Jelek és rendszerek II.

I. HÁZI FELADAT VILLAMOSMÉRNÖK SZAKOS HALLGATÓK RÉSZÉRE

Név	Berényi Norbert
Neptun kód	AM2QPO
Házi feladat kódja	3626030901
Beadási határidő:	7. oktatási hét

Megjegyzések: *Le kell töltenie a feladatlapot (a hálózat és a gerjesztőjel adataival együtt), továbbá a hálózat ábráját, és ezeket a megoldással együtt írásban kell benyújtani. Ha javítás, illetve részfeladat külön beadása miatt többször adja be a házi feladatot, minden alkalommal az előző részeket is* és a feladatlapot is be kell adni. *Javítás esetén a hibás részt kicserélni nem szabad még akkor sem, ha valamelyik feladat megoldását elölről kezdi. A javítást külön lapon kell mellékelni, megjelölve, melyik pont korrekciójáról van szó. Ügyeljen az áttekinthető és világos külalakra! A teljes megoldást minden esetben részletesen le kell írni,* nem elegendő a végeredményeket közölni*! A numerikus számításokra és az ábrák elkészítésére természetesen alkalmazhat számítógépi programokat (MATLAB, DERIVE stb.), de* a megoldás elvi lépéseit *ekkor is* részletesen *ismertetni kell.*

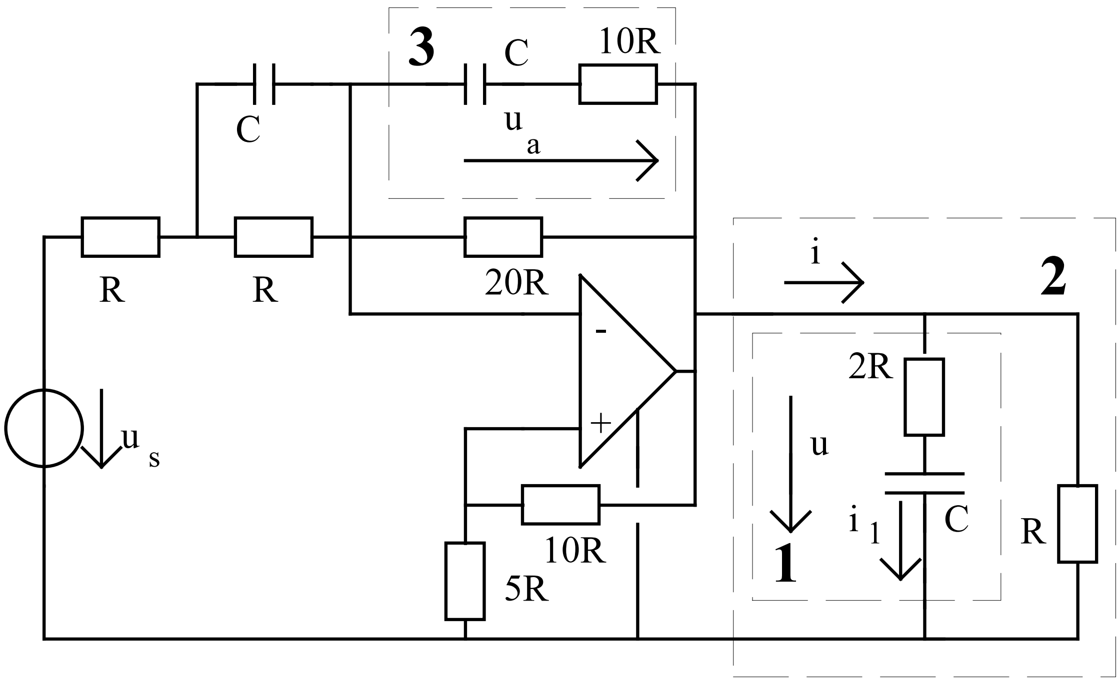
Gyakorlatvezető neve:

Javító véleménye (elfogadás, javítások):

Az ábrán megadott lineáris invariáns hálózat **gerjesztése a feszültségforrás feszültsége**, **válasza a 01** kimeneti jel.

