (2 pont)

Legyen tehát $X \subseteq A$. Ha $X = \emptyset$, akkor a feltétel nyilvánvalóan igaz. Ha $1 \leq |X| \leq 66$, akkor $x \in X$ esetén $|X| \leq 66 \leq d(x) \leq |N(X)|$, tehát teljesül a Hall-feltétel. (3 pont)

Ha pedig $|X| > 66$, akkor $|A \setminus X| < 33$, ezért mivel B bármely pontjának a fokszáma legalább 33, ezért bizonyosan van X-beli szomszédja. (2 pont)

Ezek szerint $N(X) = B$, tehát $|X| \leq 99 = |B| = |N(X)|$, a Hall-feltétel ekkor is teljesül, és ezzel az állítás igazoltuk. (2 pont)

Használható Kőnig tétele is.

A G gráfnak pontosan akkor van teljes párosítása, ha $\nu(G) \geq 99$. (1 pont)

A G gráf páros, így a Kőnig-tétel miatt $\nu(G) = \tau(G)$ (2 pont)

elegendő tehát megmutatni, hogy $\tau(G) \geq 99$. (1 pont)

Legyen tehát X a G egy lefogó ponthalmaza. Ha $|X| < 99$, akkor mindkét színosztálynak van X-en kívüli pontja, A-nak mondjuk a, B-nek mondjuk b. Ahhoz, hogy minden a-ból induló élt lefogjon az X halmaz az kell, hogy a minden szomszédja X-ben legyen, (2 pont)

tehát $|X \cap B| \geq d(a) \geq 66$. (1 pont)

Hasonlóan, ahhoz, hogy minden b-ből induló él le legyen fogva, az szükséges, hogy b minden szomszédja X-ben legyen, tehát $|X \cap A| \geq d(b) \geq 33$. (2 pont)

Ekkor $99 > |X| = |X \cap B| + |X \cap A| \geq 66 + 33 = 99$. A kapott ellentmondás a feladat állítását igazolja. (1 pont)

5. Oldjuk meg a $31x \equiv 13(131)$ lineáris kongruenciát.

Mivel $(4, 131) = 1$, a 4-gyel szorzás ekvivalens átalakítás: $124x \equiv 52(131)$, (2 pont)

azaz $-7x \equiv 52(131)$. (2 pont)

Hasonló okból tudunk 19-cel szorozni: $-133x \equiv 19 \cdot 52 = 988(131)$, (2 pont)

amit redukálva $-2x \equiv 71(131)$, azaz $2x \equiv 60$ adódik. (2 pont)

Most tudunk 2-vel osztani, és megkapjuk a megoldást, ami $x \equiv 30(131)$. (2 pont)

Ha valaki rámutat, hogy $(131, 31) = 1 \mid 13$ miatt pontosan egy mod 131 maradékosztály a megoldás, de más munkát nem végez, kapjon 2 pontot.

6. Ura születésnapjára Tűzvirág egy 77 gyönggyel díszített, mangalicabőr tokot varrt Vérbulcsú ivótülkéhez. Annyira elégedett volt az eredménnyel, hogy Vérbulcsú hagyományőrző dorombegyüttesének minden tagját is ugyanilyen tokkal lepte meg, hogy jól mutasson a csapat a tarsolylemezek mellett csüngő tülkökkel amikor fellépnek Dobogókőn a táltosünnep 50 személyes központi jurtájában. Mivel a kínai boltban százasával árulják a gyöngyöket, 7 gyöngy kimarad, melyekkel Tűzvirág a hétköznapi pártáját ékesítette. Hányan dorombolnak Vérbulcsú zenekarában?

Legyen a zenekar létszáma x. Mivel elférnek a jurtában, ezért $1 \leq x \leq 50$. (2 pont)

Tudjuk, hogy a bőrtokokat $77x$ gyöngy díszíti, amihez hozzávéve Tűzvirág pártájának 7 gyöngyét, 100-zal osztható számot kapunk, (2 pont)

azaz a $77x + 7 \equiv 0(100)$ kongruencia adódik. (1 pont)

A 7-tel osztás ekvivalens átalakítás, tehát $11x + 1 \equiv 0(100)$, vagy másképpen $11x \equiv -1(100)$. (1 pont)

Mivel $(9, 100) = 1$, ezért a 9-cel szorzás ekvivalens átalakítás, azaz $99x \equiv -9(100)$. (1 pont)

Ezt átírva $-x \equiv -9(100)$, (1 pont)

majd a (-1)-gyel szorzás is ekvivalens átalakítás, így $x \equiv 9(100$ adódik. (1 pont)

A zenekar létszáma tehát 9 maradékot ad 100-zal osztva, amit összevetve az első megállapításunkkal $x = 9$ adódik a kérdezett létszámra. (1 pont)

Kongruenciák nélkül is megoldható a feladat.

Mivel 7 db gyöngy maradt ki, ezért az x db tokhoz felhasznált $77x$ gyöngy 10-es számrendszerbeli felírása $\ldots 93$-ra végződik. (3 pont)

Olyan 1 és 50 közötti x-et keresünk tehát, amelyre a $77x$ szorzat $\ldots 93$-ra végződik. Mivel a szorzat utolsó jegye csak az egyes helyiértéken álló számjegyektől függ, és $7x$ utoló jegye 3, ezért x-nek 9-re kell végződnie. (4 pont)

Ha kipróbáljuk a szóba jövő $9, 19, 29, 39$ és 49 számokat, akkor azt kapjuk, hogy csakis $x = 9$ esetén van ez így, ennyi tehát a kérdésre a válasz. (3 pont)