H36

Válaszjel: u, u_a, i, i_1 A vizsgált kétpólus: 1, 2, 3

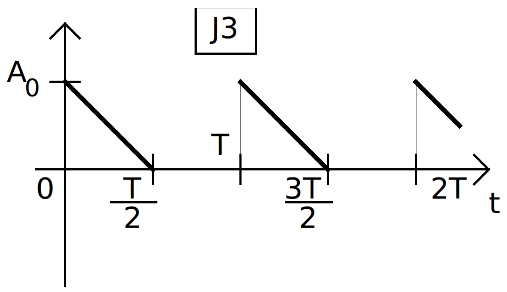


R = C =

R	C
$80k\Omega$	$200pF$

1. feladat

A hálózat gerjesztése az alábbi periodikus jel:



A_0	T/τ	τ
15 V	1.2	$\tau = 1 \cdot CR$

1.1 Határozza meg ezen periodikus jel legalább négy (nem zérus) harmonikust tartalmazó Fourier-polinomját! Írja fel a Fourier-polinomot komplex és valós együtthatós alakban!

1.2 Határozza meg a jel effektív értékét pontosan és a választott Fourier-polinom közelítésben is! Adja meg a közelítés relatív hibáját!

1.3 Határozza meg a rendszer átviteli karakterisztikáját!

1.4 Határozza meg a válasz Fourier-polinomját az előző feladatban számított közelítésben! Határozza meg közelítőleg a válasz effektív értékét!

1.5 (Nem kötelező!) Rajzolja fel az átviteli karakterisztika Bode- és Nyquist-diagramját!

2. feladat

A gerjesztés az 1. feladatban megadott jel első periódusa; a $(0, T)$ intervallumon kívül zérus a jel értéke.

2.1 Határozza meg az aperiodikus gerjesztő jel komplex spektrumát!

2.2 Ábrázolja az amplitúdóspektrumot, és ennek alapján adja meg a jel sávszélességét! ($\varepsilon = 0.05$)

2.3 Írja fel a válasz komplex spektrumát!

3. feladat

3.1 Határozza meg az átviteli függvényt! Számítsa ki az átviteli függvény pólusait és zérusait, vázolja fel a pólus-zérus elrendezést!

3.2 Határozza meg az impulzusválaszt az átviteli függvény alapján, és vázolja az impulzusválasz időfüggvényét!

3.3 Határozza meg a választ, ha a gerjesztőjel $A_0\varepsilon(t)\left(1 - e^{-t/T}\right)$! Vázolja a válaszjelet!

4. feladat

A feladat megoldása nem kötelező! Ellenőrizze a számításokat a TINA hálózatanalízis program segítségével!

Koherens egységrendszer: $\left[V, mA, k\Omega, \mathrm{nF}, \mathrm{\mu s}, \frac{\mathrm{Mrad}}{s}\right]$

1.1

$$u(t) = A_0 - 2 \cdot A_0 \cdot \frac{t}{T}$$

$$A_0 = 15\,V$$

$$R = 80\,k\Omega, \qquad C = 200pF = 0{,}2\,\mathrm{nF}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 0.3272\,\frac{\mathrm{Mrad}}{s}$$

$$\tau = RC = 16$$

$$T = 1{,}2 \cdot \tau = 1{,}2 \cdot 16 = 19{,}2\,\mathrm{\mu s}$$

$$U_0 = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} u(t) \cdot dt = \int_0^{T/2} A_0 - 2 \cdot A_0 \cdot \frac{t}{T} \cdot dt = \frac{A_0}{4} = \frac{15}{4} = 3{,}75\,V$$

Fourier-sorfejtés komplex együtthatós alakban:

$$U_0^C = U_0 = 3{,}75\,V$$

$$U_k^C = \frac{1}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} u(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} \cdot dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(A_0 - 2 \cdot A_0 \cdot \frac{t}{T}\right) \cdot e^{-jk\omega_0 t} \cdot dt =$$
$$= -\frac{A_0 \cdot \left((-1)^k - 1\right)}{2 \cdot \pi^2 \cdot k^2} - \frac{j \cdot A_0}{2 \cdot \pi \cdot k}\,V$$

$$u(t) = U_0^C + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(U_k^C \cdot e^{-jk\omega_0 t}\right) = 3{,}75 + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\left(-\frac{A_0 \cdot \left((-1)^k - 1\right)}{2 \cdot \pi^2 \cdot k^2} - \frac{j \cdot A_0}{2 \cdot \pi \cdot k}\right) \cdot e^{-jk\omega_0 t}\right) V$$

Fourier-sorfejtés valós együtthatós alakban:

$$U_k^C = \frac{U_k^A - j \cdot U_k^B}{2}$$

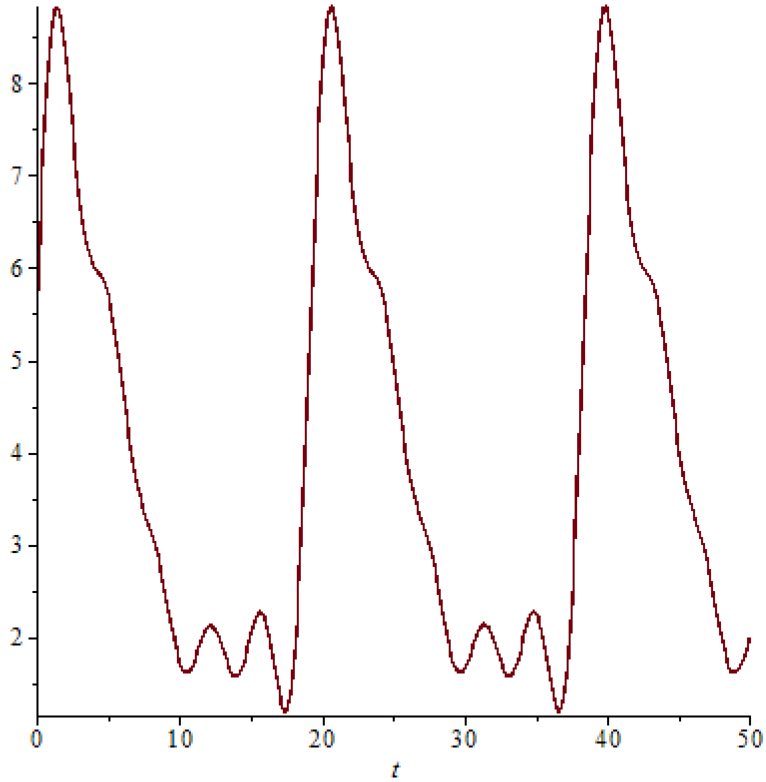
$$U_k^A = 2 \cdot Re\{U_k^C\} = -\frac{A_0(-1 + (-1)^2)}{2 \cdot k^2 \cdot \pi^2}\,V$$

$$U_k^B = -2 \cdot Im\{U_k^C\} = \frac{A_0}{2 \cdot \pi \cdot k}\,V$$

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(U_k^A \cdot \cos(k\omega_0 t) + U_k^B \cdot \sin(k\omega_0 t)\right)$$
$$= 3.75 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{A_0\left(-1 + (-1)^k\right)}{2 \cdot k^2 \cdot \pi^2} \cdot \cos(k\omega_0 t) + \frac{A_0}{2 \cdot \pi \cdot k} \cdot \sin(k\omega_0 t)\right)$$

Közelítés 5 harmonikust tartalmazó Fourier-polinommal:

$$u(t) \approx 3.75 + \sum_{k=1}^{5}\left(-\frac{15\left(-1 + (-1)^k\right)}{2 \cdot k^2 \cdot \pi^2} \cdot \cos(k\omega_0 t) + \frac{15}{2 \cdot \pi \cdot k} \cdot \sin(k\omega_0 t)\right) \approx$$



1.2

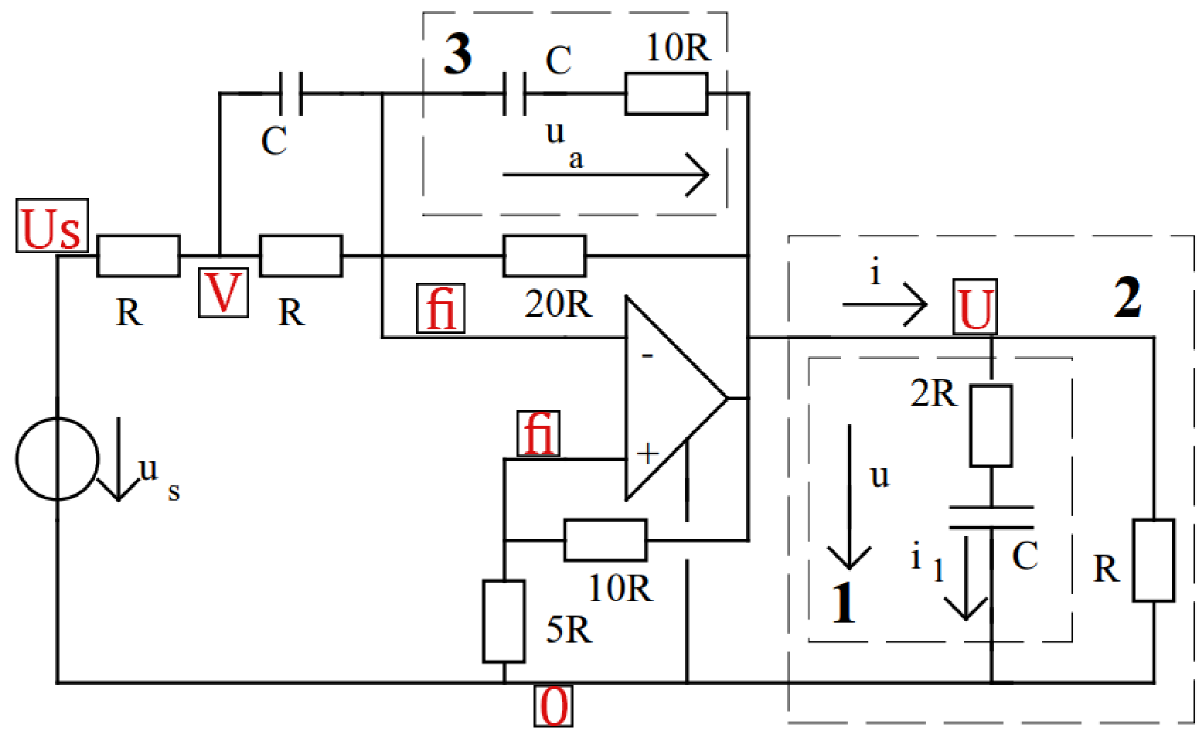
A jel effektív értéke pontosan és 5 harmonikus Fourier közelítésben:

$$u_{eff,\ pontos} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} u^2(t)\cdot dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \left(A_0 - 2\cdot A_0\cdot\frac{t}{T}\right)^2 \cdot dt} = \frac{A_0}{\sqrt{6}} = \frac{15}{\sqrt{6}} \approx 6{,}1237\ V$$

$$u_{eff,\ fourier} = \sqrt{U_0^2 + \sum_{k=1}^{5}\left(\frac{u_k}{2}\right)^2} = \sqrt{3{,}75^2 + \sum_{k=1}^{5}\left(\frac{-\frac{15[(-1)^k - 1]}{\pi^2\cdot k^2} - \frac{15}{\pi\cdot k}}{\sqrt{2}}\right)^2} \approx 4{,}5014\ V$$

A közelítés relatív hibája: $\frac{6{,}1237-4{,}5014}{6{,}1237}\cdot 100 = 26.49\%$

1.3



$$v : \frac{v-u_s}{R} + \frac{v-\varphi}{R} + (v-\varphi)\cdot j\omega c = 0$$

$$\varphi^- : \frac{\varphi - v}{R} + (\varphi - v)\cdot j\omega c + \frac{\varphi - u}{(j\omega c)^{-1} + 10R} + \frac{\varphi - u}{20R} = 0$$

$$\varphi^+ : \frac{\varphi}{5R} + \frac{\varphi - u}{10R} = 0 \to \varphi = \frac{5R}{15R}\cdot u$$

$$u_s \to \frac{-0.0199\, v - 80.122\cdot(j\omega) - 639.2\cdot(j\omega)^2}{-0.00998 - 39.949\cdot(j\omega) + (j\omega)^2}, \qquad u \to \frac{0.0000468v + 0.1882\mathrm{jw}v + 3\mathrm{jw}^2 v}{-0.00998 - 39.949\mathrm{jw} + \mathrm{jw}^2}$$

$$\boldsymbol{H(j\omega)} = \frac{\mathbf{-4,7\cdot 10^{-3}(j\omega)^2 - 2,9\cdot 10^{-4} j\omega - 7.3\cdot 10^{-8}}}{\mathbf{(j\omega)^2 + 0.12534 j\omega + 3,12\cdot 10^{-5}}}$$

1.4

$$\begin{aligned} U_s(t) \approx\ & -\frac{15(-1+(-1)^1)}{2\cdot\pi^2}\cdot\cos(\omega_0 t) + \frac{15}{2\cdot\pi}\cdot\sin(\omega_0 t) - \frac{15(-1+(-1)^2)}{2\cdot 2^2\cdot\pi^2}\cdot\cos(2\omega_0 t) \\ & + \frac{15}{2\cdot 2^2\cdot\pi}\cdot\sin(2\omega_0 t) - \frac{15(-1+(-1)^3)}{2\cdot 3^2\cdot\pi^2}\cdot\cos(3\omega_0 t) + \frac{15}{2\cdot 3\cdot\pi}\cdot\sin(3\omega_0 t) \\ & - \frac{15(-1+(-1)^4)}{2\cdot 4^2\cdot\pi^2}\cdot\cos(4\omega_0 t) + \frac{15}{2\cdot 4\cdot\pi}\cdot\sin(4\omega_0 t) - \frac{15(-1+(-1)^5)}{2\cdot 5^2\cdot\pi^2} \\ & \cdot\cos(5\omega_0 t) + \frac{15}{2\cdot 5\cdot\pi}\cdot\sin(5\omega_0 t) \end{aligned}$$

A linearitás miatt alkalmazhatjuk a szuperpozíció elvét!
$Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot U(j\omega)$

k	$U(j\omega)$	$H(j\omega)$	$Y(j\omega)$
0	3.75	$0.0023 \cdot e^{j180°.00}$	$0.0086 \cdot e^{-j90.00°}$
1	$3.9071 \cdot e^{-j90°}$	$0.0048 \cdot e^{j170.89°}$	$0.0188 \cdot e^{-j80.61°}$
2	$1.1936 \cdot e^{-j90°}$	$0.0049 \cdot e^{j168.61°}$	$0.0058 \cdot e^{-j78.05°}$
3	$0.9646 \cdot e^{-j90°}$	$0.0050 \cdot e^{j163.71°}$	$0.0048 \cdot e^{-j\,73.71°}$
4	$0.5968 \cdot e^{-j90°}$	$0.0055 \cdot e^{j155.12°}$	$0.0032 \cdot e^{-j65.12°}$
5	$0.5383 \cdot e^{-j90°}$	$0.0094 \cdot e^{j138.89°}$	$0.0051 \cdot e^{-j48.89°}$

2.1

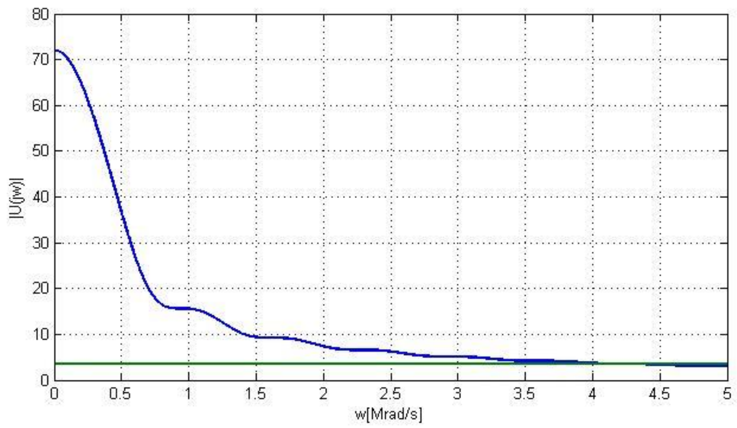
$$u(t) = \left[\varepsilon(\mathrm{t}) - \varepsilon\left(\mathrm{t} - \frac{\mathrm{T}}{2}\right)\right] \cdot \left(A_0 - \frac{2 \cdot A_0}{T} \cdot t\right)$$

$$u(t) = \varepsilon(t) \cdot A_0 - \varepsilon(t) \cdot \frac{2 \cdot A_0}{T} \cdot t + \varepsilon\left(t - \frac{T}{2}\right) \cdot \frac{2 \cdot A_0}{T}\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

Fourier transzformáció után:

$$u(j\omega) = \frac{A_0}{j\omega} - \frac{2 \cdot A_0}{T} \cdot \frac{1}{(j\omega)^2} + \frac{2 \cdot A_0}{T} \cdot \frac{1}{(j\omega)^2} \cdot e^{-j\omega\frac{T}{2}}$$

2.2



$$\Delta\omega \approx 4{,}3333 \frac{Mrad}{s}$$

2.3

A válasz komplex spektruma:

$$\boldsymbol{Y(j\omega)} = H(j\omega) * U(j\omega) =$$

$$= \frac{-4{,}7 \cdot 10^{-3}(\mathrm{j}\omega)^2 - 2{,}9 \cdot 10^{-4}\mathrm{j}\omega - 7.3 \cdot 10^{-8}}{(j\omega)^2 + 0.12534\mathrm{j}\omega + 3{,}12 \cdot 10^{-5}} \cdot \frac{15}{j\omega} - \frac{30}{19{,}2} \cdot \frac{1}{(j\omega)^2} + \frac{2 \cdot 15}{19{,}2} \cdot \frac{1}{(j\omega)^2} \cdot e^{-j\omega\frac{19{,}2}{2}} =$$

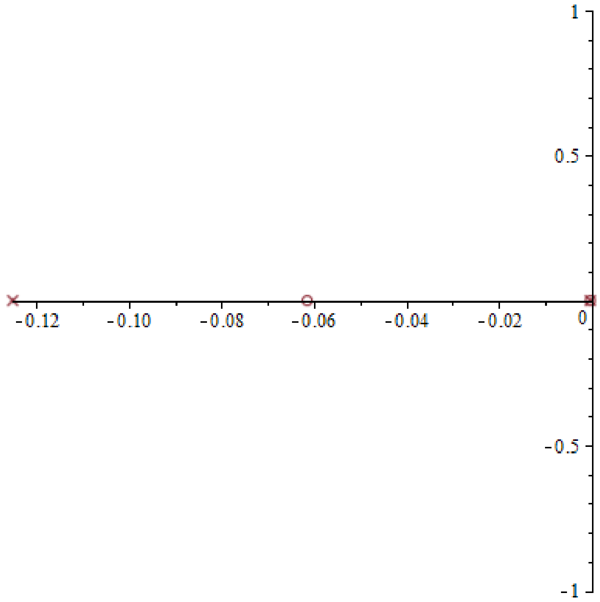
$$= -\frac{\mathbf{0.005} \cdot \left(\mathbf{3}\boldsymbol{j\omega} - \mathbf{0.3125} + \mathbf{0.3125} \cdot \boldsymbol{e}^{\mathbf{9.6}\cdot\boldsymbol{j\omega}}\right) \cdot (\mathbf{47}\boldsymbol{j\omega}^{\mathbf{2}} + \mathbf{2.9}\boldsymbol{j\omega} + \mathbf{0.007})}{\boldsymbol{j\omega}^{\mathbf{2}} \cdot (\boldsymbol{j\omega}^{\mathbf{2}} + \mathbf{0.1253}\boldsymbol{j\omega} + \mathbf{3.12} \cdot \mathbf{10}^{-\mathbf{5}}}$$

3.1

Mivel a rendszer G-V stabilis: $H(s) = H(jw), ha\ jw = s$.

$$\boldsymbol{H(s)} = \frac{-4.7 \cdot 10^{-3} \cdot s^2 - 2.9 \cdot 10^{-4} \cdot \mathrm{s} - 7.3 \cdot 10^{-8}}{s^2 + 0.12534 \cdot \mathrm{s} + 3.12 \cdot 10^{-5}}$$

Zérusok: $z_1 = -0.0614, z_2 = -0.00025$
Pólusok: $p_1 = -0.00024, p_2 = -0.1251$



3.2

$$H(s) = \left(\frac{-4.7 \cdot 10^{-3} \cdot s^2 - 2.9 \cdot 10^{-4} \cdot \mathrm{s} - 7.3 \cdot 10^{-8}}{s^2 + 0.12534 \cdot \mathrm{s} + 3.12 \cdot 10^{-5}}\right)$$

Parciális törtekre bontás MATLAB segítségével:

$$m = [-4.7 * 10^\wedge - 3\ 2.9 * 10^\wedge - 4\ \ -7.3 * 10^\wedge - 8];$$

$$n = [1\ 0.12534\ 3.12 * 10^\wedge - 5];$$

$$zerus = roots(m)$$

$$polus = roots(n)$$

$$[r, p, k] = residue(m, n)$$

Ebből:

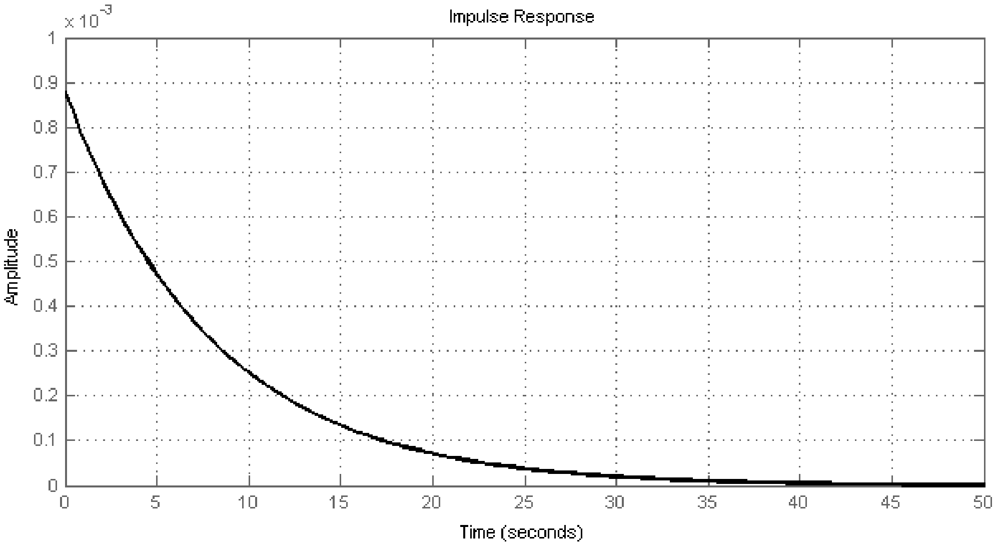
$$r = \begin{matrix} 0.8803 \\ -0.0012 \end{matrix}$$

$$p = \begin{matrix} -0.1251 \\ -0.0002 \end{matrix}$$

$$k = -0.0047$$

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = k \cdot \delta(t) + r_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} \cdot \varepsilon(t) + r_2 \cdot e^{p_2 \cdot t} \cdot \varepsilon(t) =$$

$$= -0.0047 \cdot \delta(t) + 0.8803 \cdot e^{-0.1251t} \cdot \varepsilon(t) - 0.0012 \cdot e^{-0.0002t} \cdot \varepsilon(t)$$



3.3

Ha a gerjesztés: $u(t) = A_0 \cdot \varepsilon(\mathrm{t}) \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}\right)$ $\rightarrow$ $U(s) = \frac{A_0}{s} - \frac{A_0}{s + \frac{1}{T}}$

$$Y(s) = u(s) \cdot H(s) = \left(\frac{15}{s} - \frac{15}{s + \frac{1}{19{,}2}}\right) \cdot \left(\frac{-4.7 \cdot 10^{-3} \cdot s^2 - 2.9 \cdot 10^{-4} \cdot \mathrm{s} - 7.3 \cdot 10^{-8}}{s^2 + 0.12534 \cdot \mathrm{s} + 3.12 \cdot 10^{-5}}\right) =$$

$$= \frac{-5.70313 \cdot 10^{-8} - 0.000226563 \cdot s - 0.00367188\, s^2}{(s\, (0.0520833\ + s)\, (0.0000312\ + 0.12534\, s + s^2)}$$

Parciális törtekre bontás MATLAB segítségével:

$$my = [-5.703 * 10\wedge -8\ \ -2.265 * 10\wedge -4\ \ -3.673 * 10\wedge -3]$$

$n1 = [1\ 0.05208]$

$n2 = [1\ 0.1253\ 3.12 * 10^\wedge - 5]$

$ny = conv(n1, n2)$

$[ry, py, ky] = residue(my, ny)$

Ebből:

$$ry = \begin{matrix} -0.4002 \\ 0.9680 \\ -0.5678 \end{matrix}$$
$$py = \begin{matrix} -0.1251 \\ -0.0521 \\ -0.0002 \end{matrix}$$
$$ky = [\,]$$

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = k \cdot \delta(t) + r_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} \cdot \varepsilon(t) + r_2 \cdot e^{p_2 \cdot t} \cdot \varepsilon(t) + r_3 \cdot e^{p_3 \cdot t} \cdot \varepsilon(t) =$$

$$= -0.4002 \cdot e^{-0.1251t} \cdot \varepsilon(t) + 0.9680 \cdot e^{-0.0521t} \cdot \varepsilon(t) - 0.5678 \cdot e^{-0.0002t} \cdot \varepsilon(t)$$